LES PRINCIPES

DE

L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

LES PRINCIPES

DE

L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

EXPOSÉ HISTORIQUE ET CRITIQUE

PAR

PIERRE BOUTROUX

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

TOME PREMIER

Les nombres — Les grandeurs
Les figures — Le calcul combinatoire — Le calcul algébrique
Calcul des fonctions — L'algèbre géométrique.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1914

AVANT-PROPOS

L'enseignement des mathématiques a subi récemment, presque en tous pays, une transformation remarquable. C'étaient naguère la structure de la démonstration, l'enchaînement impeccable des propositions qui préoccupaient nos maîtres, fidèles en cela à la tradition euclidienne. Aujourd'hui on vise, au contraire, à rendre « intuitives » les conceptions mathématiques, c'est-à-dire à les présenter sous une forme vivante et concrète ; on ne les sépare pas de leurs applications, et l'on espère ainsi faire voir qu'elles répondent à des besoins réels, qu'elles ne sont pas de simples échafaudages de syllogismes, élaborés, en des heures de désœuvrement, par des esprits subtils et maniaques. Le point de vue des logiciens et celui des intuitionnistes présentent des avantages différents. Les premiers font des Mathématiques une école sans pareille de raisonnement déductif : il est vrai que l'art de raisonner n'est point, pour une société d'hommes d'action, le plus nécessaire. Les seconds fortifient le lien qui unit la science pratique à la science théorique et ils sauvent ainsi cette dernière du discrédit qui la menace ; ajoutons que, dans l'enseignement élémentaire, la supériorité de leur méthode paraît incontestable.

Il est un point, cependant, sur lequel logiciens et intuitionnistes se rencontrent. Les uns et les autres ont en vue l'utilité indirecte de la culture scientifique — soit pour la formation de la raison, soit pour l'éducation de l'ingénieur ou de l'homme en général — et non pas l'étude désintéressée des notions mathématiques elles-mêmes. A la valeur spéculative de ces notions, à la richesse de leur contenu, à leurs affinités, au rôle qu'elles jouent dans la science rationnelle, ils ne prêtent qu'une attention secondaire.

Serait-ce donc que les idées mathématiques ne valent que par la manière dont elles sont enfilées ou par l'usage pratique qu'on en peut faire ?

Ce n'est point là, certainement, ce que l'on a pensé ; mais la science théorique, considérée en elle-même, — l'*Analyse pure*, comme on a l'habitude de l'appeler — n'est susceptible d'intéresser qu'une minorité d'individus dont les programmes d'études ne peuvent point ou guère tenir compte.

C'est à cette minorité — non négligeable, il s'en faut — que s'adresse le présent ouvrage. Futurs professeurs de mathématiques ; étudiants qui ont reçu une éducation principalement « intuitive », ou technique, et qui ont le désir de la compléter ; philosophes d'origine dont l'attention est attirée vers les sciences — il est, croyons-nous, un certain nombre de personnes qui aimeraient à jeter un coup d'œil d'ensemble sur l'Analyse mathématique, qui sont curieuses d'en connaître la signification intrinsèque et l'évolution historique. Peut-être pourrons-nous faciliter la tâche de ces personnes en cherchant à donner, sur un plan élargi, un pendant et une suite aux *Notions de Mathématiques* de Jules Tannery (1).

De l'Analyse mathématique nous avons surtout en vue le contenu. Ce sont les faits mathématiques, étudiés objectivement et pour eux-mêmes, qui retiendront notre attention plutôt que les procédés, souvent artificiels, par lesquels ces faits sont découverts et contrôlés. Aussi laisserons-nous de côté — tout en en faisant

(1) Delagrave, 5e édit., 1910. — Il n'existe, croyons-nous, aucun ouvrage qui réponde d'une façon complète au besoin que nous signalons ici, mais il en est d'excellents où les personnes déjà quelque peu au courant des mathématiques, pourront apprendre beaucoup. Telles sont les leçons sur les mathématiques élémentaires (*Elementarmathemat. vom höheren Standpunkt am*) de Félix Klein, où l'on retrouvera la marque de ce prestigieux talent qui rend l'enseignement de M. Klein si vivant et attachant. Nous devons signaler aussi le récent ouvrage de M. Léon Brunschvicg (*Les étapes de la philosophie mathématique*, Alcan, 1911) qui est sans doute l'étude philosophique la plus complète et la plus suggestive à laquelle ait donné lieu de nos jours l'Analyse mathématique. Nous avons nous-même mis fréquemment à profit, dans notre travail, la lecture de ce livre et les conseils que M. Brunschvicg a bien voulu nous donner personnellement.

connaître le principe quand faire se pourra — les démonstrations de nombreuses propositions : propositions qu'une première approximation nous permet de regarder comme des axiomes évidents, ou qui sont très élémentaires, ou, ne peuvent être obtenues — au contraire — que par des voies difficiles ou détournées. Nous passerons également sous silence certaines théories spéciales, qui peut-être sont très utiles dans les mathématiques appliquées, mais qui n'ajoutent rien à la physionomie de la science. La géométrie, par exemple, devenue aujourd'hui une simple application de l'Analyse. occupe dans cet ouvrage une place restreinte : elle devait cependant y figurer à cause du rôle prépondérant qu'elle a joué dans la formation des mathématiques pures.

A ces restrictions près, le présent ouvrage contient, ou peu s'en faut, toutes les matières sur lesquelles porte le cours de mathématiques générales professé dans nos Facultés des Sciences. Il en dépasse d'ailleurs notablement le cadre, car il touche par quelques endroits à certains chapitres de l'Analyse moderne la plus élevée, et il reprend, d'autre part, la science mathématique à son origine, à son principe, afin d'en présenter, autant que faire se pourra, un tableau d'ensemble.

Mais, encore une fois, c'est uniquement le côté spéculatif de la science que nous allons envisager. Le lecteur qui voudrait se familiariser avec les méthodes algébriques et analytiques devra recourir aux traités spéciaux [1], qui seuls pourront lui donner la technique et l'habitude du calcul sans lesquelles il n'est pas de vrai mathématicien.

[1] Il est inutile d'énumérer les nombreux traités de mathématiques générales dont disposent aujourd'hui ceux qui veulent étudier les principes de l'Analyse. Le débutant qui voudra s'aider du secours de la méthode « intuitive » pourra se référer au *Cours de Mathématiques* de M. Emile Borel (Colin, éditeur) ou au récent ouvrage de M. Sainte-Laguë : *Introduction au cours de Mathématiques générales* (Hermann, éditeur, 1913). A ceux, d'autre part, qui, dans le domaine des mathématiques élémentaires, s'intéressent à l'enchaînement logique et à la perfection formelle des propositions, on ne saurait indiquer de meilleurs guides que les *Leçons d'Arithmétique* de Jules Tannery et les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard (Colin, éditeur).

Je n'entreprendrai point d'expliquer ici le détail du plan et la division des matières que j'ai adoptés. Je me réserve d'en donner la raison et de chercher à les justifier chemin faisant ([1]). En gros l'on peut dire que le présent tome contient ce qui a trait aux éléments de l'arithmétique, de la géométrie et de l'algèbre, y compris le calcul des dérivées et la théorie élémentaire des équations différentielles; le tome II sera principalement consacré à la géométrie analytique, aux quantités imaginaires et aux développements en séries, à la logique des mathématiques et au calcul infinitésimal.

Pour réaliser mon programme, je devais évidemment accorder une large place à l'histoire. Ici encore, cependant, il fallait me résigner à être incomplet. Je n'ai guère pu donner que des aperçus sur les tendances principales des diverses époques et des différentes écoles de mathématiciens, sur les moments les plus significatifs, — les tournants, comme on dit quelquefois — de l'évolution de la science. J'éclairerai ces aperçus par de nombreuses citations originales, et j'insérerai çà et là quelques brèves indications sur l'histoire des inventions et des découvertes les plus notables. Enfin, l'on trouvera à la fin du tome II un *Appendice historique* contenant une série de notes biographiques et bibliographiques sur les principaux mathématiciens antérieurs à 1850 ([2]).

Un lexique général terminera cet ouvrage et permettra de retrouver facilement les diverses indications historiques, comme aussi les définitions des termes techniques et les propositions fondamentales, qui y sont contenues.

C'est dire que si le présent livre prétend être un exposé systé-

([1]) En particulier, dans le premier chapitre du *Troisième Livre* qui se trouvera dans le tome II.

([2]) Les renseignements relatifs aux mathématiciens d'importance secondaire ne figurant pas dans l'*Appendice historique* seront donnés ou rappelés dans le lexique général qui terminera le tome II. Afin de permettre au lecteur de se reporter facilement aux éditions originales des ouvrages anciens, nous indiquerons le plus souvent possible (dans les notes et dans l'*Appendice historique*) les cotes que portent les exemplaires de ces ouvrages conservés à la Bibliothèque Nationale de Paris.

matique de la science, — et qui dit systématique, dit jusqu'à un certain point subjectif, — si (nous l'espérons du moins) il remue quelques idées et invite à la réflexion philosophique, son premier objet n'en est pas moins de fournir des renseignements objectifs et de servir de répertoire aux débutants en mathématiques.

Il me reste à remercier tous ceux qui m'ont aidé dans mon entreprise : M. Brunschvicg, M. Buhl, M. Rivaud, M. Turrière, qui m'ont adressé sur de nombreux points des observations utiles ; M. Hermann, à qui je dois une reconnaissance particulière pour ses aimables encouragements et les soins qu'il a apportés à la publication de ce volume.

Poitiers, 1913.

LES PRINCIPES
DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE
EXPOSÉ HISTORIQUE ET CRITIQUE

LIVRE PREMIER

CONSTATATION DES FAITS

CHAPITRE PREMIER

LES NOMBRES

I. — Le monde des nombres

1. — « Il conviendrait, — dit Platon au VIIe livre de la *République*, — il conviendrait de faire une loi et de persuader en même temps ceux qui sont destinés à remplir les premières charges de l'Etat de se livrer à la science du calcul, non pas pour en faire une étude superficielle, mais pour s'élever, par le moyen de la pure intelligence à la contemplation de l'essence des nombres (¹) ». Ce projet ferait sans doute sourire les politiciens d'au-

(¹) Et ainsi, grâce à l'étude des nombres, l'âme sera conduite de la sphère des choses périssables à celle de la vérité et de l'être (*République*, liv. VII, 525 bc).

jourd'hui, mais il nous fait bien connaître l'état d'esprit des savants grecs à qui il est donné de contempler pour la première fois le monde merveilleux des nombres. Monde non pas fictif, mais véritable, car les nombres, essences éternelles, ont une réalité plus profonde que les objets éphémères perçus par nos sens. Nous ne *construisons* pas, comme on pourrait croire, les théorèmes de l'arithmétique : nous les *voyons* grâce à une mystérieuse faculté de divination que nous trouvons en nous et que les philosophes appellent « intuition intellectuelle ».

Tel était le point de vue de Platon, tel était plus anciennement, celui des Pythagoriciens qui furent, à proprement parler, les fondateurs de la science rationnelle (1).

Certes il n'est pas douteux que l'art du calcul avait déjà atteint en Orient un haut degré de perfection lorsque les Grecs commencèrent à s'y appliquer méthodiquement (au VIIe ou au VIe siècle av. J.-C.). Des témoignages précis en font foi, dont quelques uns remontent à une époque fort reculée : tel le *Manuel d'Ahmes* (2), où nous est révélée la science égyptienne d'il y a quatre mille ans ; telles aussi, peut être, certaines inscriptions babyloniennes qu'on nous dit être du XXVe siècle avant l'ère chrétienne. Mais, quelles que fussent ses ressources, la science des Egyptiens et des Babyloniens n'était en somme qu'un recueil de règles et d'artifices se rapportant à des problèmes pratiques : c'est pourquoi Platon refu-

(1) Cf. *Le Rationnel* (1898) et les autres ouvrages de M. G. Milhaud.

(2) Ce manuel a été publié et traduit (d'après le *Papyrus Rhind* du Musée Britannique) par Eisenlohr : *Ein mathematisches Handbuch der alten Ægypten*, Leipzig, 1877. On suppose qu'il a été écrit, entre 2000 et 1700 av. J.-C., pour des architectes, des ingénieurs et des arpenteurs. L'auteur, Ahmes, se borne à énoncer des règles de calcul qui donnent la solution des problèmes concrets les plus usuels : « règle pour calculer un fruitier rond », « règle pour calculer un champ », problèmes de partage, calcul du rendement en pain de certains volumes de farine, calcul de la nourriture absorbée par les oies et les bœufs. Cependant l'analyse de ces diverses règles nous donne une idée approximative des connaissances théoriques du calculateur égyptien. Il sait en quoi consistent les quatre opérations quoiqu'il ne paraisse pas très expert dans la pratique de la multiplication et surtout de la division ; il manie des fractions de numérateur 1 ; il connaît les progressions ; il résout mêmes certaines équations du premier degré dont les coefficients sont des nombres entiers ou des fractions (*vide Deux. Liv.*). En somme Ahmes connaît, de l'Arithmétique, ce qui est indispensable pour la pratique du calcul ; la science spéculative et désintéressée lui est étrangère.

sait à ces peuples le nom d'*amis de la science*. A Pythagore, et aux philosophes grecs en général, revient l'honneur d'avoir distingué et opposé l'une à l'autre l'*Arithmétique théorique* et la *Logistique* ou art du calcul.

2. Qu'est-ce qu'un nombre? — On a beaucoup discuté et l'on discutera longtemps encore sur l'origine et la signification logique de la notion de nombre. Fort heureusement cette notion est de celles qui se passent de définitions et de commentaires. Depuis l'époque reculée où l'humanité a appris à compter, le nombre est devenu l'une des données fondamentales sur lesquelles travaille notre pensée, donnée si immédiate, si claire à l'intelligence, qu'en cherchant à l'analyser, nous ne réussissons tout d'abord qu'à l'obscurcir. C'est pourquoi l'Arithmétique a pu s'édifier sur des définitions verbales et incomplètes, et n'en être pas moins tenue dans tous les temps pour la science parfaite par excellence.

Soit une collection d'objets, par exemple un tas de pommes de même grosseur. Cette collection ou tas définit un *nombre cardinal*, lequel est plus ou moins grand suivant que le tas est plus ou moins gros. Formons en particulier, et rangeons devant nous une file de tas de pommes comprenant respectivement *une* pomme, puis *deux* pommes, puis *trois* pommes, etc. Cette file de tas définit une suite de nombres dont nous pouvons comparer les grandeurs relatives. Chaque tas contient une pomme de plus que le tas précédent, une pomme de moins que le tas suivant. Chaque tas est plus grand que tous les tas précédents, plus petit que tous les tas suivants.

La suite de nombres que nous définissons au moyen d'un tas de pommes, nous pourrions aussi la définir au moyen d'un tas de poires ou d'un tas d'objets quelconques. C'est pourquoi nous disons qu' « un nombre cardinal est une collection d'objets, distincts, mais quelconques, de la nature desquels on fait abstraction ». Nous conviendrons d'appeler « *unités* » ces objets, sur lesquels nous sommes en état de raisonner lors même que nous les avons dépouillés de toute qualité physique.

Nous appellerons « suite croissante des nombres cardinaux » la suite des nombres qui comprennent respectivement une unité,

puis deux unités, puis trois unités, etc. Cette suite contient tous les nombres cardinaux, — que l'on désigne précisément par les mots : *un* [1], *deux*, *trois*, *quatre*, etc. Chaque nombre est *supérieur* à tous les nombres qui le précèdent dans la suite et *inférieur* à tous les nombres qui le suivent. Chaque nombre *surpasse d'une unité* le nombre précédent. Chaque nombre ne figure qu'une fois dans la suite.

Dans la suite croissante des nombres cardinaux, chaque nombre a un *rang* qui est, par définition, le « *nombre ordinal* » correspondant. Ainsi, *un* est le *premier* nombre, *deux* est le *second* nombre, etc. ; par conséquent : au cardinal *un* correspond l'ordinal *premier*, au cardinal *deux* correspond l'ordinal *second*, et ainsi de suite.

Le mot « *nombre* » non autrement spécifié, — ou « *nombre naturel* » — signifie en Arithmétique « *nombre cardinal* », et c'est en ce sens que nous l'emploierons dans les premiers paragraphes de ce chapitre.

3. — Pour raisonner sur les nombres, nous les représentons par des signes graphiques ou des figures. Mais ces symboles ne sont que des images conventionnelles, images que nous substituons aux nombres abstraits afin de donner prise sur eux à nos sens et de les fixer dans notre mémoire. Les propriétés des nombres ne sont, en réalité, nullement conditionnées par les signes de l'arithmétique, et elles restent immuables tandis que ces signes varient suivant les habitudes, les préférences, la langue, des individus ou des peuples.

L'arithméticien se gardera donc d'exagérer l'importance des signes, et il ne leur attribuera pas d'autre vertu que celle de la simplicité. C'est ainsi que les Pythagoriciens représentaient souvent les nombres au moyen de files ou de groupes de points,



[1] L'unité, pendant longtemps, ne fut point considérée comme un nombre, mais seulement comme l'origine des nombres. C'est ce que Théon de Smyrne [auteur d'un ouvrage intitulé : *Ce qui en mathématique est utile pour la lecture de Platon*, IIe siècle av. J.-C.] exprime en

le point leur apparaissant comme l'objet le plus simple qui pût servir à figurer l'unité [1].

Mais, derrière ces points assemblés, que de choses ne voyaient pas les Pythagoriciens ! On sait qu'ils attribuaient une signification mystique aux oppositions que nous révèle l'Arithmétique : un et multiple, pair et impair, carré et hétéromèque [2]. Pour eux, les nombres sont des êtres, doués de qualités et presque de sentiments. Il y a des nombres parfaits : ce sont ceux qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs (ou parties aliquotes, *vide* n° **28**) ; ainsi $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Il y a des nombres amis [3] (ou amiables φίλοι ἀριθμοί) : ce sont les couples de nombres dont chacun égale la somme des diviseurs de l'autre ; ainsi, 220 et 284, puisque $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$, et $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$. Mais, la merveille des merveilles, c'est le nombre *dix*. « Dix [4], — écrivait Speusippe, neveu et disciple de Platon, — dix est parfait, et c'est à juste titre, et conformément à la nature, que les Hellènes se sont, sans préméditation aucune, rencontrés avec tous les hommes de tous les pays, pour compter suivant ce nombre; aussi possède-t-il plusieurs propriétés qui conviennent à une telle perfection ». En effet, le nombre *dix* renferme autant de nombres pairs que de nombres impairs (cinq), il renferme autant de nom-

ces termes : οὔτε δὲ ἡ μονὰς ἀριθμὸς ἀλλὰ ἀρχὴ ἀριθμοῦ. Dans l'*Arithmétique* de SIMON STEVIN, par contre, en 1585, nous trouvons une longue discussion logique ayant pour objet d'établir : *Que l'unité est un nombre* (p. 1-2). — Cf. *La Logique de Port-Royal*, 1662, IVe part., chap. v.

[1] EUCLIDE représentait les nombres par des longueurs et déduisait leurs propriétés de celles des figures géométriques. L'Arithmétique apparait ainsi, dans son traité, comme une suite de la Géométrie. Ce mode d'exposition, — en ce qui concerne, du moins, les nombres cardinaux, — ne parait pas être conforme à la tradition pythagoricienne et platonicienne.

[2] Un nombre a est carré s'il existe un nombre n tel que $a = n \times n$; un nombre a est hétéromèque s'il existe un nombre n tel que $a = n \times (n + 1)$. Nous verrons plus loin (13 et 14) que n^2 égale la somme des n premiers nombres impairs, tandis que $n \times (n + 1)$ est la somme des n premiers nombres pairs.

[3] Ces nombres étaient connus des Néo-Pythagoriciens, sinon de PYTHAGORE lui-même.

[4] Cité, d'après les *Théologoumènes* de Jamblique, par Paul TANNERY : *Pour l'histoire de la Science Hellène*, p. 386.

bres premiers (1, 2, 3, 5, 7) que de nombres non-premiers (4, 6, 8, 9, 10); il est égal à la somme des quatre premiers nombres ($10 = 1 + 2 + 3 + 4$); et il a bien d'autres propriétés, dont Speusippe fait l'énumération.

De tous temps l'étude des nombres entiers a eu des adeptes passionnés ; et, si elle donne rarement lieu à des applications pratiquement utilisables, elle n'en a pas moins procuré les jouissances les plus pures à ceux qui lui ont consacré, soit leurs loisirs, comme au XVIIe siècle l'académicien et poète Bachet de Méziriac [1], comme le conseiller au parlement de Toulouse, Pierre de Fermat [2], — soit une part de leur activité professionnelle, comme nos contemporains Charles Hermite ou David Hilbert.

2. — *Les opérations fondamentales*

4. — On dit qu'on effectue une *opération* lorsque, suivant une règle déterminée, on déduit de plusieurs nombres donnés un nombre ou un système de nombres appelé *résultat* de l'opération. Effectuer une opération, c'est *calculer*.

Toute opération se traduit par une *égalité* : on écrit que le résultat de l'opération (indiquée au moyen d'un symbolisme convenu) *égale* (=), c'est à-dire : *a pour valeur*, tel ou tel nombre déterminé.

Comme les Grecs et, plus tard, les Hindous [3], nous distin-

[1] *Vide infra*, n°s 27, 28.

[2] *Vide infra*, § 4, *passim*.

[3] Par l'intermédiaire du monde arabe, les Hindous ont exercé sur notre arithmétique une influence d'autant plus grande que nous leur avons emprunté, ou à peu près, leur système de numération (numération de position, voir *infra*, n° 42). Les trois grands noms de l'arithmétique hindoue sont ceux d'ARYABHATA (né en 476 ap. J.-C.), BRAHMAGOUPTA (né en 598), BHASKARA (né en 1114). Parmi les savants arabes qui initièrent l'Occident à la science hindoue, le principal est MOHAMMED-IBN-MOUSA-AL-KHWARIZMI qui vécut à Bagdad et à Damas dans la première moitié du IXe siècle. Ce savant connu surtout par son algèbre (*vide infra*, n° 267). est l'auteur d'un traité d'arithmétique dont une version latine (*Algorithmi de numero indorum*) a été publiée par BONCOMPAGNI (*Trattati d'arithmetica*, Rome, 1857; le mot *Algorithmi* est une déformation du nom d'Al-Khouarizmi).

guons six opérations fondamentales : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances, l'extraction des racines. Ces opérations peuvent être effectuées indifféremment sur des nombres cardinaux quelconques. [Un calcul dont le mécanisme varierait avec le choix particulier des nombres sur lesquels on opère ne pourrait être qualifié d'opération arithmétique].

Les opérations fondamentales sont devenues si familières à l'humanité que l'écolier le plus ignorant de la science des nombres est rompu à leur pratique. Il nous suffira donc de rappeler brièvement en quoi elles consistent ([1]).

Etant donné, d'ailleurs, que les règles des opérations ne dépendent pas de la valeur des nombres sur lesquels elles portent, nous pourrons, dans l'énoncé de ces règles, désigner les nombres par des signes convenus, par exemple par les lettres de l'alphabet. Il sera entendu qu'*une opération définie pour les nombres a, b, c,... est une opération qui conserve un sens lorsqu'on remplace les signes a, b, c,... par des nombres arbitrairement choisis.*

5. Addition. — Additionner deux nombres cardinaux a et b, c'est trouver un nombre α qui soit égal à la réunion, ou à la *somme*, de a et de b. On exprime cette définition de α en écrivant l'égalité ([2])

$$\alpha = a + b \quad (\alpha \textit{ égale } a \textit{ plus } b);$$

a et b sont dits *termes* de la *somme* α. — Additionner trois nombres a, b, c, c'est trouver un nombre β qui soit égal à la somme de α [somme de a et b] et de c; on écrira donc ([3]) :

$$\beta = a + b + c = \alpha + c = (a + b) + c.$$

([1]) La pratique des opérations a été en usage chez les plus anciens peuples civilisés. Cf. le manuel d'Ahmes (*vide supra* p. 2, note 2).

([2]) Dans cette égalité, α est le premier *membre*, $a + b$ est le second *membre*. D'une manière générale, on appelle *membre* d'une égalité l'ensemble des signes placés soit à gauche, soit à droite du signe = (égale). Sur l'origine des signes +, —, etc., voir *infra* n° 268.

([3]) Dans cette *égalité* la parenthèse indique que l'*addition de a et b est supposée effectuée*; si, par exemple, $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, l'égalité veut dire que $2 + 5 + 3$ égale par définition la somme $(2 + 5) + 3$ ou $7 + 3$.

De la même manière, on définira l'addition d'un nombre quelconque de termes.

L'addition est dite *opération univoque*, parce qu'elle conduit à un résultat unique parfaitement déterminé (deux nombres n'ont qu'une somme).

L'addition est dite *opération commutative* parce qu'on obtient la même somme lorsque l'on additionne les mêmes termes en les prenant dans différents ordres : exemple : $a + b = b + a$.

L'addition est une *opération associative* parce qu'on ne modifie pas la valeur d'une somme lorsqu'on remplace plusieurs de ses termes par leur somme effectuée : exemple : $(a+b)+c=a+(b+c)$ [voir p. 7, note 3].

6. Soustraction. — La soustraction est une opération inverse de l'addition, Elle a pour but, étant donnés deux nombres inégaux a et b (j'appelle a le plus grand, b le plus petit) de trouver le nombre d qui vérifie l'égalité $a = b + d$. On dit que d est obtenu en retranchant ou soustrayant b de a, et l'on écrit :

$$d = a - b \quad (d \text{ égale } a \text{ moins } b).$$

Le nombre d est appelé *différence* des nombres a et b.

7. Multiplication. — Soient a et b deux nombres cardinaux. Considérons la somme obtenue en additionnant b termes égaux à a, et soit α cette somme. Nous dirons que α est le *produit de a par b*, et nous écrirons l'égalité :

$$\alpha = a \times b \quad (\alpha \text{ égale } a \text{ multiplié par } b),$$

ou, plus simplement [1]

$$\alpha = a \, . \, b;$$

l'opération qui nous fournit le nombre α est appelée *multiplication* ; le nombre a est le *multiplicande* de la multiplication, le nombre b est le *multiplicateur* ; le multiplicande a et le multiplicateur b sont appelés, aussi, *facteurs* du produit α.

[1] Le signe . dans le sens de $\times$, s'emploie surtout lorsque les facteurs du produit sont représentés par des lettres.

La multiplication est une opération *commutative*, parce que le produit de a par b est égal au produit de b par a ; on a

$$a \times b = b \times a.$$

Nous pourrons donc sans ambiguïté, appeler le nombre α : *produit des deux nombres a et b*.

Le produit de trois nombres (ou trois facteurs) a, b, c, sera, par définition, le produit du produit effectué [1] $(a \times b)$ par le nombre c. On définira pareillement le produit d'un nombre quelconque de facteurs.

La multiplication est une opération *univoque* (voir plus haut ce qui concerne l'addition). C'est une opération *associative*, car on a

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

On pourra donc définir le produit β des trois nombres a, b, c, par l'égalité sans parenthèses ;

$$\beta = a \times b \times c.$$

La multiplication est une *opération distributive*, — propriété exprimée par l'égalité [2]

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

8. Division. — On confond, sous le non de division, deux opérations différentes, la *division exacte* et la *division approchée*.

Division exacte. — Effectuer la division exacte d'un nombre a par un nombre plus petit, b, c'est trouver un nombre q qui vérifie l'égalité

$$q \times b = a.$$

Si le nombre q existe (a est alors nécessairement *supérieur* à b et à q), il est appelé *quotient* de a par b, ou *rapport* de a à b ; le nombre a est appelé *dividende* de la division, et le nombre b *diviseur*.

(1) La parenthèse a toujours la même signification, qu'il s'agisse d'un produit ou d'une somme (cf. p. 7, note 3).

(2) Cette égalité montre comment peuvent être *distribués* les termes du produit.

La division de a par 1 donne comme quotient le nombre a lui-même.

Le quotient de a par b, défini par l'égalité $q \times b = a$, est représenté par les symboles

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a : b,$$

on écrira donc qu'il est *égal* à ces symboles.

La division *exacte* n'est pas toujours possible (caractère qui la distingue des trois opérations précédemment définies). En d'autres termes, il n'existe pas toujours un quotient q qui, multiplié par un diviseur donné b, soit égal à un dividende donné a supérieur à b. Nous exprimerons l'existence de q en disant que a est *divisible par* b. Lorsque a est divisible par b, a est un *multiple* de b, b est un *diviseur* de a.

Division approchée. — Soient a et b deux nombres *quelconques* (a supérieur à b). Effectuer la division approchée de a (*dividende*) par b (*diviseur*), c'est trouver deux nombres q et r tels que

$$a = b \times q + r,$$

r *étant inférieur à* b.

Le nombre q est appelé *quotient* de la division, et le nombre r *reste*. Le quotient est le *plus grand multiple du diviseur qui soit contenu dans le dividende* (1).

9. Elévation aux puissances. — Lorsque les facteurs d'un produit sont tous égaux, la multiplication s'appelle *élévation à une puissance* (2). Elever le nombre a à la puissance p, c'est former un produit de p facteurs dont chacun est égal à a. Le nombre a s'appelle *base*, le nombre p s'appelle *exposant*. Le résultat, que

(1) *Exemples* : La division de 24 par 3 donne comme *quotient* 8, *reste* 0 ; donc 24 est multiple de 3. La division de 25 par 3 donne comme *quotient* 8, *reste* 1.

(2) *Puissance* (*potentia*) est la traduction du mot grec δύναμις que les Pythagoriciens et Diophante employaient exclusivement dans le sens de : *puissance deuxième*.

l'on écrit (1) a^p, est une *puissance* : c'est la *puissance* $p^{ème}$ de a. Ainsi 8 est la puissance troisième de 2.

La puissance seconde d'un nombre a est souvent appelée (2) : *carré de a*; la puissance troisième est souvent appelée (3) : *cube de a*.

L'opération de l'élévation aux puissances (*pour une même base*) jouit de propriétés *distributives* remarquables. On a

$$a^p \times a^q = a^{p+q}; \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \qquad \text{si } p \text{ est supérieur à } q;$$

$$\frac{a^p}{a^q} = 1, \qquad \text{si } p = q.$$

Ainsi, *pour multiplier l'une par l'autre deux puissances de a, on forme la puissance de a qui a pour exposant la somme des deux exposants donnés; pour diviser l'une par l'autre deux puissances de a, on forme la puissance de a qui a pour exposant la différence des exposants donnés.*

C'est à cause de cette règle (relative à l'addition des exposants) que la puissance quatrième d'un nombre était appelée par Diophante d'Alexandrie (et au XVIIe siècle encore) *puissance carré-carrée* (ou *bicarrée*) ; la puissance cinquième s'appelait puissance *carré-cube*, et ainsi de suite (4).

L'élévation aux puissances jouit de la propriété *associative* :

$$(a^p)^q = a^{p \times q} = (a^q)^p.$$

(1) Cette notation (*notation exponentielle*) permet — eu égard aux propriétés distributives et associatives énoncées ci-dessous — d'effectuer sous une forme particulièrement simple et élégante les calculs relatifs aux puissances. Elle fut introduite en algèbre par DESCARTES (*vide Deux. Liv.*). Cependant on la rencontre déjà dans le *Triparty en la science des nombres*, de NICOLAS CHUQUET (1484) [éd. Marre. p. 152]. VIÈTE s'inspirant du système de notation adopté par DIOPHANTE écrivait A *quadr.*, A *cub.*, pour A^2, A^3. Les Cossistes allemands (*vide infra* n^e 274) employèrent également pour représenter les puissances et les racines un système de notations spéciales qui fut simplifié par STIFEL (1486-1597).

(2) *Quadratum*, τετραγώνος ou δύναμις (voir p. 10, note 2); cf. p. 86, note 2).

(3) *Cubus*, κύβος.

(4) Δύναμις ἐπὶ δυναμοδύναμιν, dit DIOPHANTE, ποιεῖ κυβόκυβον (éd. Tannery, p. 8). C'est la propriété distributive :

$$x^2 \times x^4 = x^6.$$

Ainsi, *pour élever a^p à la puissance $q^{ème}$ il suffit de multiplier l'exposant p par q.*

En revanche, l'élévation aux puissances n'est pas une opération commutative, car (en général) a^p n'est pas égal à p^a.

La puissance première d'un nombre quelconque est ce nombre lui-même. Toute puissance de l'unité est égale à l'unité.

10. Extraction des racines. — L'extraction des racines est une opération inverse de l'élévation aux puissances. On dit que le nombre b est la *racine* $p^{ème}$ (ou racine d'*ordre* p) *du nombre* a, si b, élevé à la puissance p, est égal au nombre a (ainsi 2 est la racine troisième de 8); et l'on écrit

$$b^p = a, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt[p]{a} = b.$$

Dans cette dernière égalité, le signe $\sqrt{}$ s'appelle *radical*, a est le *nombre* ou la *quantité sous le radical*. L'extractraction des racines est, comme l'élévation aux puissances, une opération univoque. La racine seconde est appelée « *racine carrée* », et on l'écrit d'ordinaire : $\sqrt{}$ au lieu de $\sqrt[2]{}$. La racine troisième est appelée « *racine cubique* ».

L'*extraction* [1] *d'une racine n'est pas toujours possible*, car, si l'on se donne un nombre a et un ordre p quelconque, il n'existera pas toujours un nombre p tel que $b^p = a$.

11. Remarque : le nombre zéro. — Dans la suite des nombres que nous avons définie au § *1* le premier nombre est *un* [2]. *Zéro*, synonyme de *rien*, ne peut, logiquement parlant, passer pour un nombre, et jusqu'au XVIIe siècle il ne fut point considéré comme tel. Mais, pour l'arithméticien, qu'est-ce qu'un nombre? C'est un élément que nous combinons avec d'autres par le moyen des opérations. Il sera donc loisible de regarder *zéro* comme un nombre à condition d'attribuer un sens (convenu une fois pour

(1) Il s'agit ici de l'extraction proprement dite ou extraction *exacte*. Nous définirons au n° 48 ce qu'il faut entendre par les mots « calcul approché d'une racine ».

(2) Cf. *supra*, p. 4, note 1.

toutes) aux opérations où entre *zéro*. Les conventions adoptées à cet effet sont les suivantes (*zéro* étant représenté par le signe o) :

$$a + 0 = 0 + a = a; \quad a - 0 = a$$
$$a \times 0 = 0 \text{ (} a \text{ fois rien ne donne rien),}$$

et (en vertu de la commutativité)

$$0 \times a = 0$$
$$0^p = 0; \quad \sqrt[p]{0} = 0.$$

Quant à la *division par zéro*, et à l'*élévation à la puissance* o, nous nous réservons de les définir plus loin ([1]).

3. — Propriétés de la suite croissante des nombres. Progressions arithmétiques et géométriques

12. — Nous avons vu (n° **2**) que les nombres peuvent être disposés suivant une suite (croissante) qui contient chacun d'eux une fois et une fois seulement. Cette suite s'écrit :

$$1, 2, 3, \ldots;$$

elle peut être prolongée aussi longtemps qu'on veut, et elle jouit de la propriété suivante : chaque nombre de la suite est supérieur à tous les nombres qui le précèdent et inférieur à tous les nombres qui le suivent ([2]).

Pour pouvoir raisonner sur la suite croissante des nombres, il faut que nous disions d'abord combien de nombres nous prenons dans cette suite; si nous ne la limitions pas, en effet, la suite serait *infinie* et ne se prêterait point au calcul. Nous n'envisagerons donc que la *suite limitée des n premiers nombres* (*n* étant un nombre arbitraire, aussi grand que l'on veut) ; et, remplaçant par

([1]) On a remarqué que CHUQUET, dans son *Triparty* (v. p. 11, note 1) p. 165, déclare impossible l'équation $9x^2 = 5x^2$ qui est cependant satisfaite si l'on donne à x la valeur o : on conclut de là que CHUQUET ne considérait pas o comme un nombre. La lecture de la *Summa* de PACIUOLO (1494), que nous aurons souvent occasion de citer, conduit à la même conclusion.

([2]) Sur les suites croissantes de nombres, en général, voir *infra*, 39.

des points les nombres non écrits, nous figurerons ainsi cette suite :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n-1 \quad n.$$

La suite des n premiers nombres a été, dès l'antiquité, l'objet de nombreuses recherches.

Proposons-nous de calculer la **somme des n premiers nombres** somme que nous désignerons par la lettre S.

Au-dessous de la suite écrite plus haut, écrivons une seconde fois les n premiers nombres, mais en renversant leur ordre, de façon que le nombre n se trouve au-dessous de 1, le nombre $n-1$ au-dessous de 2, $n-3$ au-dessous de 3, ..., le nombre 1 au-dessous de n. Nous obtenons le tableau :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{array}$$

Additionnons deux à deux les nombres superposés. Chaque couple de deux nombres superposés a pour somme $n+1$, et, comme il y a n couples, nous voyons que la somme totale des nombres qui figurent dans notre tableau est égale à $n \times (n+1)$. Mais, dans le tableau, chacun des n premiers nombres se trouve deux fois. J'en conclus que la somme totale des nombres du tableau a pour valeur $2 \times S$ et que, par conséquent :

$$2 \times S = n \times (n+1) \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

13. — L'expression de la somme S va nous servir à résoudre un nouveau problème. Proposons-nous de calculer la **somme des n premiers nombres pairs**. Nous désignerons cette somme par le symbole [1] S′.

On appelle *nombres pairs* les nombres qui sont divisibles par 2. Nous obtiendrons ces nombres, en formant la suite *croissante* ;

$$\begin{array}{lccc} & 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \ldots \\ \text{ou} & 2 & 4 & 6 \quad \ldots \end{array}$$

qui contient manifestement tous les nombres pairs et ne contient

(1) L'accent qui suit la lettre S s'énonce : *prime* ; le symbole S′ se lit donc : S *prime*.

qu'une fois chacun d'eux. Pour calculer la somme S′, nous n'aurons qu'à appliquer les règles de la multiplication. Les n premiers nombres pairs sont les nombres

$$2 \times 1, \quad 2 \times 2, \quad \ldots \quad 2 \times n.$$

Leur somme S′ est égale à

$$2 \times (1 + 2 + \ldots + n) \qquad \text{ou} \qquad 2 \times S,$$

S étant la somme calculée plus haut. Nous avons donc l'égalité (1) :

$$S' = 2 \times S = n \times (n + 1).$$

14. — Proposons-nous maintenant de calculer la **somme des n premiers nombres impairs**. Nous désignerons cette somme par le symbole (2) S″.

On appelle *nombres impairs* les nombres qui ne sont pas divisibles par 2. Pour obtenir la suite de ces nombres, nous n'aurons évidemment qu'à retrancher de la suite croissante des nombres la suite croissante des nombres pairs 2, 4, etc.

Considérons en particulier la suite des $(2 \times n)$ premiers nombres

$$1, \quad 2, \quad \ldots \quad 2 \times (n - 1), \quad 2 \times n,$$

et la suite des n premiers nombres pairs

$$2 \times 1, \quad 2 \times 2, \quad \ldots \quad 2 \times n.$$

Il est clair que tout nombre de la seconde suite figure aussi dans la première, et que tout nombre supérieur aux nombres de la seconde suite ne se trouve pas non plus dans la première suite. J'en conclus que la seconde suite comprend *tous les nombres pairs qui font partie de $2 \times n$ premiers nombres*; il y en a n; par conséquent, la suite des $2 \times n$ premiers nombres contient aussi n nombres qui ne sont pas pairs ; ces nombres sont les *n premiers nombres impairs*, dont la somme, par conséquent, égale la somme des

(1) Le nombre $n \times (n + 1)$ est, d'après la terminologie pythagoricienne, un nombre hétéromèque (cf. *supra*, p. 5, note 2).

(2) Le double accent qui suit la lettre S s'énonce : *seconde*; le symbole S″ se lit donc : S *seconde*.

$(2 \times n)$ premiers nombres *moins* la somme des n premiers nombres pairs.

Cela dit, pour avoir la somme des $(2 \times n)$ premiers nombres, nous n'avons qu'à remplacer n par $2 \times n$ dans l'expression de S trouvée plus haut : nous obtenons :

$$\frac{2 \times n \times (2 \times n + 1)}{2} \quad \text{ou} \quad 2 \times n^2 + n.$$

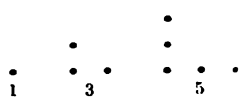
Retranchons la somme des n premiers nombres pairs, c'est-à-dire $n \times (n + 1)$ ou $n^2 + n$. Il reste le nombre :

$$2 \times n^2 + n - (n^2 + n) = n^2$$

qui est la valeur de la somme S″.

Ainsi, *la somme des n premiers nombres impairs est égale au carré du nombre n.* C'est là une belle proposition qui excitait déjà l'admiration des Pythagoriciens (cf. n° **3**). Ils en avaient donné la démonstration suivante :

Représentons les nombres impairs par les groupes de points :



puis, juxtaposons-les conformément à la figure 1, où chaque nombre impair est séparé du suivant par une ligne coudée tracée en pointillé ([1]). On voit que, quel que soit le nombre des nombres impairs ainsi juxtaposés (il y en a quatre sur le schéma ci-contre), la figure formée est un carré dont le côté contient autant de points que l'on a pris de nombres impairs. Supposons que l'on en prenne n ; le carré comprendra n lignes de n points, donc n^2 points en tout. On en conclut que la somme des n premiers nombres impairs est bien égale à n^2.

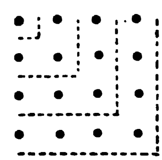


Fig. 1.

15. Progressions arithmétiques. — Après la suite croissante des nombres, celle des nombres pairs et celle des nombres

([1]) Le nombre impair ainsi disposé était appelé « *gnomon* » ; c'est le nom d'un instrument astronomique dont l'image du nombre impair imite la forme.

impairs, les anciens ont envisagé d'autres suites de nombres qui jouissent de propriétés analogues.

Considérons une suite de nombres satisfaisant aux conditions suivantes [1] : 1° la suite est croissante, ce qui signifie que tout nombre de la suite est supérieur aux nombres qui le précèdent et inférieur aux nombres qui le suivent ; 2° deux nombres consécutifs quelconques pris au hasard dans la suite ont pour différence un même nombre r (chaque nombre surpasse le précédent de r unités).

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que la suite est une « *progression arithmétique* » [2] ; les nombres de la suite sont les « *termes* » de la progression ; le nombre r en est la « *raison* » [3].

Soit a le premier terme d'une progression arithmétique de raison r : le second terme est $a + r$; le troisième terme est $a + 2 \times r$; ... le $n^{ème}$ terme est $a + (n - 1) \times r$.

Nous déduisons facilement de là l'expression de la *somme des n premiers termes de la progression*. En effet cette somme comprend :

$$n \text{ fois le nombre } a,$$

(1) Ces définitions subsisteront, sans modifications, lorsque les nombres de la suite ne seront pas des nombres entiers (*Vide infra*, n° 38 et 116).

(2) Dans le Papyrus Rhind (voir p. 2, note 2), l'Egyptien AHMES pose le problème suivant : « Distribuer dix mesures de blé entre dix personnes de manière que chaque personne ait $\frac{1}{8}$ de mesure en moins que la personne qui a reçu avant elle ». Les fractions de mesure de blé qui, d'après cet énoncé, doivent revenir aux différentes personnes sont respectivement

$$\frac{7}{16}, \quad \frac{7}{16} + \frac{1}{8}, \quad \frac{7}{16} + \frac{2}{8}, \text{ etc.}$$

Cette suite de quantités est une progression arithmétique dont les termes sont des fractions. D'autres problèmes traités dans le même papyrus nous confirment dans l'opinion que les calculateurs égyptiens savaient manier les progressions arithmétiques. Plus récemment, les progressions furent familières aux arithméticiens de la Grèce et de l'Inde. Les Arabes les firent connaître à l'Occident.

(3) Il résulte de ces définitions que la suite croissante des nombres est une progression arithmétique de raison 1. La suite croissante des nombres pairs ou des nombres impairs est une progression arithmétique de raison 2.

plus la somme [1]

$$r \times [1 + 2 + \ldots + (n - 1)]$$

qui (d'après le calcul de S fait au n° **12**) a pour valeur

$$r \times \frac{(n-1) \times n}{2}.$$

J'en conclus que la somme cherchée est égale à

$$n \times a + \frac{r \times (n-1) \times n}{2},$$

nombre qui est manifestement la moitié de

$$[2a + r \times (n - 1)] \times n.$$

Mais l'expression entre crochets n'est autre que la *somme du premier terme a et du $n^{\text{ème}}$ terme* $[a + (n - 1) \times r]$ *de la progression*. Et ainsi nous aboutissons à la règle énoncée par Nicolas Chuquet dans son *Triparty* (1484) : « Si l'addition du premier avec le dernier est multipliée par la moitié [2] du nombre des nombres, la multiplication est égale à tous les nombres progressionnés ensemble » (éd. Marre, p. 66).

16. Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. — Considérons une suite de n nombres formant une progression arithmétique de raison r. Il nous sera commode de représenter les termes de la progression par les symboles suivants :

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

où les chiffres 1, 2, ..., n sont des *indices* [3] indiquant le rang qu'occupent les différents termes dans la progression.

Nous avons appris à calculer la somme des termes de la pro-

[1] Le crochet [ ] a ici le même sens qu'une parenthèse : il indique une opération effectuée.

[2] Cette moitié est une fraction si le nombre des nombres est impair. Il faut donc connaître le calcul des fractions pour légitimer dans tous les cas la règle de Chuquet.

[3] Les symboles a_1, a_2, a_n se lisent respectivement ; *a indice* 1 ; *a indice* 2 ; *a indice n*.

gression $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Nous pourrions nous proposer pareillement de calculer la *somme des carrés des termes de la progression*, c'est-à-dire la somme

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

ou, plus généralement, la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances *des termes de la progression*, c'est-à-dire la somme

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$$

où m est un nombre quelconque.

C'est là un problème qui a joué un rôle important dans le développement de l'Analyse mathématique, et qui a, pour ce motif, retenu l'attention des savants les plus illustres.

Envisageons en particulier le cas où la progression arithmétique est celle des n premiers nombres.

La somme des carrés des n premiers nombres était connue d'Archimède ([1]) (IIIe siècle av. J.-C.). La somme des cubes a été également calculée dans l'antiquité.

La somme des quatrièmes puissances est donnée sous une forme imparfaite il est vrai, par *Ghiyath addin al Kashi* ([2]) qui vivait à la cour tartare, à Samarcande, dans la première moitié du XVe siècle.

Johann Faulhaber ([3]), professeur de mathématiques à Ulm (1580-1635) effectua le calcul des puissances semblables des n premiers nombres jusqu'à la onzième puissance.

Au XVIIe siècle enfin, le problème fut résolu dans toute sa généralité. Il fut proposé à Fermat par le Père Mersenne, et Fermat déclara en septembre 1636 (lettre à Mersenne, *Œuv. de Fermat*, II, p. 69) : « Problema totius fortasse Arithmetices pulcherrimum construximus, quo non solum in quavis progressione summam quadratorum et cuborum venamur, sed omnium omnino potestatum in infinitum, methodo generalissima, quadratoquadratorum, quadratocuborum, cubocuborum, etc. ».

([1]) περὶ ἑλίκων, X. Les nombres étant représentés par des grandeurs, l'évaluation de la somme de leurs carrés est, pour Archimède, un problème de géométrie.

([2]) Ed. Wœpcke, Paris, 1853, p. 60-61.

([3]) *Herrn Johann Faulhabers, continuatio seiner neuen Wunderkünste, Zurich*, 1617 ; cf. Cantor, *Vorlesungen*, t. II, p. 748.

Blaise Pascal résolut la même question en 1654, et il exposa sa méthode dans un traité latin intitulé *Potestatum numericarum Summa* (¹).

17. — Nous allons, à titre d'exemple, effectuer le calcul de la somme des carrés des n premiers nombres par une méthode qui ne diffère pas au fond de celle de Pascal et qui se laisse facilement étendre au cas des puissances supérieures.

Désignons par le symbole S la somme des n premiers nombres, par le symbole (²) S_2 la somme inconnue des carrés de ces nombres, par le symbole S_3 la somme inconnue de leurs cubes.

Nous allons nous servir d'une formule que nous établirons plus loin, mais dont il nous est facile de vérifier dès maintenant l'exactitude en effectuant deux multiplications successives (³). Désignant par p un nombre quelconque, nous avons l'égalité

$$(1 + p)^3 = 1 + 3 \times p + 3 \times p^2 + p^3.$$

Faisant successivement, dans cette égalité, $p = 0, p = 1, \ldots, p = n$, nous obtenons le tableau :

$$\begin{array}{l} 1 = 1 \\ (1 + 1)^3 = 1 + (3 \times 1) + (3 \times 1^2) + 1^3 \\ (1 + 2)^3 = 1 + (3 \times 2) + (3 \times 2^2) + 2^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1 + n)^3 = 1 + (3 \times n) + (3 \times n^2) + n^3 \end{array}$$

Additionnons colonne par colonne. A gauche des signes =, nous avons $n + 1$ nombres cubes consécutifs dont la somme n'est autre que : $S_3 + (1 + n)^3$. A droite nous avons :

n fois l'unité,

plus le produit $3 \times (1 + 2 + \ldots + n)$, c'est-à-dire $3 \times S$;
plus le produit $3 \times (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$, c'est-à-dire $3 \times S_2$;
plus la somme $1^3 + 2^3 + \ldots n^3$, c'est-à-dire S_3.

(¹) Traité posthume publié en 1665, *Œuv.*, t. III, p. 341 et suiv.
(²) Ce symbole se lit S *indice* 2.
(³) On vérifie la formule en effectuant le produit :

$$(1 + p) \times (1 + p) \times (1 + p).$$

Nous pouvons donc, finalement, écrire l'égalité

$$S_3 + (1 + n)^3 = n + 3 \times S + 3 \times S_2 + S_3$$

ou, en retranchant des deux membres (c'est-à-dire des deux côtés du signe =) le nombre S_3 qui est égal à lui-même :

$$(1 + n)^3 = n + 3 \times S + 3 \times S_2.$$

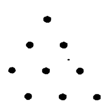
Mais je connais la somme S : elle est égale (**12**) à $\frac{n \times (n + 1)}{2}$. En la remplaçant par cette valeur dans mon égalité et retranchant des deux côtés du signe =, la somme $n + \frac{3 \times n \times (n + 1)}{2}$, j'obtiens la valeur cherchée de S_2 :

$$3 \times S_2 = (1 + n)^3 - n - \frac{3 \times n \times (n + 1)}{2}.$$

En appliquant les règles de la transformation algébrique que nous étudierons plus loin, on mettrait l'expression de S_2 sous la forme plus simple que voici :

$$S_2 = \frac{n \times (n + 1) \times (2n + 1)}{6}.$$

18. Nombres polygonaux. — Nous avons vu que la somme des n premiers nombres a pour valeur $\frac{n \times (n + 1)}{2}$. Les Pythagoriciens donnaient au nombre $\frac{n \times (n + 1)}{2}$ le nom de « *nombre triangulaire* », et ils justifiaient ainsi cette appellation. Considérons un triangle isocèle formé de points, comme l'indique la figure



ci-contre. Nous voyons, que si n est le nombre de points que contient la base du triangle (4 sur notre figure), le nombre total des points du triangle n'est autre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, c'est-à-dire $\frac{n \times (n + 1)}{2}$. Nous donnerons, donc, des nombres triangulaires la définition suivante : *Le nombre triangulaire de rang n est égal à la somme des n premiers nombres entiers.*

La notion de nombre triangulaire avait conduit les anciens à définir toute une série de classes de nombres qu'en raison de cer-

taines interprétations géométriques ils appelaient « *nombres polygonaux* » [ces nombres sont aussi appelés : *nombres figurés*].

Le *nombre carré* de rang n, en particulier, est égal à la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique de raison 2 commençant par l'unité [1].

Le *nombre pentagonal* de rang n est égal à la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique de raison 3 commençant par l'unité ; le nombre *hexagonal* de rang n à la somme des n premiers termes d'une progression de raison 4. Et ainsi de suite [2].

Ces définitions sont données par *Hypsikles*, d'Alexandrie, qui vivait probablement au IIe siècle avant Jésus-Christ. L'étude des nombres polygonaux fut reprise et développée par *Diophante*, — également d'Alexandrie (IIIe-IVe siècle ap. J.-C.) — et elle occupa, pendant des siècles, de nombreux savants. Etude vaine, peut-être, si on prétend le juger après coup d'après l'importance de ses applications. Mais au nom de quel principe pourrions-nous interdire à l'explorateur du monde des nombres de porter où il veut sa curiosité ?

19. Nombres pyramidaux. Triangle arithmétique de Pascal. — Le nombre polygonal n'est point le seul type de nombre figuré que nous suggère la définition du nombre triangulaire.

Nous avons dit que le nombre triangulaire de rang n est la somme des n premiers nombres.

Formons maintenant un *nombre égal à la somme des n premiers nombres triangulaires* : ce nombre sera appelé « *nombre pyramidal de rang n* ».

Les premiers nombres triangulaires étant 1, 3, 6, 10, les premiers nombres pyramidaux seront les nombres

$$1, \qquad 1 + 3 = 4, \qquad 1 + 3 + 6 = 10, \text{ etc.}$$

Les nombres pyramidaux ont été étudiés par les anciens. Mais

(1) Cf. la génération du carré donnée au n° 14.

(2) Ainsi les premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15,... ; les premiers nombres carrés sont 1, 4, 9,... ; les premiers nombres pentagonaux sont 1, 15, 12, 22,... ; les premier nombres hexagonaux sont 1, 6, 15. 28,...

ils furent, dans les temps modernes, le point de départ de nouvelles généralisations, dont la plus remarquable est sans doute le triangle arithmétique de Pascal ([1]).

Pascal forme le tableau ci-contre, qui peut être continué aussi loin que l'on veut. Dans ce tableau, les nombres de la première ligne sont tous égaux à l'unité ; les nombres de la seconde ligne sont les nombres ordinaires ou « *naturels* » ; la troisième ligne contient les nombres triangulaires ; la quatrième ligne contient les nombres pyramidaux ; les lignes suivantes contiennent de nouvelles classes de nombres qui sont toutes définies de la même manière, *le $n^{ème}$ nombre de chaque classe étant égal à la somme des n premiers nombres de la classe précédente.*

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Le triangle arithmétique jouit de nombreuses et fort belles propriétés qu'il serait malheureusement trop long de rapporter ici (Cf. n° **265**).

20. Médiétés. — Les arithméticiens grecs ont étudié sous le nom de *médiétés* certaines associations remarquables de nombres, qui relèvent à proprement parler de la théorie des proportions (*vide infra* n° **96**), mais que nous pouvons mentionner dès maintenant.

Théon de Smyrme distingue dix sortes de médiétés pouvant avoir lieu entre trois nombres a, b, m ; il y en a trois qui sont fondamentales ([2]) :

1° *Médiété arithmétique*, lorsqu'on a

$$a - m = m - b,$$

d'où l'on tire

$$2 \times m = a + b;$$

([1]) Voir le *Traité du triangle arithmétique*, écrit par PASCAL en 1654. (*Œuv.*, p. 433 suiv.) Les nombres de Pascal avaient été donnés antérieurement, avec une disposition différente, par MICHEL STIFEL. (*Arithmetica Integra*, Nürenberg, 1543) et par quelques autres auteurs.

([2]) Cf. MILHAUD, *Les philosophes géomètres de la Grèce*, 1900, p. 92. Les

m est alors *moyen arithmétique* (*moyenne*, au sens usuel du mot) entre a et b.

2° *Médiété géométrique*, lorsqu'on a

$$m^2 = a \times b\ ;$$

m est alors *moyen géométrique* (ou *moyenne proportionnelle*) entre a et b; si a est divisible [1] par m, on pourra écrire

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{b}.$$

3° *Médiété harmonique*, lorsque l'on a [2]

$$2 \times a \times b = m \times (a + b);$$

m est alors *moyen harmonique* entre a et b.

Les médiétés interviennent dans une foule de problèmes, aussi bien en géométrie qu'en arithmétique. La médiété géométrique, en particulier, permet de définir certaines suites de nombres remarquables que l'on appelle « *progressions géométriques* ». Ces suites ont été étudiées par les Grecs, mais on en trouve déjà un exemple dans le traité de l'Egyptien Ahmes.

définitions qui suivent subsistent sans modifications lorsque les nombres a, b, m ne sont pas entiers (*Vide infra*, n°s 38 et 116).

Si l'on connaît la théorie des proportions, on pourra écrire comme il suit les égalités qui définissent les médiétés :

Médiété arithmétique :

$$\frac{a - m}{m - b} = \frac{a}{a};$$

Médiété géométrique :

$$\frac{a - m}{m - b} = \frac{a}{m};$$

Médiété harmonique :

$$\frac{a - m}{m - b} = \frac{a}{b}.$$

(1) Et dans tous les cas si l'on connaît le calcul des fractions.

(2) Si l'on connaît le calcul des fractions, on reconnaît, en divisant chaque membre par $m \times a \times b$, que cette égalité équivaut à

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

21. Progressions géométriques. — On appelle ainsi une *suite de nombres* (dits *termes de la progression*) *dont chacun est moyen géométrique entre ses deux voisins.*

Représentons les termes de la suite par les symboles (cf. **16**) :

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

et supposons que chacun d'eux se déduise du précédent en le multipliant par un nombre (¹) b (toujours le même et différent de 1).

Nous aurons, pour les termes successifs de la progression, les valeurs suivantes :

$$a_1 ; \quad a_2 = a_1 \times b ; \quad a_3 = a_2 \times b = a_1 \times b^2 ;$$
$$a_4 = a_3 \times b = a_1 \times b^3 ; \quad \ldots ; \quad a_n = a_1 \times b^{n-1}.$$

et, par conséquent :

$$a_2^2 = a_1 \times a_3 ; \quad a_3^2 = a_2 \times a_4 ; \text{ etc.}$$

Le nombre b est appelé « *raison* » de la progression.

Proposons-nous de calculer la *somme des n premiers termes d'une progression géométrique dont le premier terme est* a_1 *et la raison* b.

La somme cherchée a pour valeur :

$$a_1 \times (1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}).$$

Pour simplifier cette expression, effectuons la multiplication de la somme $(1 + b + \ldots + b^{n-1})$ par le nombre $b - 1$. Il est facile de vérifier que nous obtenons, comme produit, le nombre $b^n - 1$. En d'autres termes, nous avons l'égalité

$$1 + b + \ldots + b^{n-1} = \frac{b^n - 1}{b - 1},$$

et il en résulte que la somme cherchée a pour valeur le produit (²)

$$a_1 \times \frac{b^n - 1}{b - 1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_1 \times b^n - a_1}{b - 1}.$$

(¹) On déduit de là que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}, \text{ etc.}$$

(²) « Soit, — dit CHUQUET dans son *Triparty* (1484), — le dernier nombre multiplié par le dénominateur de la proportion [c.-à.-d. par la raison de la progression], de laquelle multiplication soit ôté le premier, soit 1 ou autre nombre quel qu'il soit ; et le résidu soit party [divisé] par 1 moins que n'est le dénominateur d'icelle [la raison] ».

4. — *Problèmes divers relatifs aux nombres*

22. Diviseurs et multiples. — L'étude des nombres cardinaux nous suggère une foule de questions d'ordres divers qui sont généralement aussi ardues à résoudre qu'elles sont simples à énoncer. L'effort que ces questions exige de nous n'a point peu contribué, semble-t-il, à leur conférer ce caractère de beauté mystérieuse qui a de tous temps captivé les mathématiciens.

C'est la théorie de la division qui a donné lieu au plus grand nombre d'investigations, et c'est d'elle que nous allons tout d'abord dire quelques mots.

Nous avons vu (**8**) qu'un nombre b est dit *diviseur* d'un nombre a lorsque a est divisible par b; a est dit, en ce cas, *multiple* de b.

Lorsqu'un même nombre en divise séparément deux autres a et b, il divise évidemment leur somme et leur différence. Le quotient est égal à la somme ou à la différence des quotients de a et de b. D'autre part, pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit divisible par un nombre c, il suffit que l'un des facteurs du produit soit divisible par c.

L'application de ces règles (qui résultent de la définition même des opérations fondamentales) permettra de résoudre toute une série de problèmes relatifs aux diviseurs et aux multiples des nombres.

Etant donné un nombre quelconque, quels sont les diviseurs de ce nombre ? Combien y en a-t-il ?

Etant donné plusieurs nombres, quels sont les divisiseurs communs à ces nombres ? Quel est le plus grand de ces diviseurs communs ? Quels sont les multiples communs aux plusieurs nombres ? Quel est le plus petit de ces multiples ?

Ces diverses questions sont traitées, avec autant d'élégance que de rigueur, dans les *Eléments* d'Euclide (*vide infra* **167**).

Pour y répondre rapidement, il est commode de mettre les nombres proposés sous la forme de produits ayant pour facteurs certains nombres que l'on appelle « *nombres premiers* » ou « *facteurs premiers* ». Les nombres premiers jouent dans l'Arithmé-

tique tout entière un rôle prépondérant, et leur importance avait déjà été reconnue par les Pythagoriciens.

23. Décomposition en facteurs premiers. — Tout nombre a est divisible par 1 (le quotient est a). — Tout nombre est divisible par lui-même (le quotient est 1). — *Un nombre qui n'admet pas d'autre diviseur que lui-même et l'unité est appelé « nombre premier »*. Ainsi les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont des nombres premiers; les nombres 4, 6, 9 ne sont pas premiers.

Soit n un nombre quelconque : je dis que ce nombre peut toujours être mis sous la forme *d'un produit dont tous les facteurs sont des nombres premiers*.

En effet, si n n'est pas premier, on démontre (1) qu'il admet sûrement un diviseur premier, a. Appelant le quotient n_1 nous aurons (**8**) :

$$n = a \times n_1,$$

n_1 étant plus petit que n.

Si n_1 est premier, le théorème est démontré. Si n_1, n'est pas premier, il admet un diviseur premier, b. Appelant n_2 le quotient $\frac{n_1}{b}$, j'aurai l'égalité :

$$n = a \times b \times n_2,$$

n_2 étant plus petit que n_1.

Si n_2 est premier, le théorème est démontré. Si n_2 n'est pas premier, on le décomposera comme n, n_1, n_2. Et ainsi de suite.

Les nombres n_1, n_2, n_3, ... vont en diminuant ; il est donc certain qu'après avoir répété un nombre suffisant de fois la même opération, on tombera sur un nombre (2) n_p qui est égal à 1 ; on s'arrêtera à ce moment-là.

Ainsi le nombre n peut être mis sous la forme d'un produit de facteurs premiers a, b, ..., l. En réunissant, s'il y en a, (conformément à la définition des exposants), les facteurs premiers égaux nous obtiendrons finalement notre nombre n sous la forme (3)

$$n = a^\alpha \times b^\beta \times \ldots \times l^\lambda.$$

(1) Voir les traités d'arithmétique élémentaire.

(2) L'indice p indique le nombre des divisions effectuées.

(3) Nous remplaçons par des points les facteurs que nous n'écrivons point et dont nous ne précisons pas le nombre.

Dans cette expression, les lettres $a, b, \ldots, l$ désignent les facteurs premiers distincts (ces facteurs pourraient se réduire à un seul) ; les lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont les *exposants* de ces facteurs (s'ils sont égaux à 1, on ne les écrit pas).

L'opération que nous effectuons lorsque nous mettons n sous la forme indiquée est appelée « *décomposition du nombre n en facteurs premiers* ». Il n'y a point de procédé infaillible permettant de trouver [1] du premier coup les facteurs premiers $a, b, \ldots, l$ qui composent un nombre. On ne peut effectuer la décomposition qu'en tâtonnant, c'est-à-dire en recherchant successivement si le nombre est, ou non, divisible par les nombres premiers de plus en plus grands 2, 3, 5, 7, etc.

24. — Revenons maintenant à la théorie de la division. Pour qu'un nombre n soit divisible par un nombre m, il faut et il suffit que chacun des facteurs premiers de m se trouve parmi les facteurs premiers de n avec un exposant au moins égal. Cette remarque nous permettra de former facilement tous les diviseurs d'un nombre n dès que nous aurons décomposé ce nombre en facteurs premiers.

Soient, d'autre part, *deux* nombres n *et* m décomposés en facteurs premiers. Nous calculerons sans peine leur *plus grand commun diviseur* et leur *plus petit commun multiple*.

Le *plus grand commun diviseur* [2] est le produit obtenu en prenant pour facteurs les facteurs premiers communs aux deux nombres et affectant chacun d'eux du plus faible des deux exposants qu'il a dans les décompositions des deux nombres.

[1] On observera qu'au sujet de la décomposition en facteurs premiers deux problèmes se posent : 1° démontrer qu'il *existe* toujours un produit de facteurs premiers égal à un nombre donné quelconque n, 2° *trouver* effectivement ces facteurs. Il a été question ci-dessus du premier problème. Nous faisons maintenant allusion au second.

[2] Les arithméticiens démontrent, on le sait, que l'on peut obtenir le plus grand commun diviseur de deux nombres en appliquant la règle suivante : On divise le plus grand nombre, a, par le plus petit, b ; si la division se fait exactement, b est le plus grand diviseur cherché ; sinon on divise b par le reste r de la division effectuée ; puis on divise le diviseur r de cette nouvelle division par le reste qu'elle fournit ; et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait une division qui se fasse exactement ; le dernier nombre employé comme diviseur sera le plus grand commun diviseur cherché.

Le *plus petit commun multiple* de m et n est le produit obtenu en prenant pour facteurs tous les facteurs premiers de m et n et affectant chacun d'eux du plus grand des exposants qu'il a dans les décompositions des deux nombres (ou, — s'il ne figure que dans l'une des deux décompositions, — de l'exposant qu'il y a). Le nombre ainsi formé est le plus petit nombre qui soit divisible par m et par n.

On définira semblablement le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de trois nombres ou davantage.

Deux nombres qui n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 sont dits *premiers entre eux*.

25. Congruences. — On se sert souvent, pour étudier les propriétés relatives à la divisibilité des nombres, d'une terminologie spéciale, qui est due à Gauss [1] et que nous allons indiquer.

Supposons que deux nombres différents n et n', étant divisés par un même nombre m, donnent un même reste. Nous dirons que les deux nombres sont *congrus suivant le module m* et nous écrirons :

$$n \equiv n' \pmod{m}.$$

La relation ainsi écrite est appelée *congruence*.

Cette terminologie est avantageuse parce qu'elle permet d'exprimer en termes analogues un grand nombre de faits différents.

Ainsi, pour indiquer que r (nombre inférieur à m) est le reste de la division de n par m, nous écrirons :

$$n \equiv r \pmod{m}.$$

Pour exprimer que n est divisible par m, nous écrirons :

$$n \equiv 0 \pmod{m}.$$

Les congruences jouissent, d'autre part, de propriétés fondamentales dont l'énoncé est facile à saisir : Deux nombres congrus à un troisième, suivant le module m, sont congrus entre eux ; si l'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une congruence, — ou si l'on multiplie ces deux membres par un même nombre, — le résultat est encore une congruence, etc.

[1] *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig, 1801.

Au lieu de constater que certains nombres sont congrus entre eux suivant certains modules, on peut se proposer de déterminer, — s'ils existent, — les nombres inconnus qui peuvent être congrus, suivant un module donné, à des nombres donnés.

Considérons, par exemple, la congruence

$$a \times x \equiv c \pmod{b}$$

où a, b, c, sont trois nombres donnés. Nous ne connaissons pas encore la valeur du nombre x, et nous ignorons même *a priori* s'il existe un nombre entier x tel que le produit $a \times x$ soit congru à c suivant le module b. Si alors nous *trouvons* un nombre x (ou plusieurs) satisfaisant aux conditions requises, nous dirons que nous avons « *résolu la congruence* » et que la valeur trouvée en est une « *solution* » (¹). Si, par contre, il n'existe pas de nombre x qui en soit solution, nous dirons que la congruence est « *impossible* ».

On peut proposer des congruences plus compliquées que la précédente, par exemple une congruence de la forme

$$a \times x^2 + b \times x + c \equiv 0 \pmod{m}$$

ou une congruence de la forme

$$x^n \equiv a \pmod{m},$$

où n est un exposant quelconque et x un nombre inconnu. La résolution de ces congruences (à supposer qu'elles soient possibles) présente souvent de grandes difficultés.

Les congruences ont été étudiées par les plus grands arithméticiens modernes, Euler, Lejeune Dirichlet, Legendre, Gauss.

26. Résolution des équations arithmétiques. — Reprenons la congruence

$$a \times x \equiv c \pmod{b}$$

que nous avons écrite plus haut. Supposons la possible, et considérons la différence des deux nombres $a \times x$ et c. D'après la définition des congruences, cette différence est divisible par b :

(¹) Appelons d le plus grand commun diviseur de a et b. On démontre que si c est divisible par d, le congruence proposée a plusieurs solutions (elle en a d); si c n'est pas divisible par d, la congruence est impossible.

appelons y le quotient. Nous aurons, suivant que $a \times x$ est plus grand ou plus petit que c, l'une des égalités

$$a \times x - c = b \times y \qquad \text{ou} \qquad c = a \times x + b \times y.$$

Ainsi, dans le cas où la congruence admet des solutions, il existe des couples de nombres x et y satisfaisant à l'une des égalités écrites ci-dessus. Réciproquement, s'il existe un couple de nombres x et y satisfaisant à l'une de ces égalités, le nombre x de ce couple est une solution de la congruence indéterminée.

Une égalité telle que

$$a \times x + b \times y = c$$

et, d'une manière générale, toute égalité (équation) qui doit être satisfaite lorsque l'on donne à x et y des valeurs que nous ne connaissons pas encore, est appelée « *équation arithmétique indéterminée* » [1]. *A priori* nous ignorons quelles sont les valeurs de x et y; nous ne savons même pas s'il est possible de trouver deux nombres x et y vérifiant l'égalité donnée. Lorsque de tels nombres existent, ils sont appelés « *solutions de l'équation* ». « Résoudre une équation », c'est en trouver les solutions.

Comme le montre l'exemple que nous venons de donner, l'étude des équations arithmétiques est intimement liée à celle des congruences.

27. — Les arithméticiens ont étudié de nombreuses équations indéterminées [2], et quelques-unes de ces équations sont restées célèbres.

[1] Les mots « équation », « solution », que nous employons ici sont empruntés à l'algèbre. Et en effet l'égalité proposée n'est autre qu'une équation algébrique (voir *Deux. Liv.*). Mais nous ne rechercherons ici que celles des solutions de l'équation qui sont des nombres entiers. L'équation algébrique $a \times x + b \times y = c$, à deux inconnues, n'aurait pas de solutions déterminées (elle pourrait être satisfaite *quel que soit* x pourvu que y ait une valeur convenable) : c'est pourquoi cette équation est appelée, en algèbre comme en arithmétique, « équation indéterminée ».

[2] DIOPHANTE, le grand arithméticien grec, qui vécut probablement au IVe siècle ap. J.-C., étudia de nombreuses équations indéterminées. Il chercha en particulier dans quels cas l'équation $A \times x^2 + B \times y^2 + C = y^2$, ou A, B, C sont trois nombres entiers (ou, plus généralement, rationnels, *vide infra*, § 6) admet pour solutions des nombres x et y entiers (ou

Telle est l'équation de Pythagore

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Cette équation est vérifiée par les valeurs $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ (puisque $9 + 16 = 25$), et elle admet une infinité d'autres solutions qui ont une signification géométrique simple. Si l'on construit, en effet, un triangle rectangle dont les trois côtés aient pour longueurs des nombres entiers, il résulte du fameux théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse (**199**) que les trois longueurs satisfont à l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

Considérons maintenant l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

On savait déjà au XVIIe siècle qu'elle n'a pas de solution, et ce fait fut démontré rigoureusement par Euler.

Fermat alla plus loin [1], et déclara avoir démontré que l'équation

$$x^m + y^m = z^m$$

est, pour $m = 2$, une équation « impossible en nombres différents de zéro ». Mais Fermat se borna à énoncer ce résultat sans donner ses preuves ; et, si l'exactitude de la proposition a pu être établie rigoureusement pour les valeurs de m moindres que 1 000, la solution générale du « problème de Fermat » continue de se dérober aux efforts sans cesse réitérés des mathématiciens du monde entier.

Nous voyons, par ces exemples, que les problèmes qui se rattachent aux équations arithmétiques n'aboutissent bien souvent qu'à la constatation d'une impossibilité. Mais, s'ils nous causent des déceptions, ils nous conduisent aussi parfois à de beaux théorèmes auxquels nous ne nous attendions pas. En voici un, entre bien d'autres, que nous n'aurions certes pas pu prévoir a

plus généralement rationnels). Il en est ainsi : 1° Si A et C sont nuls; 2° Si A est le carré d'un nombre entier (ou rationnel); 3° Si C est le carré d'un nombre entier (ou rationnel). Cf. HEATH, *Diophantus of Alexandrie*, 2e éd. Cambridge, 1910, p. 67 et suiv. — Les mathématiciens hindous (*vide supra*, n° 4 et *infra*, *Deux. Liv.*) ont résolu également diverses équations arithmétiques.

[1] *Observations sur Diophante*, *Œuv. de Fermat*, t. I p. 291.

l'avance [1]. « Tout nombre peut être considéré comme la somme de quatre nombres carrés (o étant compris parmi les nombres) ». Ainsi

$$21 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2, \quad 22 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2,$$
$$23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2, \text{ etc.}$$

28. Problèmes divers. — Parmi les problèmes secondaires, auxquels on ne veut plus accorder aujourd'hui qu'un intérêt de curiosité, il en est cependant qui ont un brillant passé.

Nous avons déjà parlé (**3**) des nombres parfaits et des nombres amis. Ces nombres, et d'autres analogues, auxquels conduit la considération de la somme des diviseurs d'un même nombre, ont provoqué, dès l'antiquité, de nombreuses recherches [2].

On appelle d'ordinaire « *parties aliquotes* » d'un nombre l'ensemble de ses diviseurs (le nombre lui-même excepté, mais l'unité comprise). Un nombre non parfait est, d'après la terminologie pythagoricienne, *abondant* ou *déficiant* suivant que la somme de ses parties aliquotes lui est supérieure ou inférieure. Un nombre abondant égal à la moitié ou au tiers, ou au quart de la somme de ses parties aliquotes, est dit *sous-double*, ou *sous-triple*, ou *sous-quadruple*.

De là, une foule de questions. En 1631, Mersenne [3] propose de trouver un nombre, autre que 120, qui soit sous-double. En 1637, Fermat [4] adresse aux mathématiciens de toute l'Europe un défi en règle, où il demande de trouver un cube qui augmenté de ses parties aliquotes soit un carré, et un carré qui, augmenté de ses parties aliquotes, soit un cube.

Fort anciens également sont les problèmes relatifs aux *carrés magiques*.

On appelle carré magique de n^2 cases un carré où sont disposés (comme sur un damier) n^2 nombres, appelés *éléments* du carré,

[1] Ce théorème énoncé par BACHET dans ses commentaires sur Diophante (*Diophanti arithmeticorum, libri*, IV, *éd. Bachet*, Paris 1621. p. 180) a été démontré rigoureusement, par LAGRANGE (*Nouv. mém. de l'Ac. de Berlin*. année 1770, p. 123) et par EULER (1777).

[2] Cf. dans l'*Encycl. des Sc. math.*, I, 15, le n° 28 rédigé par PAUL TANNERY.

[3] *Œuv. de Descartes*, éd. Adam-Tannery. I, p. 229.

[4] Cf, *Œuv. de Fermat*, t. II, p. 332.

de telle façon que la somme des éléments de chaque ligne, chaque colonne ou diagonale soit toujours la même. — Ainsi le carré

4	9	2
3	5	7
8	1	6

donné par le mathématicien juif *Abraham ben Esra* (1) (mort en 1167) est un carré magique.

Les carrés magiques ont occupé les Chinois (2), les Hindous, les Arabes, et ont été de bonne heure connus en Occident. Au XVIIe siècle, Bachet (3) attira sur eux l'attention des mathématiciens français. Pascal leur consacra un traité (aujourd'hui perdu), et l'excellent arithméticien Frenicle de Bessy en fit une étude approfondie (4).

29. Théorie des nombres premiers. — Il nous reste à signaler le chapitre de la théorie des nombres qui a peut-être donné lieu aux développements les plus remarquables, — le chapitre relatif aux nombres premiers.

Il serait fort utile, — ne fût-ce que pour faciliter la décomposition en facteurs premiers, — de déterminer la suite des nombres premiers et de savoir reconnaître rapidement si un nombre donné est ou n'est pas premier.

On ne connaît malheureusement aucune méthode permettant de résoudre ces problèmes à coup sûr : force nous est de procéder par tâtonnements. Ainsi, nous connaissons les plus petits nombres premiers 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc. Pour avoir les suivants, le procédé le plus rapide est encore celui que préconisait *Eratosthène* de Cyrène (276-194 av. J.-C.) (5). Dans la suite croissante des nombres, on biffe d'abord tous ceux qui sont divisi-

(1) *Encycl. des Sc. math.*, I, 15, p. 63.

(2) On a trouvé un exemple de carré magique dans une table chinoise vieille peut-être de quatre ou cinq mille ans.

(3) *Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, 1612.

(4) Cette étude a été publiée, après la mort de FRENICLE, ap. *Divers Ouvrages de Math. et de Phys. par MM. de l'Acad. R. des sciences*, Paris, 1693.

(5) Ce procédé appelé *crible d'Erathosthène* est rapporté dans l'Εἰσαγωγὴ ἀριθμητική de *Nicomaque de Gérase*, livr. I, chap. XIII.

bles par 2, puis tous ceux qui sont divisibles par 3, et ainsi de suite : tout nombre restant, n'étant divisible par aucun nombre inférieur, est un nombre premier. On peut, par cette méthode, trouver tous les nombres premiers qui sont inférieurs à 1 000, ou à 10000, ou à 100000; mais jamais on n'épuisera la suite des nombres premiers; car cette suite, — comme Euclide le démontrait déjà, — est une suite infinie.

Pour aborder d'une manière plus rationnelle l'étude de la suite des nombres premiers, il convient de rechercher tout d'abord des propriétés qui *caractérisent* ces nombres et permettent de les distinguer des autres. Telles sont les propriétés formulées par deux célèbres théorèmes appelés *théorème de Fermat* et *théorème de Wilson*. Le théorème de Fermat, énoncé [1] sans démonstration par le grand arithméticien, prouvé plus tard et généralisé par *Euler* (1736), se formule ainsi : *Si p est un nombre premier et a un nombre non divisible par p, la différence $a^{p-1} - 1$ est divisible par p*; en d'autres termes, on a :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Le théorème de Wilson, énoncé par Leibniz dans un manuscrit inédit [2], attribué à J. Wilson par *Waring* [3], s'énonce en ces termes : *Si p est un nombre premier, le nombre* $1 \times 2 \times 3 \ldots \times (p-1) + 1$ *est divisible par p; il n'en serait pas ainsi, au contraire si p n'était pas un nombre premier.*

On est parti de ces théorèmes pour s'attaquer aux problèmes suivants : Les nombres premiers étant supposés rangés par ordre de grandeur croissante, quelle est, *en fonction* [4] *de n, l'expression du* $n^{\text{ème}}$ *nombre premier*? Etant donné un nombre N arbitrairement grand, quel est, *en fonction de* N, *le nombre des nombres premiers inférieurs à* N?

L'étude de ces problèmes a entraîné les arithméticiens modernes loin des routes tracées par leurs devanciers. *Gauss* et *Riemann* en particulier, ont reconnu, au début du XIXe siècle, que les « fonctions » définies par l'arithmétique sont étroitement apparen-

[1] Lettre à Frenicle, 1640, *Œuv. de Fermat*, II. p. 209.
[2] Cf. *Encycl. des Sc. math.*. I, 15, p. 11.
[3] *Meditationes algebraicæ*, Cambridge. 3e édit., 1770; préf. p. XLIII.
[4] Sur le sens des mots « en fonction de » *vide infra Deux. Liv.* ch. II.

tées aux fonctions qu'étudient les chapitres les plus nouveaux de l'Analyse. Toutes les parties des mathématiques arrivent ainsi à se rejoindre tôt ou tard.

5. — Fractions

30. — Quelque joie qu'il y puisse trouver, le mathématicien ne saurait s'immobiliser dans la contemplation des nombres cardinaux. En même temps qu'une belle science, en effet, l'arithmétique est une science pratique, tenue de satisfaire aux exigences incessantes de l'industrie humaine. De là vient que chez les plus anciens peuples civilisés l'arithmétique dut s'engager dans des voies secondaires, voie dont l'importance théorique ne fut reconnue qu'à la longue, à l'époque où la géométrie rationnelle commença à se développer ([1]).

L'une des opérations pratiques que l'homme a le plus souvent à accomplir est le partage d'une quantité donnée en un nombre donné de parties égales. Cette opération est une *division*, mais une division qui n'est pas soumise aux mêmes restrictions que celle dont nous avons fait plus haut la théorie. Soit, par exemple, à partager le contenu de 12 bouteilles en n lots égaux (n désignant un nombre quelconque inférieur à 12) : la « division exacte » de 12 par n n'est pas, nous le savons, toujours possible ; et, cependant, quelle que soit la quantité de vin dont nous disposons, nous pouvons toujours diviser ce vin en autant de lots égaux que nous voudrons ; si la division ne se fait pas exactement, les lots ne comprendront pas un nombre exact de bouteilles, mais on pourra toujours les constituer en ouvrant une ou plusieurs bouteilles et en partageant le contenu. C'est ainsi que si nous regardons le contenu d'une bouteille comme constituant « l'unité de quantité de vin », nous pouvons être amenés à calculer, non pas seulement sur des unités entières, mais sur des fractions d'unité, c'est-à-dire sur des quantités plus petites que l'unité.

([1]) Voir le chap. II, La théorie des proportions géométriques, en particulier (*vide infra*, n°s 96 suiv.) imposait aux mathématiciens grecs l'étude systématique des fractions.

Les calculs relatifs aux fractions d'unité reposent sur le principe suivant, qui est universellement admis : tout objet peut être divisé en autant de parties égales que l'on veut, et, par conséquent, *quel que soit le nombre cardinal m, il est possible de diviser l'unité en m parties égales*. Chacune de ces parties est une $m^{\text{ème}}$ *partie de l'unité*; nous l'appelons *fraction* (*de numérateur* 1), et nous convenons d'écrire :

$$m^{\text{ème}} \text{ partie de l'unité} = (\textit{égale})\ \frac{1}{m}.$$

Soit maintenant M un nombre cardinal inférieur à m. Supposons que, parmi les m $m^{\text{èmes}}$ parties de l'unité, nous en prenions M : nous isolerons ainsi une collection de M $m^{\text{èmes}}$ *parties de l'unité*; cette collection sera appelée « fraction », et nous conviendrons d'écrire :

$$\text{M } m^{\text{èmes}} \text{ parties de l'unité} = \frac{M}{m}.$$

Supposons enfin que nous disposions de plusieurs objets indiscernables ou unités, et que nous divisions chacun d'eux en m parties égales. Nous obtenons ainsi une collection de parties toutes égales entre elles. Isolons M de ces parties (M *pouvant être cette fois supérieur à m*) : nous aurons encore une « fraction » [1] que nous représenterons par le symbole $\frac{M}{m}$; M et m sont appelés *termes* de la fraction ; M est le *numérateur* et m le *dénominateur* de la fraction.

Une fraction est égale à un nombre cardinal lorsque son numérateur est divisible par son dénominateur. C'est le cas de toutes les fractions de dénominateur 1, et des fractions telles que $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$, etc. En effectuant la division, on « réduit » la fraction au nombre cardinal égal. Pour les opposer à l'ensemble des fractions, on appelle

[1] Cette extension donnée au sens du mot « fraction », un peu choquante au point de vue philologique, est justifiée par ce fait que les quantités que nous convenons d'appeler « fractions », jouissent de propriétés semblables que leur numérateur soit ou non égal à 1. Les Egyptiens (*vide* 31) et les peuples primitifs ne connaissaient cependant que les fractions de numérateur 1.

d'ordinaire les nombres cardinaux (et les fractions à eux réductibles) : *nombres entiers*.

31. — **Est-il possible d'effectuer sur les fractions les six opérations fondamentales définies au § 2?**

Oui, évidemment, pourvu que nous donnions des règles non ambiguës permettant de déduire de deux ou plusieurs fractions données certaines fractions nouvelles appelées *somme*, *produit*, *quotient*... des fractions proposées. Mais, nous venons de voir qu'il y a des fractions qui sont des nombres cardinaux (nombres entiers). Les règles des opérations effectuées sur les fractions devront donc être telles qu'appliquées aux nombres cardinaux (*plus exactement* : aux fractions égales à des nombres cardinaux) elles se confondent avec les règles propres à ces derniers nombres (règles du § 2).

Le calcul des fractions remonte à une haute antiquité ([1]), car il est formulé avec une assez grande précision, — du moins en ce qui concerne les fractions de numérateur 1, — dans le traité de l'égyptien Ahmes (*vide* n° 1) ; il se développa en Grèce et aux Indes (5ᵉ, 6ᵉ siècle, ap. J.-C.) ; puis par l'intermédiaire des Arabes, qui le recueillirent de diverses sources, il fut transmis aux peuples occidentaux. Le premier exposé rigoureux et complet du calcul des fractions (appelées à cette époque : *nombres rompus* ([2]), *numeri rupti*) se trouve dans l'*Arithmétique* de Stevin (1585).

32. Règles fondamentales du calcul des fractions. — Les calculs relatifs aux fractions se font par application des principes suivants, conséquences directes des définitions, et dont on trouvera la démonstration dans tous les traités d'arithmétique.

Principe A. — Dans le cas où le numérateur d'une fraction est divisible par le dénominateur, la fraction est égale au quotient.

Principe B. — On ne change pas la valeur d'une fraction lorsqu'on multiplie ses deux termes par un même nombre.

Principe C. — Si les deux termes d'une fraction sont divisibles par un même nombre, on ne change pas la valeur de la fraction

([1]) Les systèmes de mesures adoptés en Chaldée reposent sur la division de l'unité en 60 parties égales : il est donc probable que les Chaldéens savaient effectuer des calculs sur les fractions de dénominateur 60.

([2]) Ou *nombres routs* (cf. *Le Triparty* de Chuquet, *Vide*, p. 11, note 1).

lorsqu'on divise ses termes par ce nombre. — Effectuer une telle opération sera, par définition *simplifier* ou *réduire la fraction*. On dit qu'une fraction est *irréductible* lorsqu'elle ne peut pas être réduite.

Les deux termes d'une fraction irréductible sont nécessairement des nombres premiers entre eux. En effet, si ces nombres n'étaient pas premiers entre eux, ils auraient un facteur premier commun (**23**) par lequel on pourrait diviser les deux termes de la fraction. Toute fraction peut évidemment être réduite en fraction irréductible.

Principe D. — Etant donné plusieurs fractions on peut toujours les *réduire au même dénominateur*, c'est-à-dire les remplacer par des fractions égales qui aient toutes le même dénominateur.

En effet, soient $\frac{M}{m}$, $\frac{N}{n}$ deux fractions quelconques. La première est égale à la fraction $\frac{M \times n}{m \times n}$, la seconde à la fraction $\frac{N \times m}{m \times n}$. Les deux fractions $\frac{M \times n}{m \times n}$ et $\frac{N \times m}{m \times n}$ satisfont donc aux conditions requises; d'ailleurs il est possible que ces deux fractions puissent être réduites à deux autres, plus simples, ayant également même dénominateur [1]. Soient données, maintenant, trois fractions $\frac{L}{l}$, $\frac{M}{m}$, $\frac{N}{n}$: nous pouvons les remplacer par les fractions égales :

$$\frac{L \times m \times n}{l \times m \times n}, \quad \frac{M \times l \times n}{l \times m \times n}, \quad \frac{N \times l \times m}{l \times m \times n}.$$

Et de même pour un nombre quelconque de fractions.

Cela posé, rappelons les règles bien connues qui définissent les opérations relatives aux fractions.

33. Addition et soustraction. — Considérons d'abord deux fractions $\frac{M}{m}$ et $\frac{N}{m}$ de même dénominateur. La *somme*, résultat de l'addition de ces deux fractions, est, par définition, *une fraction qui a pour dénominateur le dénominateur commun et pour numéra-*

[1] D'une manière générale, on peut toujours réduire plusieurs fractions quelconques à un même dénominateur, qui est le plus *petit commun multiple* des dénominateurs de ces fractions.

teur la somme des deux numérateurs. [M $m^{\text{èmes}}$ parties de l'unité + N $m^{\text{èmes}}$ parties = (M + N) $m^{\text{èmes}}$ parties].

Si l'on considère, d'autre part, deux fractions de dénominateurs différents, on les additionnera en les réduisant d'abord au même dénominateur, et appliquant ensuite la règle énoncée ci-dessus. Par exemple :

$$\frac{M}{m} + \frac{N}{n} = \frac{M \times n}{m \times n} + \frac{N \times m}{m \times n} = \frac{(M \times n) + (N \times m)}{m \times n}.$$

L'addition ainsi définie satisfait bien à la condition que nous avons requise au n° **31**.

Soit maintenant donné un nombre quelconque de fractions dont chacune sera, pour simplifier, représentée par une seule lettre a ou b ou c. Ayant défini la somme $(a + b)$, nous pourrons définir, de la même manière qu'au § *2*, la somme (ou l'addition) d'un nombre quelconque d'éléments $a, b, c, \ldots$ L'addition sera toujours une opération *univoque*, *commutative* et *associative* (*vide* n° **5**).

La règle de la soustraction est analogue à celle de l'addition : *Pour soustraire une fraction* $\frac{N}{n}$ *d'une fraction* $\frac{M}{m}$ *on réduit les deux fractions au même dénominateur ; puis on forme la fraction qui a pour dénominateur le dénominateur commun et pour numérateur la différence des numérateurs.* On obtient ainsi la *différence* :

$$\frac{(M \times n) - (N \times m)}{m \times n}.$$

L'opération n'est possible, bien entendu, que si, des deux fractions réduites au même dénominateur, c'est la fraction retranchée qui a le plus petit numérateur.

34. Multiplication et division. — L'origine de la notion de fraction justifie immédiatement les règles suivantes qui satisfont à la condition requise plus haut :

Le produit (résultat de la multiplication) *d'une fraction* $\frac{M}{m}$ *par un nombre entier a est la fraction* $\frac{M \times a}{m}$ *qui a pour dénominateur le dénominateur m et pour numérateur le produit par a du numérateur* M.

Le quotient (résultat de la division) *d'une fraction* $\frac{M}{m}$ *par un nombre entier a est la fraction* $\frac{M}{m \times a}$ *qui a pour numérateur le numérateur* M *et pour dénominateur le produit par a du dénominateur m.* [Pour diviser, par exemple, $\frac{2}{5}$ par 3, il suffit de diviser en 3 parties égales chaque 5me partie de l'unité et de prendre 2 des (5 × 3) parties de l'unité ainsi obtenues.]

Remarque. — Le quotient d'une fraction $\frac{M}{m}$ par un nombre entier a est égal au produit de $\frac{M}{m}$ par la fraction $\frac{1}{a}$.

Le produit d'une fraction $\frac{M}{m}$ *par une fraction* $\frac{N}{n}$ *est une fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs* M, N, *et pour dénominateur le produit des dénominateurs m, n* :

$$\frac{M}{m} \times \frac{N}{n} = \frac{M \times N}{m \times n}.$$

La *division* se définit dans le cas général comme opération inverse de la multiplication. Le quotient (résultat de la division) de la fraction dividende $\frac{M}{m}$ par la fraction diviseur $\frac{N}{n}$ — appelé aussi *rapport* des deux fractions — sera la fraction qui, multipliée par $\frac{N}{n}$, donne $\frac{M}{m}$; cette fraction est $\frac{n \times M}{N \times m}$; on écrira donc

$$\frac{M}{m} : \frac{N}{n} = \frac{n \times M}{N \times m},$$

et l'on pourra énoncer la règle suivante : *Pour diviser deux fractions l'une par l'autre on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Suivant les conventions du n° **8**, le quotient de la division de a par b peut être noté $\frac{a}{b}$ au lieu de $a : b$. Cette notation est naturelle puisque le quotient est une fraction. Le même mode de notation pourra encore être employé lorsque le dividende et le diviseur sont des fractions. On écrira :

$$\frac{\frac{M}{m}}{\frac{N}{n}} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{M}{m} : \frac{N}{n}.$$

D'après la règle qui précède, toute division de fraction se ramène à une multiplication. La division d'une fraction est donc, comme la multiplication, une opération univoque et toujours possible. Nous n'avons pas à distinguer, dans la théorie des fractions, entre une division exacte et une division approchée, comme nous l'avons fait pour les nombres entiers : le quotient d'une fraction par une autre est toujours un *quotient exact*.

Considérons, en particulier, la division de 1 par la fraction $\frac{M}{m}$. Le *quotient* est la fraction retournée $\frac{m}{M}$: on l'appelle *inverse de la fraction* $\frac{M}{m}$. D'après cette définition l'*inverse* d'un nombre entier m est la fraction $\frac{1}{m}$ de numérateur 1.

35. — Nous n'avons envisagé ci-dessus que la multiplication de *deux* fractions. Soit maintenant donné un nombre quelconque de fractions dont chacune sera, pour simplifier, représentée par une seule lettre a, ou b, ou c, ... Ayant défini le produit $(a \times b)$ nous pourrons définir, de la même manière qu'au § 2, le produit ou la multiplication) d'un nombre quelconque d'éléments, a, b, c, ... La multiplication sera toujours une opération *commutative*, *associative* et *distributive* (*vide supra*, n° **7**).

36. Elévation aux puissances. — Nous ne définirons, pour l'instant, que l'élévation d'une fraction (quelconque) à une puissance *entière*.

Soit p un exposant entier. L'élévation à la puissance p n'étant qu'une combinaison de multiplications (n° **9**) nous pouvons déduire du n° **34** la règle suivante : *la puissance* $p^{ième}$ *de la fraction* $\frac{M}{m}$ *est la fraction* $\frac{M^p}{m^p}$: nous écrirons donc

$$\left(\frac{M}{m}\right)^p = \frac{M^p}{m^p}.$$

On vérifie sans peine que les puissances des fractions jouissent des propriétés distributives et associatives énoncées au n° **9**.

37. Extraction des racines. — L'extraction des racines est l'opération inverse de l'élévation aux puissances (*vide supra*, n° **10**).

D'où la règle : *La racine* $p^{ième}$ *ou racine d'ordre p de la fraction* $\frac{M}{m}$ *est la fraction* $\frac{\sqrt[p]{M}}{\sqrt[p]{m}}$; on peut donc écrire

$$\sqrt[p]{\frac{M}{m}} = \frac{\sqrt[p]{M}}{\sqrt[p]{m}}.$$

L'extraction (exacte) de la racine $p^{ième}$ d'une fraction $\frac{M}{m}$ est-elle une opération toujours possible ? Pour qu'il en fût ainsi il faudrait qu'il existât toujours une fraction dont la puissance $p^{ième}$ fût égale à $\frac{M}{m}$. Or un exemple très simple va montrer que cela n'est pas.

Je dis qu'*il n'existe pas de fraction dont le carré soit égal à* 2 (d'où il résulte que l'extraction exacte de la racine carrée de 2 est une opération impossible). Supposons en effet qu'il existe une fraction $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{a^2}{b^2} = 2$. J'ai le droit de supposer (n° **32**) que l'on a réduit la fraction à une fraction irréductible, en sorte que a et b sont premiers entre eux (n° **24**). J'ai, par hypothèse, $a^2 = 2b^2$; donc a^2, et par suite a, est un nombre pair [1] ; et, puisque a et b sont premiers entre eux, b doit être un nombre impair. Mais appelons a' le nombre $\frac{a}{2}$ (ce nombre est entier puisque a est pair) : j'ai $a^2 = 2^2 \times a'^2 = 4.a'^2$, et, par conséquent $2.a'^2 = b^2$; donc b^2 est pair, ce qui exige que b soit pair (note 1). Ainsi, en admettant qu'il existe une fraction $\frac{a}{b}$ égale à $\sqrt{2}$ nous aboutissons à cette conclusion que le nombre b est à la fois impair et pair. Conclusion absurde qui nous oblige à rejeter notre hypothèse.

La démonstration qui précède est donnée par *Euclide* au livre X de ses *Eléments*, et s'il faut en croire Aristote [2], elle aurait déjà été connue de Pythagore. Elle nous apprend qu'en général les

[1] Le carré d'un nombre impair est nécessairement un nombre impair ; en effet, la décomposition de ce carré en facteurs premiers ne peut (pas plus que le nombre lui-même) contenir le facteur 2. Donc si a^2 est pair, a l'est aussi.

[2] Cf. CANTOR, *Vorlesungen*, I, p. 170.

racines des fractions les plus simples ne sont pas, elles-mêmes, des fractions.

6. — *Nombres rationnels. Inégalités.*

38. Nombres fractionnaires. Nombres rationnels. — Le calcul des fractions a été créé, nous l'avons dit, pour répondre aux besoins de la vie pratique et de la géométrie. Cependant, le développement même de l'arithmétique théorique devait nous conduire à ce calcul et nous inciter à le considérer, non pas simplement comme une annexe, mais comme une partie intégrante de de la science des nombres.

Les problèmes d'arithmétique que nous avons étudiés jusqu'ici se résolvent tous, remarquons-le, de la même manière : en effectuant sur des nombres proposés certaines opérations donnant comme *résultats* de nouveaux nombres. Ainsi, le monde des nombres est essentiellement, pour nous, une classe d'éléments abstraits, sur lesquels nous ne supposons rien, sinon qu'ils se prêtent à certaines opérations bien définies : nous savons qu'en combinant les éléments de cette classe suivant des règles arrêtées une fois pour toutes, nous obtiendrons, toujours et exclusivement, des éléments appartenant à la même classe.

Or, cette condition, qui équivaut pour nous à la définition du nombre, les fractions y satisfont comme les nombres cardinaux. En effet, nous savons effectuer sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres cardinaux, et, comme résultats des opérations effectuées, nous obtenons toujours des fractions. C'est pourquoi nous sommes tout naturellement amenés à assimiler les fractions à des nombres ; nous conviendrons de les appeler : *nombres fractionnaires*.

Mais nous savons que la classe des fractions comprend comme éléments particuliers l'ensemble des nombres entiers. Nous préciserons donc notre langage en convenant de réserver le nom de *nombre fractionnaire* aux fractions qui ne sont pas réductibles à des nombres entiers, et appelant, d'une manière générale, « *nombre rationnel* » un nombre entier ou fractionnaire quelconque ; nous

disons alors que *la classe des nombres rationnels comprend comme sous-classes la classe des nombres entiers et la classe des nombres fractionnaires.*

Voilà donc que d'un trait de plume nous avons considérablement accru le domaine de la science des nombres. La belle harmonie de ce domaine n'y perdra rien, car nous pouvons étendre à la classe des nombres rationnels beaucoup de propriétés — les plus importantes, peut-être — des nombres entiers. Ainsi la définition d'une *médiété* (n° **20**), d'une *progression arithmétique* ou *géométrique* (nos **15** et **21**), l'*expression de la somme des n premiers termes d'une telle progression* [1] peuvent être transportées, sans modification aucune, du monde des nombres entiers au monde des nombres rationnels.

39. Nombres croissants ou décroissants. — De deux nombres entiers quelconques l'un est toujours plus petit que l'autre. Pour exprimer que le nombre a est *plus petit* que le nombre b, nous écrivons

$$a < b;$$

ainsi

$$2 < 3;$$

pour exprimer que a est *plus grand* que b, nous écrivons

$$a > b:$$

ainsi

$$5 > 4.$$

Considérons maintenant deux fractions quelconques, $\frac{M}{m}$, $\frac{N}{n}$. Il résulte de la définition de la soustraction qu'une seule de ces deux fractions peut être retranchée de l'autre; ce sera la première si $N \times m$ est plus grand que $M \times n$, la seconde si

[1] La formule du n° 21 donnant la somme des n premiers termes d'une progression géométrique, n'est toutefois valable que si la raison b est supérieure à 1. Si $b < 1$, cette formule doit être, ainsi que le montre un calcul facile, remplacée par la suivante : $a_1 \times \frac{1 - b^n}{1 - b}$ (*vide infra*, p. 154).

$N \times m$ est plus petit que $M \times n$; dans le premier cas, nous dirons que $\frac{M}{m}$ est *plus petit que* (ou *inférieur à*) $\frac{N}{n}$, et nous écrirons

$$\frac{M}{m} < \frac{N}{n}; \qquad \frac{N}{n} > \frac{M}{m};$$

dans le second cas, nous dirons que $\frac{M}{m}$ est *plus grand que* (*supérieur à*) $\frac{N}{n}$, et nous écrirons

$$\frac{M}{m} > \frac{N}{n}; \qquad \frac{N}{n} < \frac{M}{m}.$$

Ainsi, *de deux nombres rationnels (entiers ou fractionnaires) quelconques, nous saurons toujours dire lequel est le plus grand, lequel est le plus petit.*

J'ajoute que si [1] a et b sont deux nombres rationnels quelconques, et si $a < b$, tous les nombres inférieurs à a sont, *a fortiori*, inférieurs à b; tous les nombres supérieurs à b sont, *a fortiori*, supérieurs à a.

Soit maintenant une collection quelconque de nombres $a, b, \ldots, l$. Nous pouvons, toujours, d'après ce qui précède, ranger ces nombres à côté les uns des autres, de manière à former une suite

$$a, b, \ldots, l$$

jouissant des propriétés suivantes : tout nombre de la suite est supérieur aux nombres situés à sa gauche et inférieur aux nombres situés à sa droite. Une telle suite $a, b, \ldots, l$ est dite *suite de nombres croissants* (ou *suite croissante de nombres*). La suite inverse $l, \ldots, b, a$ est une suite de *nombres décroissants*.

Une suite de nombres rationnels croissants est analogue, on le voit, à la suite des nombres cardinaux (voir n° **12**), mais au lieu que deux nombres de cette dernière suite diffèrent d'une unité au moins, les éléments d'une suite de nombres rationnels peuvent être très rapprochés et ne différer que d'une très petite fraction d'unité (*vide infra*, n° **42**).

[1] Je représente chaque nombre rationnel par une lettre unique comme je l'ai déjà fait au § 5.

40. Inégalités. — On appelle *inégalité* la formule qui exprime qu'un nombre est supérieur ou inférieur à un autre nombre. Ainsi les formules

$$4 > 3, \qquad \frac{4}{3} + 1 < \frac{1}{2} + 2,$$

sont des inégalités auxquelles satisfont respectivement les nombres 4 et 3 et les nombres $\frac{4}{3} + 1$, $\frac{1}{2} + 2$. La direction du signe $>$ ou $<$ indique le *sens* de l'inégalité. Les nombres ou expressions qui figurent de part et d'autre du signe $>$ ou $<$ sont les deux « *membres* » de l'inégalité [1].

Lorsque deux nombres satisfont à une inégalité, les résultats d'une même opération, effectuée séparément sur l'un et l'autre de ces nombres, satisfont parallèlement à une inégalité correspondante. On dit que cette inégalité est une *transformation* de l'inégalité proposée. Accomplir cette transformation, c'est « effectuer une opération » sur l'inégalité proposée.

Les règles auxquelles obéit la transformation des inégalités se déduisent immédiatement des règles relatives aux opérations fondamentales.

Soit donnée l'inégalité $a < b$ et soit c un nombre quelconque. Il est facile de voir que l'*inégalité* $a < b$ *entraîne les inégalités suivantes* :

$$a + c < b + c, \qquad a \times c < b \times c, \qquad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Si a *est un nombre supérieur à* 1, *son inverse* $\frac{1}{a}$ *est inférieur à* 1. *Si* $a < 1$, *on a* $\frac{1}{a} > 1$.

Si a *est un nombre très grand* [2], $\frac{1}{a}$ *est un nombre très petit ; si* a *est très petit*, $\frac{1}{a}$ *est très grand.*

[1] On combine souvent les signes $>$ ou $<$ avec le signe $=$ écrivant $\geqslant$ pour signifier *plus grand ou égal* et $\leqslant$ pour signifier *plus petit ou égal.*

[2] Toutes ces propositions sont des conséquences directes de la définition des fractions. Ainsi si l'on divise l'unité en un très grand nombre de parties, chaque partie ou fraction est très petite, etc.

Soit, d'autre part, p un entier quelconque : si [1] $a > 1$, on a $a^p > 1$; si $a < 1$, on a $a^p < 1$; si $a < b$, on a [2] $a^p < b^p$; on en déduit que si $a < b$ on a $\sqrt[p]{a} < \sqrt[p]{b}$.

Lorsque le nombre p est très grand, la puissance a^p *est un nombre très grand si* $a > 1$, *un nombre très petit si* $a < 1$: et plus p devient grand, plus a^p devient grand ou petit [3].

41. Division par zéro. — Soit m un nombre rationnel très petit. Le quotient par m d'un nombre quelconque a est égal au produit de a par l'inverse $\frac{1}{m}$ du nombre m, et cet inverse est un nombre très grand lorsque m est très petit. J'en conclus que, pour un même nombre a, *plus m est petit, plus le quotient* $\frac{a}{m}$ *est grand.* Si m devenait nul, le quotient $\frac{a}{m}$ n'existerait plus, et, en effet, *ce quotient devrait être un nombre plus grand que tous les nombres.* On convient de dire, pour rappeler ce fait, que « *la division d'un nombre quelconque a par* 0 *donne pour quotient un nombre infini* » et l'on écrit symboliquement $\frac{a}{0} = \infty$, le signe ∞ signifiant *nombre infini.*

Que l'on ajoute un nombre quelconque à ce quotient, ou qu'on le multiplie par un nombre quelconque, le résultat sera toujours un nombre infini, car, comme le disait l'arithméticien hindou Bhaskara [4], « à la quantité appelée quotient par zéro, ni addition, ni soustraction quelque grande qu'elle soit ne peut faire éprouver perte ou accroissement, pas plus qu'au temps sans fin et sans déclin des séries d'existence ».

[1] Un produit de facteurs plus grands que 1, est, en effet, supérieur à 1 ; un produit de facteurs plus petits que 1 est inférieur à 1.

[2] Appelons c le rapport $\frac{b}{a}$ qui est plus grand que 1 ; b^p est égal à $c^p \times a^p$, où $c^p > 1$; donc $b^p > a^p$.

[3] En faisant le produit des facteurs (égaux) de plus en plus nombreux et tous supérieurs à 1 on obtient un nombre de plus en plus grand ; si les facteurs sont inférieurs à 1, le nombre est de plus en plus petit.

[4] Cf. Rodet, *Journal asiatique*, t. XI, p. 30.

7. — *L'écriture arithmétique et la numération*

42. Nous avons défini certaines opérations fondamentales, c'est-à-dire certaines règles conformément auxquelles on peut, de plusieurs nombres proposés, déduire un nouveau nombre. Mais comment, par quels artifices, faudra-t-il procéder pour réaliser pratiquement le passage des nombres donnés au nombre cherché ? Question secondaire pour l'ami désintéressé des nombres, mais capitale pour le calculateur et dont dépend, par conséquent, le progrès de l'Arithmétique.

Pour calculer aisément et rapidement, nous nous servons de l'écriture : nous devons donc, avant tout, déterminer un système de symboles simples (cf. **3**) qui permette de figurer sur le papier un nombre donné quelconque; nous devons adopter une écriture (*notation*) arithmétique, *un système de numération*.

Au cours des siècles passés, les hommes ont imaginé bien des manières de figurer les nombres. Les Egyptiens représentaient les premiers nombres au moyen de traits juxtaposés ([1]), les Grecs employaient les lettres de l'alphabet ([2]), les Chaldéens, les Chinois, les Hindous se servaient de signes spéciaux. Mais les symboles adoptés sont nécessairement en nombre limité. Il faut donc imaginer certaines conventions qui permettent de représenter tous les nombres avec les mêmes signes, répétés ou juxtaposés de manières différentes ([3]).

Ainsi les Romains représentèrent tous les nombres à l'aide des quatre signes I (*un*), X (*dix*), C (*cent*), M (*mille*) auxquels ils adjoignirent plus tard les signes V (*cinq*), L (*cinquante*), D (*cinq*

([1]) Cf. la tradition pythagoricienne, voir n° 3.

([2]) La numération des Grecs faisait usage de 27 lettres (les 24 lettres de l'alphabet grec, plus 3 lettres orientales). Neuf de ces lettres représentaient les 9 premiers nombres ; neuf autres représentaient les 9 premières dizaines, et neuf les 9 premières centaines.

([3]) Quant aux signes $+$, $-$, $\times$, etc., qui tiennent la place des mots *plus*, *moins*, *multiplié par*, etc., ils ne sont pas indispensables et l'usage ne s'en généralisa que lorsque le calcul algébrique fut institué.

cents) ainsi que des barres verticales ou horizontales disposées de diverses manières ([1]).

Notre écriture actuelle, qui est d'origine orientale, est caractérisée par cette propriété que les unités des différents « ordres » (voir ci-dessous) y sont figurées par les mêmes symboles (*chiffres*) ([2]), la valeur de ces chiffres étant déterminée par la position qu'ils occupent dans le nombre écrit. C'est pourquoi l'on dit que notre numération (notre système d'écriture arithmétique) est fondée sur le *principe de position* : c'est une *numération de position*.

43. — Les différents *ordres d'unités* seront définis de la manière suivante. Considérons une collection de dix unités; j'appellerai cette collection une *dizaine*; pareillement j'appellerai *centaine* une collection de cent unités, *mille* une collection de mille unités, et ainsi de suite. Cela fait, soit proposé un nombre quelconque inférieur à 10 000, par exemple; je puis le regarder comme la somme de A *mille, plus* B *centaines, plus* C *dizaines, plus* D *unités, chacun des nombres* A, B, C, D, *étant inférieur ou égal à* 9. Je pourrai donc représenter le nombre proposé par la combinaison de signes : ABCD. Le dernier chiffre à droite représentera un nombre d'unités simples, le précédent un nombre de dizaines, etc.

Si le nombre donné (que l'on suppose décomposé en unités simples, dizaines, centaines, etc.) ne contient pas de dizaines, on devra, en écrivant ce nombre, laisser en blanc la seconde place à droite (afin que les divers chiffres du nombre conservent leurs positions respectives). On peut aussi (et c'est cette solution que l'on a adoptée pour plus de clarté) remplacer les chiffres manquants par le signe 0 (*zéro*) signifiant « *rien* » ([3]). De là vient que les Hindous appelaient le zéro : « espace vide ».

([1]) Pour figurer 10 000, par exemple, on écrivait $\bar{X}$; pour figurer $10 \times 100\,000$ on écrivait $|\bar{X}|$. Primitivement, l'*ordre* des symboles n'intervenait pas dans la numération romaine; mais plus tard on en tint compte et l'on distingua par exemple, entre la combinaison MX qui veut dire *mille dix* et la combinaison XM qui signifia *dix-mille*. La numération romaine paraît avoir été empruntée en grande partie aux Etrusques.

([2]) Le mot *chiffre* (qui paraît être d'origine arabe) signifiait primitivement *zéro*. Cette circonstance rappelle l'importance du rôle que joue le chiffre 0 dans notre numération.

([3]) Le signe 0, n'est peut-être que la première lettre du mot grec οὐδέν (rien).

Ainsi, au moyen de neuf chiffres et du zéro nous pourrons, sans aucun signe accessoire, représenter tous les nombres. Nous n'aurons qu'à appliquer les deux règles suivantes :

1° *Le dernier chiffre à droite d'un nombre représente des unités simples* ; 2° *Tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus grandes* (c'est pourquoi notre numération est dite : *décimale*).

De notre *numération écrite* dérivent notre manière d'énoncer les nombres (*numération parlée*) et les règles pratiques suivant lesquelles nous calculons (règles de l'addition, de la multiplication [1], etc.). Ces règles sont trop connues pour que nous ayons à les rappeler ici.

La numération de position est nettement formulée dans l'Arithmétique du savant hindou *Aryabhata* (ve siècle apr. J.-C.) [sauf en ce qui concerne le rôle du zéro, qui n'apparaît qu'ultérieurement, et que les Hindous ont peut-être emprunté aux Grecs]. L'usage s'en répandit chez les Arabes, puis chez les moines de l'Occident (vers le xe siècle). Au xive siècle la numération décimale était couramment employée et la figure des chiffres était fixée d'une manière presque définitive.

44. — Il importe de remarquer que le principe de position, sur lequel est fondée la numération décimale, permet de définir, tout aussi simplement, une infinité de systèmes de numération. Donnons-nous, par exemple, trois chiffres ou signes 0, $\bar{1}$, $\bar{2}$, puis faisons les conventions suivantes : Nous appellerons *unités du premier ordre*, et représenterons par $\bar{1}$, $\bar{2}$ les deux premiers nombres (1, 2). Le troisième nombre (3) sera l'unité du second ordre : nous l'écrirons $\bar{1}0$. Les quatrième et cinquième nombres (4, 5) s'écriront :

Une unité du 2e ordre plus une unité du 1er ordre $= \bar{1}\,\bar{1}$;
» » » deux » » $= \bar{1}\,\bar{2}$.

[1] A ces règles s'ajoutent certaines règles secondaires permettant, par exemple, de reconnaître rapidement si un nombre donné est divisible par 3, 5, 11, etc; — ou permettant de vérifier simplement le résultat d'une opération (*preuve par* 9, etc.). Ces règles sont formulées dans tous les traités d'arithmétique.

Le sixième nombre sera l'unité du troisième ordre : $\bar{1}00$; et ainsi de suite. Avec ces conventions tous les nombres seront représentés au moyen des trois signes $\bar{1}$, $\bar{2}$, 0. Nous aurons un *système de numération de base* 3. — De la même manière, on pourra définir un *système de numération de base n* (*n* étant un nombre quelconque), système employant, outre le zéro, *n* — 1 chiffres distincts —. Le système décimal ou système de base 10 a seul été mis en pratique. Cependant les Chaldéens paraissent avoir quelquefois employé un système de base 60 (*numération sexagésimale*).

La définition générale des systèmes de numération à base quelconque a été donnée par Pascal, en 1654, dans le traité *De numeris multiplicibus* (édité pour la première fois en 1665; *Œuv. de Pascal*, III). Une théorie plus complète de ces systèmes fut exposée par le jésuite espagnol *Caramuel y Lobkovitz* dans la *Mathesis biceps vetus et nova* (1670).

45. Nombres décimaux. — L'emploi de la numération décimale simplifie, avons-nous dit, tous les calculs relatifs aux nombres entiers. N'est-il point possible de tirer parti du principe de position pour obtenir de nouvelles simplifications dans les calculs relatifs aux nombres fractionnaires?

C'est dans ce but que fut imaginée la théorie des nombres décimaux, théorie dont Viète paraît avoir eu la première idée ([1]) et qui fut exposée systématiquement par Simon Stevin (*Pratique d'Arithmétique*, 1585; Stevin consacre au calcul des nombres décimaux un chapitre spécial intitulé *La Disme* ([2])). Rappelons brièvement la définition et les principales propriétés de ces nombres.

On appelle *fraction décimale* une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. On adopte, pour représenter les fractions décimales, une écriture particulière dans laquelle on introduit le signe , (virgule).

Comme toute fraction, une fraction décimale est toujours la somme d'un nombre entier (qui peut être 0) et d'une fraction plus petite que 1 : le nombre entier, est appelé *partie entière* de la

([1]) Dans le *Canon mathematicus seu ad triangula*, Paris 1579 (cf. 147).
([2]) *La Disme enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompus tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.*

fraction donnée; la fraction inférieure à 1 (qui est décimale) est la *partie décimale* (ou *mantisse*). Soit, par exemple, la partie entière égale à a et la partie décimale égale à $\frac{b}{10}$ (b étant inférieur à 10). La fraction $\frac{b}{10}$ vaut b *dixièmes d'unité*. Nous conviendrons alors d'écrire :

$$\frac{b}{10} = 0{,}b\,; \qquad \text{et} \qquad a + \frac{b}{10} = a{,}b$$

en regardant le premier chiffre à droite de la virgule comme représentant un nombre de dixièmes d'unités. Soit pareillement la partie décimale égale à $\frac{b}{1\,000}$, b étant un nombre de trois chiffres ; nous écrirons encore :

$$a + \frac{b}{1\,000} = a{,}b \qquad \left(\text{par exemple } \frac{2756}{1\,000} = 2{,}756\right),$$

en regardant le troisième chiffre à droite de la virgule comme représentant des *millièmes d'unités* ; le second chiffre à droite de la virgule représente alors des dizaines de millièmes (c'est-à-dire des *centièmes*) ; le premier chiffre représente des centaines de millièmes (ou dixièmes). Si le nombre b n'avait que deux chiffres, il n'y aurait pas de centaines de millièmes dans $\frac{b}{1\,000}$, j'écrirais comme premier chiffre à droite de la virgule le chiffre 0; si le nombre b n'avait qu'un chiffre, j'écrirais comme deux premiers chiffres à droite de la virgule les chiffres 00.

Nous sommes ainsi conduits à adopter les règles suivantes pour figurer les fractions décimales, qui, sous leur nouvelle forme, seront appelées *nombres décimaux* :

1° *Le chiffre placé immédiatement à gauche de la virgule représente des unités simples. Tout chiffre placé à la droite d'un autre chiffre représente des unités dix fois plus petites* ;

2° *S'il n'y a pas d'unités d'un certain ordre, on en marque la place par un zéro, pour que les autres chiffres conservent leurs positions respectives.*

Il résulte de ces règles qu'on ne change pas la valeur d'une fraction décimale lorsqu'on place à la droite de la partie décimale autant de zéros que l'on veut.

Les chiffres de la partie décimale s'appellent *décimales* du nombre décimal.

La représentation des fractions décimales par des nombres décimaux est extrêmement avantageuse pour le calcul. En effet, *si l'on fait abstraction des virgules, on peut opérer sur les nombres décimaux exactement comme sur les nombres entiers.* Une fois les calculs achevés, on n'a plus qu'à placer, dans les nombres trouvés, les virgules qui doivent y figurer. On place ces virgules conformément à des règles très simples, règles bien connues et qu'il est inutile de rappeler ici.

8. — *Calcul approché. Puissances fractionnaires.*

46. Valeur approchée d'une fraction. — L'emploi de la notation décimale accélère considérablement, nous venons de le dire, les calculs relatifs aux fractions décimales. Mais cette notation présente un autre avantage qui n'est pas moins précieux : elle nous donne immédiatement une idée approximative de la grandeur des fractions auxquelles nous avons affaire.

Considérons par exemple la fraction 2,572. Sans faire aucun calcul, je puis affirmer que cette fraction est comprise entre 2 et 3, plus précisément entre 2,5 et 2,6, plus précisément encore entre 2,57 et 2,58. C'est là une constatation importante pour celui qui veut appliquer l'arithmétique aux problèmes de la vie pratique. Il est fort utile de savoir que *pour connaître la valeur approchée d'un nombre décimal à un dixième près, ou à un centième près, ou à un millième près, il suffit de retenir à droite de la virgule, dans l'expression du nombre décimal, un, deux ou trois chiffres décimaux.*

Partant de cette remarque, nous trouvons le moyen de représenter par un nombre décimal la valeur approchée d'une fraction non-décimale quelconque.

Nous avons déjà observé qu'une fraction quelconque est la somme d'une partie entière, a, et d'une fraction inférieure à 1. Soit $\frac{M}{m}$ cette dernière fraction. Elle est égale à $\frac{M \times 10}{m}$ dixièmes d'unité. Or la

fraction $\frac{M \times 10}{m}$ est elle-même la somme d'une partie entière b et d'une fraction inférieure à 1. *La fraction proposée est donc égale à la somme suivante* :

$$a + b \textit{ dixièmes} + \textit{fraction inférieure à } \frac{1}{10}.$$

Nous pouvons aller plus loin, et décomposer la fraction proposée (quelle qu'elle soit) en la somme d'un nombre décimal et d'une fraction inférieure à $\frac{1}{100}$ ou à $\frac{1}{1000}$, etc. Le nombre décimal trouvé sera LA VALEUR APPROCHÉE DE LA FRACTION PROPOSÉE à $\frac{1}{100}$ près, ou $\frac{1}{1000}$ près, ou, en général, à $\frac{1}{10^p}$ près [p étant un nombre entier aussi grand que l'on voudra (*arbitrairement grand*) ([1])].

Le procédé que nous venons d'employer pour trouver la valeur approchée d'une fraction montre que cette valeur est toujours *inférieure* à la fraction proposée ; nous dirons donc que c'est une *valeur approchée par défaut*. D'ailleurs, si nous augmentons d'une unité le dernier chiffre du nombre décimal écrit, nous aurons une valeur supérieure à la fraction proposée : ce sera la valeur *approchée par excès de la fraction* (à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... près).

47. La grande utilité pratique qu'a pour nous la considération des valeurs approchées tient au fait suivant : *En remplaçant, dans les calculs, les fractions par leurs valeurs approchées, on obtient avec une « approximation arbitrairement grande » le résultat d'une opération quelconque* ([2]). J'entends par là que le résultat obtenu — qui n'est pas le résultat exact, mais le résultat approché de l'opé-

([1]) Lorsque p est très grand, 10^p est très grand, et $\frac{1}{10^p}$ est très petit [cf. 40-41].

([2]) La notion d'« approximation arbitrairement grande » est liée à la notion de « limite » à laquelle nous ferons fréquemment appel dans les chapitres suivants : considérons les valeurs approchées d'une fraction à $\frac{1}{10}$ près, puis à $\frac{1}{100}$ près, puis à $\frac{1}{1000}$ près, et ainsi de suite : on dit que la suite indéfinie des valeurs approchées ainsi calculées a pour *limite* la valeur de la fraction.

ration proposée — diffère aussi peu que l'on veut du résultat exact, à condition que l'on ait remplacé les fractions données par des valeurs suffisamment approchées. En d'autres termes, appelons *erreur commise* la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée d'une fraction ou d'un résultat d'opération : puisque les erreurs commises sur les fractions peuvent être rendues aussi petites que l'on veut, il en sera de même de l'erreur commise sur le résultat du calcul.

Soit, par exemple, à additionner deux fractions a et b. Je puis écrire :

$$a = A + \alpha, \qquad b = B + \beta,$$

A et B étant des nombres décimaux et α et β étant inférieurs à l'inverse $\frac{1}{10^p}$ d'une puissance de 10 *arbitrairement* grande. J'aurai par conséquent :

$$(a + b) = (A + B) + (\alpha + \beta)$$

$(\alpha + \beta)$ étant inférieur à $\frac{2}{10^p}$ et étant, par conséquent, aussi petit que l'on veut.

Soit maintenant à multiplier a par b. Je puis écrire :

$$a \times b = (A + \alpha) \times (B + \beta) = (A \times B) + (A \times \beta) + (\alpha \times B) + (\alpha \times \beta).$$

Or j'aurai

$$A \times \beta < \frac{A}{10^p}; \qquad \alpha \times B < \frac{B}{10^p}; \qquad \alpha \times \beta < \frac{1}{10^p \times 10^p} = \frac{1}{10^{2p}}.$$

J'en conclus que, lorsque l'exposant p est arbitrairement grand, la différence

$$(a \times b) - (A \times B)$$

est arbitrairement petite.

La même remarque s'applique à l'une quelconque des opérations fondamentales.

Ainsi, pourvu que l'on se contente d'une approximation déterminée — d'ailleurs aussi grande que l'on veut — on a le droit, dans la pratique, de remplacer une fraction quelconque par un nombre décimal. On exprime ce fait en disant qu'une fraction non décimale quelconque est réductible à une fraction décimale

illimitée [le mot *illimitée* signifiant que, si l'on veut pousser de plus en plus loin l'approximation, on doit, dans le nombre décimal qui représente la fraction, ajouter, indéfiniment, de nouvelles décimales].

Les fractions décimales illimitées ont été étudiées par Cavalieri (*Trigonometria*, 1643, chap. XXIV) et, d'une manière plus complète et plus précise, par Wallis (*Algebra*, 1693, chap. LXXXIX).

48. Valeur approchée d'une racine. — L'idée de remplacer le calcul exact par un calcul approximatif est une idée dont la fécondité nous apparaîtra de plus en plus. Proposons-nous de l'appliquer au problème de l'extraction des racines.

Nous avons vu (n° **37**) que l'extraction de la racine $p^{ième}$ d'une fraction $\frac{M}{m}$ n'est pas toujours une opération possible. Je vais montrer en revanche que, *quelle que soit la fraction* $\frac{M}{m}$, *on peut trouver une fraction* $\frac{N}{n}$ *dont la puissance* $p^{ième}$ *diffère de* $\frac{M}{m}$ *aussi peu que l'on voudra*. Il sera dès lors naturel de dire que la fraction $\frac{N}{n}$ est *une valeur approchée de la racine* $p^{ième}$ *de* $\frac{M}{m}$. Ainsi, quoique cette racine $p^{ième}$ ne soit pas en général un nombre rationnel, nous pourrons la traiter comme si elle en était un et la représenter par sa valeur appprochée, que nous appellerons *racine approchée*.

Cherchons, par exemple, « la valeur approchée de la racine $p^{ième}$ de $\frac{M}{m}$ à une unité près » — c'est-à-dire une fraction $\frac{N}{n}$ dont la puissance $p^{ième}$ diffère de $\frac{M}{m}$ de moins d'une unité. Nous avons démontré (n° **40**) que, quel que soit l'entier p, si a et b sont deux nombres quelconques, l'inégalité $a < b$, entraîne comme conséquence l'inégalité $a^p < b^p$. Ecrivons alors la suite des nombres

$$1,\ 2^p,\ 3^p,\ 4^p,\ \ldots.$$

Cette suite est une suite croissante de nombres de plus en plus grands : j'en conclus qu'il y a, dans cette suite, deux termes consécutifs a^p, $(a+1)^p$, et deux seulement, entre lesquels est comprise la fraction $\frac{M}{m}$: je dois donc regarder la racine $p^{ième}$ du terme a^p

(c'est-à-dire a) comme étant la *racine* $p^{ième}$ *à une unité près par défaut de* $\frac{M}{m}$; $(a+1)$ *est la racine* $p^{ième}$ *à une unité près par excès de* $\frac{M}{m}$.

Soit demandé, maintenant, de trouver la « valeur approchée de la racine $p^{ième}$ de $\frac{M}{m}$ à $\frac{1}{10}$ près ». Considérons la suite croissante des fractions

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{2}{10}, \quad \frac{3}{10}, \ldots$$

et la suite de leurs puissances $p^{ièmes}$

$$\frac{1}{10^p}, \quad \frac{2^p}{10^p}, \quad \frac{3^p}{10^p}, \ldots$$

Il y a dans cette dernière suite deux termes consécutifs $\frac{b^p}{10^p}$, $\frac{(b+1)^p}{10^p}$ (et deux seulement) entre lesquels est comprise la fraction $\frac{M}{m}$. Je dois donc regarder $\frac{b}{10}$ et $\frac{b+1}{10}$ (quantités différant d'un dixième) comme étant les valeurs approchées à un dixième près, par défaut et par excès, de la racine considérée.

De la même manière, on définira la valeur approchée de la racine $p^{ième}$ de $\frac{M}{m}$ à un degré quelconque d'approximation.

On remarquera que les racines approchées, calculées comme il vient d'être dit, sont toutes des nombres décimaux.

49. — Ainsi, voilà une « expression » arithmétique, la racine $p^{ième}$ (*ou racine d'ordre* p) d'une fraction quelconque, qui ne représente aucun nombre, et qui néanmoins se prête au calcul numérique. Il y a, il est vrai, dans le calcul approché, quelque chose d'artificiel et d'imprécis, qui répugnait au rationalisme grec et incitait les Pythagoriciens à rejeter ce calcul de la science. Cependant, on ne pouvait manquer de l'y introduire, ne fût-ce que pour satisfaire les besoins de la géométrie [1], et c'est ainsi qu'Ar-

[1] Voir le chap. II, en particulier, nᵉ 63.

chimède (287-212 av. J.-C.) consacra au calcul approché des racines carrées quelques-uns de ses plus beaux travaux [1]. Aux environs de l'an 1200, l'algébriste arabe, *Omar al Khayyam* [2] se vantait d'avoir donné une méthode permettant d'effectuer l'extraction d'une racine d'ordre quelconque. A l'époque de la Renaissance, enfin, où de fortes tendances utilitaristes tendent à remettre en honneur l'Arithmétique pratique, le calcul approché est devenu — définitivement cette fois — l'un des chapitres principaux de la science des nombres.

50. Généralisation de la notion de puissance. Exposants fractionnaires. — Grâce aux conventions que nous avons faites, toutes nos opérations ont maintenant un sens, exact ou approché, quels que soient les nombres (entiers ou rationnels) sur lesquels elles portent. Seules les deux dernières opérations (élévation aux puissances et extraction des racines) sont encore soumises à une restriction en ce qui concerne les exposants et l'« ordre des racines » : en effet, les symboles a^p, $\sqrt[p]{a}$; ne représentent des opérations légitimes que si le nombre p est un entier. Ne serait-il pas possible d'imaginer une nouvelle convention qui confère un sens à ces symboles *dans le cas où le nombre p est fractionnaire*? Notre arithmétique y gagnerait en unité et en clarté.

Nous réaliserons ce progrès en fondant en une les deux opérations de l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines.

Convenons de poser, quels que soient les entiers m et n, et le nombre a :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Je dis que les « *puissances à exposants fractionnaires* » $a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$ jouissent des mêmes propriétés fondamentales que les puissances ordinaires, qu'elles se comportent semblablement dans les calculs, et que, par conséquent, la convention en vertu de laquelle nous les regardons comme des puissances est une convention légitime.

(1) Cf. HULTSCH, *Die Näherungswerte irration. Quadratwurzeln bei Archimedes, Abh. der Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen*, 1893.

(2) Cf. TROPFKE, *Gesch. d. El. Math.*, I, p. 211 et *infra*, n° 273.

En effet, les propriétés fondamentales des puissances à exposants entiers sont résumées (voir nos **9** et **36**) par les égalités suivantes [1] :

(1) $$a^p \times a^q = a^{p+q}$$

(2) $$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \text{ si } p > q \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^{q-p}}, \text{ si } q > p$$

(3) $$(a^p)^q = a^{p \cdot q} = (a^q)^p.$$

Remarquons d'abord que la définition même des puissances $a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$ donne

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a, \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = a,$$

ce qui est conforme à la propriété numérotée (3).

Je dis, d'autre part, que les puissances fractionnaires jouissent de la propriété (1), c'est-à-dire que l'on a

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m.n' + m'.n}{n.n'}}$$

quelles que soient les fractions [2] $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$. Posons, en effet

$$b = a^{\frac{m}{n}}, \qquad c = a^{\frac{m'}{n'}}, \qquad d = a^{\frac{m.n' + m'.n}{n.n'}}.$$

Je tire de là, par définition :

$$b^n = a^m, \quad c^{n'} = a^{m'}; \qquad \text{donc} \qquad b^{n.n'} = a^{m.n'}, \quad c^{n'.n} = a^{m'.n};$$

et, par conséquent

$$(b \times c)^{n.n'} = b^{n.n'} \times c^{n.n'} = a^{m.n' + m'.n}; \qquad \text{d'où} \qquad b \times c = d,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Un calcul analogue nous permettra de vérifier que les puissances

(1) Les signes $\times$ et . s'emploient indistinctement dans le sens de *multiplié par* (n° 7); par $(a^p)^q$ j'entends « puissance $q^{ème}$ de a^p ».

(2) Les symboles m', n' se lisent *m prime*, *n prime*; je m'en sers pour représenter des nombres autres que m et n, mais jouant un rôle équivalent (cf. p. 14, note 1).

fractionnaires jouissent des propriétés (2) et (3). L'assimilation de ces puissances aux puissances ordinaires est donc légitime [1].

51. — La notation que nous venons d'introduire pour la représentation des racines s'appelle « *notation exponentielle* » (parce qu'elle repose sur l'emploi des exposants). Nous en trouvons les rudiments dans l'*Algorismus proportionum* de Nicole Oresme (1303-1382), évêque de Lisieux [2] [Oresme emploie le mot « proportion » dans le sens de « puissance »].

[1] Remarquons en passant que, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, on a $a^{\frac{m}{n}} > 1$, si $a > 1$; en effet, d'après le n° 40, $a^m > 1$ et par suite $\sqrt[n]{a^m} > 1$.

[2] Publié pour la première fois en 1868 par M. Curtze, Berlin.

CHAPITRE II

—

LES GRANDEURS

I. — Les grandeurs géométriques et le calcul

52. — Nous avons vu, dans les derniers paragraphes du chapitre précédent, que l'analyse même de la notion de nombre, allant de pair avec les exigences des sciences appliquées, nous oblige à élargir le cadre primitif de l'arithmétique. A côté des calculs exacts nous avons fait une place aux calculs approximatifs. Or c'est dans les problèmes de mesure géométrique que ces calculs se sont présentés à l'homme pour la première fois. Il importe donc de nous demander dans quelles conditions, au juste, la science du calcul peut être appliquée aux grandeurs géométriques.

Nous savons que les grandeurs sont, avec les figures, l'objet d'une science théorique que l'on appelle *géométrie*. Cette science, — qu'il ne faut pas confondre avec l'art empirique des géomètres orientaux [1], recueil de recettes pratiques, plus ou moins exactes (cf. n° **71**) —, cette science spéculative et désintéressée, naquit en Grèce comme la science des nombres. Sœur jumelle de l'arithmétique pythagoricienne, elle en partage la perfection et lui est si semblable par la nature des facultés qu'elle met en jeu que l'on

[1] Etymologiquement parlant, la géométrie, art de mesurer le sol, est l'arpentage. Mais, de même que la logistique (*vide*, p. 121, note 1) l'arpentage (qui porte le nom de *géodésie*) fut rejeté par les Grecs hors de la science proprement dite, et le mot « géométrie » prit le sens d'« étude spéculative des grandeurs et des figures » (cf. 164).

appelle souvent du même nom « géomètres », ceux qui s'adonnent à l'une ou à l'autre science ([1]).

Quels liens y a-t-il entre les deux sciences sœurs? C'est ce dont nous allons nous rendre compte en étudiant dans le présent chapitre la théorie des grandeurs.

Il nous faudra, il est vrai, supposer connues certaines propriétés des figures qui ressortissent en droit à notre chapitre III. Mais ces propriétés sont si simples et elles nous sont à tous si familières que le lecteur voudra bien nous autoriser à les regarder comme acquises. En fait elles furent, plus ou moins consciemment, utilisées par les hommes primitifs longtemps avant que ne s'ouvrît l'ère de la démonstration et de la science rationnelle. Et les géomètres grecs, eux-mêmes, ne cherchèrent pas tout d'abord à les analyser ([2]), mais les acceptèrent d'emblée comme point de départ de leurs déductions. Il nous sera donc permis de les admettre à notre tour, afin de pouvoir étudier tout de suite cette pseudo-géométrie, prolongement direct de l'arithmétique, où la figure n'intervient qu'à titre accessoire et sous une forme aussi réduite que possible.

53. Longueurs rectilignes. — Le type par excellence de la grandeur géométrique est la longueur rectiligne, c'est-à-dire la longueur d'une ligne droite ([3]) limitée, ou, plus précisément, d'un *segment rectiligne* (portion *de droite*) compris entre deux points A et B. C'est à ce type de grandeur, le plus simple et le plus clair, que les mathématiciens s'efforcent de ramener toutes les autres.

([1]) C'est en ce sens qu'il faut interpréter la phrase célèbre inscrite, d'après la légende, au fronton de l'Ecole de Platon : Nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

([2]) Voir, sur la définition logique des figures élémentaires le *Deuxième livre*, chap. V.

([3]) C'est à dessein que nous ne donnons, dans ce paragraphe, aucune définition de la ligne droite et du plan. Nous avons de ces notions premières une vue intuitive, que nous ne pourrions qu'obscurcir en cherchant à en donner prématurément une définition logique. Une droite, c'est une règle sans épaisseur; un plan, c'est, par exemple, un tableau noir ou une feuille de papier. EUCLIDE lui-même ne nous donne, dans son système de géométrie (voir ch. III, § 4) aucune explication logique des notions premières et de leurs propriétés, mais se borne à spécifier quelles sont celles dont il a besoin pour édifier ses « Eléments ».

La notion de longueur rectiligne (¹) présente certains caractères qui la rapprochent de la notion de nombre.

Etant données deux longueurs (deux segments de droites) AB et CD quelconques (fig. 2), on peut dire si elles sont *égales* ou *inégales*: elles sont égales (ou *congruentes*) si elles sont exactement *superposables*, c'est-à-dire si, en déplaçant l'une d'elles, on peut l'amener à coïncider avec l'autre; lorsqu'elles sont inégales, on peut dire laquelle est la plus grande; on peut faire la *somme* ou la *différence* de deux longueurs en les plaçant bout à bout le long d'une même droite; enfin on peut *diviser* une longueur donnée en un nombre donné de parties égales. Ce sont ces *caractères arithmétiques* (²) des longueurs qui nous permettront de les *mesurer*.

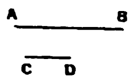


Fig. 2.

Nous retrouverons les mêmes *caractères arithmétiques* (donnant lieu aux mêmes *opérations*) chez les diverses grandeurs qu'étudie la géométrie. Montrons-le par quelques exemples fondamentaux.

54. Angles. — On appelle *angle* la figure formée par deux demi-droites (³) issues d'un même point O. Ces demi-droites sont appelées *côtés* de l'angle; le point O est appelé *sommet*. Marquant sur la première demi-droite un point quelconque A, sur la seconde demi-droite un point quelconque B, je puis regarder l'angle comme

(¹) On remarquera qu'une longueur rectiligne telle que AB est indépendante de la position particulière qu'occupe dans l'espace le *segment de droite* AB. Si nous déplaçons ce segment et lui faisons occuper des positions diverses, nous avons toujours affaire à une seule et *même* longueur. Au contraire, par les mots « droite », « segment rectiligne », nous entendons toujours une droite ou un segment *situés dans l'espace*.

(²) Nous passons sous silence les caractères fondamentaux qui sont, pour le sens commun, inséparables de la notion de longueur, mais qu'Euclide et les géomètres grecs prenaient soin d'énumérer sous forme d'axiomes et que les logiciens contemporains ont analysés avec plus de précision encore. Ainsi : *Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles* ; *si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux* ; et ainsi de suite [les exemples que nous citons sont les deux premiers axiomes, ou *notions communes*, κοιναὶ ἔννοιαι d'Euclide]. Nous reviendrons plus loin sur ces axiomes (voir *Deuxième liv.*, chap. v et *Troisième liv.*, chap. II).

(³) Etant donnée une droite qui passe par un point O, cette droite peut être prolongée indéfiniment de part et d'autre du point O. J'appelle *demi droite* la portion de la droite qui est située tout entière, soit à droite, soit à gauche du point O.

défini par les trois points A, O, B, puisque les deux points O et A définissent une droite OA (le premier côté de l'angle), et pareillement les deux points O et B une droite OB (le second côté de l'angle) ; je désignerai donc mon angle [1] par les trois lettres AOB, la lettre relative au sommet étant placée entre les deux autres ; mais je me garderai d'oublier que le choix des points A et B sur les côtés de l'angle est arbitraire [2].

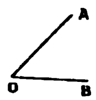


Fig. 3.

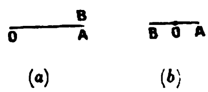


Fig. 4.

Un angle est plus ou moins grand suivant que ses côtés sont plus ou moins écartés. Un angle est donc une grandeur.

Nous regardons comme le *plus petit* angle possible celui dont les deux côtés sont confondus (fig. 4*a*) et comme le *plus grand* angle possible celui dont les deux côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre (sur une même droite (fig. 4*b*)).

Deux angles sont *égaux* (congruents) lorsqu'ils sont exactement superposables ; il en est ainsi, par exemple, pour les angles AOB, A'OB' (fig. 5), dont les côtés sont en prolongement les uns des autres ; ces angles sont dits « *opposés par le sommet* [3] ». — Etant donné deux angles inégaux, l'un est nécessairement plus grand que l'autre.

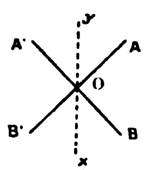


Fig. 5.

On peut faire la *somme* de deux angles. En effet, étant donnés deux angles quelconques, nous pouvons toujours

(1) Lorsqu'aucune confusion n'est à redouter, on désigne souvent un angle par une seule lettre, celle qui se rapporte au sommet.

(2) D'une manière générale, lorsque nous désignons une droite — telle que OA — par deux de ses points, nous entendons parler de la droite indéfiniment prolongeable. Lorsque nous ne prenons en considération que la portion de droite limitée aux points O et A, nous disons « segment OA » et non « droite OA ».

(3) En latin, les traducteurs d'Euclide, appellent ces angles « *anguli verticales* ou *ad verticem* », c'est-à-dire « angles au sommet ». On peut, de plusieurs manières, amener les deux angles AOB, A'OB' à coïncider. On peut, par exemple, plier la feuille de papier, en rabattant la partie droite de la figure 5 sur la partie de gauche autour de la « charnière » xy (bissectrice) : OA' vient couvrir OA, OB' vient sur OB.

les *juxtaposer* de manière qu'ils aient même sommet O, un côté commun OB et soient situés de part et d'autre de ce côté : les deux angles occupent alors les positions [1] AOB et BOC (fig. 6) : on dit qu'ils sont *adjacents*. L'angle AOC formé par la réunion des deux angles donnés peut être considéré comme leur somme.

On peut faire la *différence* de deux angles. Pour cela, on juxtapose encore les deux angles en leur donnant même sommet et un côté commun, mais le plus petit angle est placé cette fois à l'intérieur du plus grand. Ainsi (voir la figure 5) la différence entre l'angle A'OB (qui est le *plus grand* angle possible) et l'angle AOB est l'angle A'OA : cet angle est dit *supplément* ou *supplémentaire* de l'angle AOB.

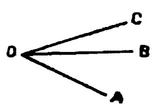


Fig 6.

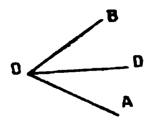


Fig. 7.

Enfin, on peut diviser un angle quelconque en un nombre quelconque de parties égales. Ainsi, sur la figure 7, l'angle AOB est divisé en deux angles égaux, AOD et DOB : la droite OD qui partage l'angle en deux en est la *bissectrice* [2]. Les angles partiels pourraient être divisés à leur tour, et ainsi de suite indéfiniment.

[1] Nous faisons la figure en nous plaçant dans le cas où les deux angles proposés sont *aigus* (voir ci-dessous). Lorsque les angles sont *obtus*, il faut pour justifier pleinement la définition de leur somme, faire appel aux conventions de la trigonométrie que nous développerons plus loin.

[2] Si nous prolongeons au-delà du point O les deux côtés de l'angle nous formons quatre angles AOB, BOB', A'OB, A'OA (fig. 8) dont les bissectrices OD, OD', OD_1, OD_1', sont en prolongement deux à deux. On démontre facilement que les deux droites D'OD, $D_1'OD_1$ sont perpendiculaires l'une sur l'autre (forment un angle droit, voir ci-dessous). En effet, l'angle DOD'_1, est la somme de DOA (moitié de BOA) et de AOD'_1 (moitié de AOA'); donc il est la moitié de l'angle BOA' (somme de BOA et AOA') qui est le plus grand angle possible (*deux droits*).

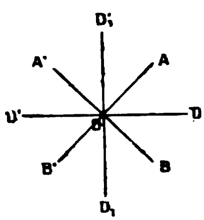


Fig. 8.

L'angle moitié du plus grand angle possible est appelé *angle droit* [1] (AOB sur la fig. 9). C'est pourquoi l'on dit que le plus grand angle possible a pour grandeur *deux angles droits* ou « deux droits ». Les deux côtés d'un angle droit et leurs prolongements sont dits *perpendiculaires* l'un sur l'autre.

Un angle plus petit qu'un angle droit est dit *angle aigu*; un angle plus grand qu'un droit est dit *angle obtus*. La différence A'OB (voir la fig. 9) entre un angle droit AOB et l'angle AOA' est appelée *complément* ou angle *complémentaire* de AOB.

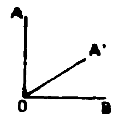


Fig. 9.

Etant donné deux droites quelconques tracées dans un même plan (par exemple sur une même feuille de papier infiniment grande), et qui sont, l'une et l'autre indéfiniment prolongées par les deux bouts, on admet qu'elles se rencontrent toujours à moins qu'elles ne soient « *parallèles* ». Elles forment 4 angles (voir la fig. 5) deux à deux égaux ou supplémentaires.

55. Distinction entre l'égalité de figure et l'égalité de grandeur. Les aires. — Nous définissons comme égales ou congruentes des *figures* géométriques (telles que segments rectilignes ou angles) qui sont superposables et nous admettons que deux figures superposables ont même grandeur. Nous admettons aussi que, réciproquement, si deux segments ou angles ont même grandeur, ils sont nécessairement superposables. Ainsi, pour ces figures, il y a coïncidence entre l'égalité définie au moyen de la superposition et l'égalité de *grandeur*. Mais cette coïncidence ne subsistera pas lorsque l'on aura affaire à des figures plus compliquées.

Prenons, par exemple, un *triangle* ABC, figure formée de trois segments rectilignes AB, BC, CA (côtés du triangle) reliant deux à deux trois points A, B, C (appelés sommets), donnés dans un plan. L'*égalité de figure* (appelée aussi *congruence*) entre ce triangle et un autre triangle A'B'C' sera définie comme il a été dit plus haut : les deux triangles sont égaux s'ils sont exactement

[1] Les expressions *angulus rectus* ou *normalis*, *acutus*, *obtusus* se trouvent chez Boèce (v[e] siècle ap. J.-C.) [chez Euclide : γωνία ὀρθή, ὀξεῖα, ἀμβλεῖα].

superposables (c'est le cas sur la figure 10). Que faut-il entendre, d'autre part, par l'*égalité de grandeur*, et tout d'abord qu'est-ce que la *grandeur d'un triangle* ? Nous ne sommes pas actuellement en état de donner une définition rigoureuse de cette notion, mais nous en avons une conception très nette. La grandeur d'un triangle, c'est la grandeur de la portion de plan comprise entre les côtés du triangle (portion ombrée, sur la figure 10) appelée *surface* du triangle. Et pour reconnaître, le cas échéant, que les grandeurs de deux triangles sont égales, il nous suffira de remarquer que la portion de plan limitée par un triangle peut être décomposée, d'une infinité de manières, en autant de morceaux qu'il nous plaira;

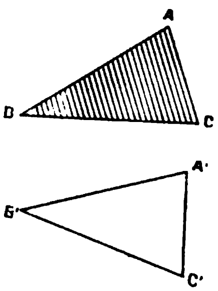


Fig. 10.

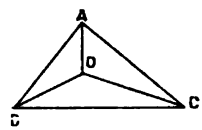


Fig. 11.

ainsi sur la figure 11, l'intérieur du triangle ABC est décomposé en trois triangles partiels : il est la *somme* de ces triangles. Considérons, alors, deux triangles, ABC et A'B'C', non superposables, mais dont les surfaces peuvent être respectivement décomposées en un même nombre de figures partielles, se correspondant d'un triangle à l'autre, et superposables ; en ce cas, ABC peut être regardé comme la *somme* de figures partielles égales, chacune à chacune, aux figures partielles qui composent A'B'C' ; nous exprimerons ce fait en disant qu'il y a *égalité de grandeur* entre les surfaces des deux triangles, ou simplement entre les deux triangles ABC et A'B'C',

On pourra de la même manière — théoriquement tout au moins, car pratiquement l'opération peut être difficile à réaliser — reconnaître l'égalité de grandeur entre la surface d'un triangle et la surface (l'intérieur) d'une figure plane (c'est-à-dire tracée dans un plan) limitée par des segments rectilignes en nombre

quelconque [une telle figure s'appelle *polygone* (1)] ; et l'on pourra reconnaître aussi l'égalité de grandeur de deux polygones quelconques (2).

Nous admettrons, d'autre part, comme évident le fait suivant : *De deux polygones qui ne sont pas égaux, l'un est toujours plus petit que l'autre* : nous entendons par là que l'un des deux polygones (le plus petit) est égal à une partie de l'autre (le plus grand).

De ces diverses remarques nous concluons que les grandeurs superficielles des polygones sont — théoriquement tout au moins — des « grandeurs comparables » : j'entends par là que l'on peut effectuer sur ces grandeurs les diverses opérations définies au n° **53**. Ainsi, l'on peut former la somme ou la différence des grandeurs de deux polygones : par exemple, sur la figure 12,

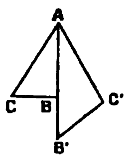


Fig. 12.

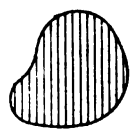


Fig. 13.

la surface du pentagone (polygone à cinq côtés) ACBB'C' est la somme des surfaces des deux triangles, ABC, A'B'C' accolés l'un contre l'autre. On peut, d'autre part, décomposer la grandeur d'un triangle ou polygone en un nombre donné de parties égales.

56. — Considérons maintenant un cercle ou une courbe fermée (3) quelconque (fig. 13). Peut-il y avoir égalité de grandeur

(1) Un polygone [πολύγωνον, figure à plusieurs angles] est défini par *n sommets* $A_1, \ldots A_n$ reliés deux à deux par *n côtés*, A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots A_{n-1}A_n$. Un polygone à 3 côtés est un triangle, un polygone à 4 côtés est un *quadrilatère*, un polygone à 5, 6,... côtés est un *pentagone*, un *hexagone*, etc. *Un polygone a autant d'angles* que *de côtés*. On désigne un polygone par les lettres qui désignent ses sommets.

(2) Pour démontrer rigoureusement que les opérations dont il est ici question sont théoriquement possibles et pour comparer effectivement les grandeurs des polygones il faudra s'appuyer sur les théorèmes qui font l'objet du § 3 de ce chapitre et, en particulier sur cette remarque que tout polygone est décomposable en une somme de triangles.

(3) On appelle *ligne courbe* ou *courbe* toute ligne (ou composée de droites) qui n'est pas droite. Une courbe fermée est une courbe qui, lorsqu'on la parcourt à partir de l'un quelconque de ses points, aboutit à son point de départ. Une courbe non fermée est dite *ouverte*.

entre la surface (partie ombrée) limitée par cette courbe et la surface d'un polygone ? Il se peut qu'une telle égalité soit impossible à contrôler avec les instruments dont dispose le géomètre (règle, équerre, compas). Comment, en effet décomposer la figure courbe et la figure à angles en morceaux qui puissent se recouvrir ? En théorie, toutefois, nous pouvons toujours imaginer que la figure courbe soit fluide et que, sans en altérer la grandeur, nous puissions en modifier la forme de manière à la transformer en un polygone. Nous en concluons que les grandeurs des deux figures sont « comparables » (*vide supra*).

Les grandeurs superficielles des figures géométriques seront, d'une manière générale, désignées par le mot « *aires* » [1]. Les remarques qui précèdent montrent que les aires se prêtent aux mêmes opérations que les longueurs.

L'opération qui a pour but de déterminer un polygone, et plus particulièrement un carré, ayant même grandeur qu'une surface limitée par une courbe est appelée « *quadrature* ».

57. Rectification des courbes. — Portons maintenant notre attention sur le *contour* des triangles ou polygones, c'est-à-dire sur la ligne brisée qui les limite (cette ligne comprend l'ensemble des côtés du polygone). Ce contour est une grandeur jouissant des propriétés énoncées plus haut (n° **53**), car, si l'on porte bout à bout l'ensemble des côtés du polygone, on obtient une longueur rectiligne ; cette longueur est souvent appelée [2] « périmètre du polygone ».

Considérons, semblablement, le « contour » d'une ligne courbe. Ce contour a une grandeur qui est une longueur, car, en théorie, nous pouvons toujours imaginer qu'il soit redressé et appliqué

[1] Le mot « surface » est souvent employé comme synonyme d'« aire ». Cependant, il est préférable de réserver l'appellation de « surface » à la figure géométrique dont la *grandeur* (indépendante de la figure) est une aire. Remarquons qu'il ne résulte pas de là que qui dit « surface » dit figure occupant dans l'espace une position *ne varietur* (cf. p. 64 note 1). Une surface qui se déplace en conservant même grandeur et même forme est toujours *la même* surface, à moins toutefois que l'on ne spécifie le contraire comme il arrivera dans certains chapitres de la science.

[2] C'est, en réalité, la *mesure* de cette longueur qui devrait être appelée périmètre.

sur un segment rectiligne. L'opération qui a pour but de déterminer le segment rectiligne qui a même longueur qu'une courbe donnée s'appelle : *rectification*.

58. — Nous avons admis que, *virtuellement*, une aire ou une longueur courbe peut toujours être comparée à l'aire ou au contour d'un polygone. Est-ce là un pur postulat, ne pouvant être justifié que par des notions d'ordre physique telles que celles de déformation ou de redressement? Non point : les théorèmes de la géométrie rationnelle permettent d'effectuer en toute rigueur, et sans faire intervenir aucune déformation, la quadrature et la rectification des courbes simples. C'est ainsi que les géomètres grecs ont déterminé la grandeur du cercle à l'aide d'une méthode rationnelle dite méthode d'*exhaustion*. Cette méthode, fondée sur le calcul des longueurs, est purement géométrique en fait. Cependant, on a avantage à l'interpréter dans le langage des nombres, en utilisant la notion de mesure. C'est à ce point de vue que nous nous placerons pour en exposer le principe au prochain paragraphe.

59. Figures à trois dimensions. — Nous pouvons faire, sur la grandeur des figures tracées dans l'espace à trois dimensions, des remarques analogues à celles qui précèdent.

Considérons, par exemple, la figure formée par deux demi-plans [1] limités à leur *intersection*, c'est-à-dire à la droite qu'ils ont en commun ; cette figure — dont on se fait une idée en imaginant une feuille de papier à lettre, infiniment grande et ouverte — est appelée *dièdre* ou *angle dièdre* ; les deux demi-plans sont les faces du dièdre, la droite commune est l'*arête* [voir la figure 14, où les deux demi-plans sont représentés par des parallélogrammes, que l'on suppose respectivement situés dans ces demi-plans et ayant un côté commun sur l'arête].

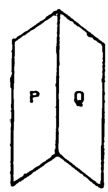


Fig. 14.

Un dièdre [2] est plus ou moins grand, suivant que ses côtés sont plus ou moins écartés ; un dièdre est donc une grandeur.

[1] Etant donné un plan (voir p. 63, note 3) qui passe par une droite, cette droite, *indéfiniment prolongée dans les deux sens*, partage le plan en deux régions que l'on appelle demi-plans.

[2] On observera le parallélisme qu'il y a entre ces propositions et celles du n° 54.

Deux dièdres sont égaux (congruents), lorsqu'ils sont exactement superposables : il en est ainsi, par exemple, pour les dièdres [1] PQ, P'Q' dont les faces sont en prolongement les unes des autres (je veux dire que les deux demi-plans P et P' ou Q et Q' appartiennent au même plan) : ces dièdres sont dits « *opposés par l'arête* » (fig. 15).

On peut faire la somme ou la différence de deux dièdres [2] en les juxtaposant de manière qu'ils aient la même arête et une face commune : ainsi sur la figure 16, le dièdre PR est la somme des dièdres PQ, QR ; le dièdre PQ est la différence des dièdres PR et QR.

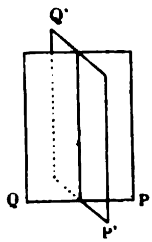


Fig. 15.

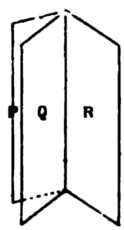


Fig. 16.

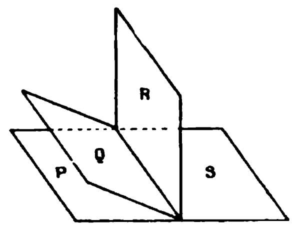


Fig. 17.

Un dièdre est *droit* si ses faces sont perpendiculaires l'une sur l'autre [exemple : le dièdre formé par le plancher d'une chambre et une cloison] ; deux *dièdres* dont la somme est un dièdre droit (exemple : les dièdres PQ, QR sur la fig. 17) sont dits *complémentaires* l'un de l'autre.

Le plus grand dièdre possible est la somme de deux dièdres droits : ses faces, en prolongement l'une de l'autre forment un plan [PS sur la fig. 17] ; deux dièdres [tels que PQ et QS] dont la somme est un dièdre se réduisant à un plan sont dits *supplémentaires* l'un de l'autre.

Les définitions des dièdres aigus ou obtus, du plan bissecteur qui partage le dièdre en deux dièdres égaux, etc., se déduisent de la même manière des diverses définitions relatives aux angles.

60. — Considérons maintenant un corps solide, par exemple

[1] Nous nommons un dièdre par deux lettres dont chacune désigne un demi-plan.

[2] Voir p. 66, note 1.

une *pyramide triangulaire* [1], — c'est-à-dire la figure formée par quatre triangles ABC, ACD, ABD, BCD, situés dans des plans différents et ayant, deux à deux, un côté commun (fig. 18). Les quatre triangles (appelés *face* de la pyramide) limitent une certaine portion de l'espace, portion intérieure à la pyramide, que nous appellerons *corps* ou *solide* (στερέον chez Euclide, σῶμα chez Héron, voir p. 95, note 2). Ce corps a une grandeur, appelée *volume* [2], jouissant de toutes les *propriétés arithmétiques* que nous avons indiquées plus haut.

En particulier les volumes de deux corps différents sont regardés comme égaux (congruents) si ces corps peuvent — en théorie tout au moins — être décomposés en un même nombre de corps partiels pouvant être amenés à coïncider [3] (c'est-à-dire occupant exactement la même portion d'espace). Si deux corps ont des volumes inégaux, l'un est plus petit que l'autre (nous l'admettrons sans démonstration) c'est-à-dire égal à une partie de l'autre.

L'*aire* de la pyramide sera, par définition, la somme des aires de ses faces ; c'est une grandeur superficielle que l'on peut toujours appliquer sur un plan et qui est « comparable », par conséquent (*vide* n° 56) à l'aire d'un polygone.

Le *périmètre* de la pyramide ABCD sera par définition, la somme des côtés AB, AC, AD, BC, CD, BD (arêtes de la pyramide) : ce périmètre est une longueur (grandeur comparable à une longueur rectiligne).

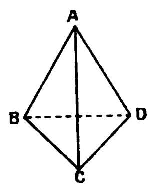


Fig. 18.

Nous pourrons de même comparer et étudier les diverses grandeurs définies par les figures de l'espace autres que la pyramide. Observons cependant, tout de suite, qu'il existe des figures géométriques qui n'ont point de côtés ni de contour, partant point de « périmètre » : ainsi la sphère [4], laquelle a seulement un *corps* et

[1] Sur la pyramide. *cf. infra* 82. Le mot πυραμίς semble avoir été emprunté par les Grecs aux Egyptiens

[2] De nombreux traités de géométrie emploient le mot *volume* dans le même sens que le mot *corps*. Il est bon cependant de ne point confondre les deux idées que nous exprimons par ces mots.

[3] La coïncidence physique des deux corps ne pourrait être réalisée que si les corps étaient pénétrables : on peut toujours imaginer théoriquement qu'il en soit ainsi (les deux corps étant gazeux, par exemple.)

[4] *Vide infra*, n° 87.

une *surface* (surface recourbée, que l'on pourrait *théoriquement* appliquer sur un plan, et dont la grandeur est par conséquent *comparable* à la grandeur d'une surface plane telle que celle d'un carré, d'un polygone ou d'un cercle).

2. — Mesures. Longueur de la circonférence

61. Les mesures. — L'intérêt que présentent les caractères des grandeurs que notre § *1* a mis en lumière tient, comme on sait, au fait suivant : on peut, grâce aux opérations que ces caractères rendent possibles, « mesurer » les grandeurs.

Considérons, par exemple, un segment rectiligne AB. Nous nous attachons à cette grandeur parce que c'est la plus simple de toutes (cf. n° **53**). Mais tout ce que nous allons en dire pourra être étendu aux divers types de grandeurs géométriques tels que angles, aires volumes, etc. (cf. § *3*).

Pour mesurer le segment AB, on prend comme *unité* une longueur fixe, par exemple un *mètre* et, à partir du point A, on porte cette unité, bout à bout, autant de fois que possible sur le segment AB. Il peut se faire qu'après avoir porté l'unité un nombre exact, m, de fois, on tombe exactement au point B ; on dit alors que la longueur AB égale m fois l'unité et qu'*elle a pour mesure, en mètres, le nombre m*.

Supposons, au contraire, que la longueur AB soit plus longue que m fois l'unité et moins longue [1] que $(m + 1)$ fois l'unité : nous dirons en ce cas que m est la *mesure approchée par défaut* (en mètres) de AB, et que $(m + 1)$ en est la *mesure approchée par excès*. Pour avoir de AB une mesure exacte, ou plus exacte, nous devrons prendre une nouvelle unité, plus petite que le mètre, par

[1] Etant donnée une longueur quelconque AB, il existe évidemment toujours un nombre m tel que m *fois* l'unité soit moindre que AB tandis que $(m + 1)$ *fois* l'unité surpasse AB. C'est là une vérité intuitive que nous ne saurions mettre en doute, mais dont nous ne pouvons cependant donner aucune *démonstration*. Cette vérité joue donc, dans les systèmes de géométrie, le rôle d'un *axiome*. Elle a été formulée en ces termes, vers 1880, par le professeur autrichien Stolz, sous le nom d'*axiome d'Archimède* : « Si deux longueurs sont données, il y a toujours un multiple [produit par un nombre entier] de la plus petite qui surpasse la plus grande ».

exemple le centième de mètre ou *centimètre* [la longueur du centimètre est telle que la mesure du mètre en centimètres soit égale à 100] : nous obtiendrons ainsi, soit une mesure exacte (en centimètres), soit une mesure approchée *à un centimètre près* de la longueur AB. Désignons par m cette mesure : nous pourrons dire que la mesure de AB *en mètres*, est la fraction $\frac{m}{100}$ (m centièmes de mètres) ; cette mesure est exacte ou approchée à $\frac{1}{100}$ près. Répétons le même raisonnement en prenant pour unité auxiliaire, non plus le centimètre, mais telle fraction du mètre qu'il nous plaira. Si nous pouvons choisir le nombre entier n de manière que le segment AB contienne un nombre exact de fois, — soit m fois, — la $n^{\text{ème}}$ partie de l'unité, la mesure du segment AB, en mètres, sera donnée par une fraction $\frac{m}{n}$: ce sera un *nombre rationnel* [1]. Dans le cas contraire on constate, en raisonnant comme au n° **48**, que, quel que soit n, on peut former une fraction de dénominateur n qui donne une mesure de AB, approchée à $\frac{1}{n}$ près. En prenant n arbitrairement grand on aura la mesure du segment AB avec une approximation arbitrairement grande.

62. Remarque. — Si nous nous servons, pour représenter les nombres, de la notation décimale, nous aurons avantage à n'utiliser que des nombres n qui soient des puissances de 10, c'est-à-dire à toujours prendre comme unités auxiliaires (*fractions de l'unité principale* ou *sous-unités*) le *dixième*, le *centième*, le *millième*, de l'unité principale. La mesure évaluée par rapport à l'une de ces sous-unités donnera en effet, par rapport à l'unité principale, une mesure exprimée par un nombre décimal. Ainsi une longueur de 3465 millimètres a pour mesures en mètres : 3,465.

(1) Lorsqu'une grandeur a pour mesure un nombre rationnel on dit que cette grandeur et l'unité sont *commensurables* (cf. EUCLIDE, *Elém.*, livre X : σύμμετρα μεγέθη) ou que la grandeur est *commensurable avec l'unité*. Une grandeur non commensurable avec l'unité est dite *incommensurable* (ἀσύμμετρον) *avec l'unité*. — Plusieurs grandeurs sont dites *commensurables* (entre elles) si chacune d'elles est commensurable avec l'une d'entre elles prise pour unité. S'il n'en est pas ainsi, les grandeurs sont *incommensurables* (entre elles).

Les systèmes d'unités et sous-unités ainsi définis, tels que le système : *kilomètre, hectomètre, mètre, décimètre....* ou le système : *kilogramme, hectogramme, gramme, décigramme...*, sont des systèmes de mesures décimales ; leur ensemble constitue ce que l'on appelle un « *système décimal de mesures* [1] ».

63. Mesures définies par des racines. — La mesure que nous venons de définir (comme *nombre rationnel*) est *exacte* ou *approchée*. La distinction ainsi établie entre deux sortes de mesures n'est point accidentelle, car il existe manifestement des grandeurs qui ne peuvent être exactement mesurées par rapport à aucune fraction de l'unité. Considérons, par exemple, le triangle ABC (fig. 19) qui est rectangle en A (c'est-à-dire où l'angle A est un angle droit), dont les côtés AB et AC sont égaux, et qui a une *hypoténuse* (côté BC opposé à l'angle droit) égale à 1 mètre. Le *théorème de Pythagore* [2] nous apprend que la mesure exacte (en mètres) de la longueur AB ne pourrait être que la racine carré du nombre $\frac{1}{2}$; or cette racine, comme celle de 2, n'est pas un nombre rationnel [3] (n° **37**).

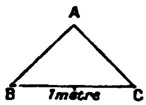


Fig. 19.

Nous pourrions, il est vrai, en ce cas encore, attribuer un sens aux mots « la mesure exacte » : celle-ci ne serait plus un nombre, mais elle serait du moins *définie* (déduite de l'unité) par une opération arithmétique simple (extraction de racine qui peut être effectuée, nous le savons, avec une approximation aussi grande que l'on veut, n° **48**).

N'est-il pas permis de généraliser cette manière de voir et de

[1] Le système de mesures adopté par la loi française (système métrique) est, en majeure partie, décimal (*vide infra*, n° 104).

[2] *Vide infra*, 199.

[3] La longueur AB et l'unité sont, suivant EUCLIDE, commensurables en puissance, car aux termes de la déf. 3 du liv. X des *Eléments*, « deux segments sont commensurables en puissance si les carrés construits sur eux peuvent être mesurés [exactement] avec une même unité d'aire ». Le contemporain de Platon, THÉÈTÈTE d'Athènes, avait fait une étude approfondie des grandeurs — définies par les figures géométriques classiques — qui sont incommensurables avec l'unité. La classification qu'il en avait donnée est sans doute, à peu de choses près, celle qu'expose EUCLIDE au livre X des *Eléments*.

définir la *mesure exacte* d'une grandeur quelconque (longueur, ou angle, ou aire, etc.) comme une quantité qui est le résultat d'opérations arithmétiques [1] effectuées sur l'unité (c'est-à-dire sur le nombre 1)? Si ces opérations sont toutes possibles, la mesure exacte se trouvera être le nombre rationnel défini au n° **61**. S'il y a, au contraire, parmi elles, des extractions de racines impossibles, la mesure exacte ne pourra pas être calculée, et l'on devra se contenter d'une mesure approchée, laquelle sera, précisément, le *résultat approché* des opérations qui définissent la *mesure exacte*.

Cette manière de présenter les choses est légitime dans certains cas, mais non point dans tous, ainsi qu'on le constate, par exemple, lorsqu'on cherche à déterminer la mesure d'une circonférence.

64. Longueur de la circonférence. — Considérons une circonférence (ou cercle) [2] *dont le rayon ait pour mesure l'unité* (par exemple, 1 mètre). Comment mesurer cette circonférence?

Si l'on prend un mètre en ruban et qu'on l'applique sur le contour de la circonférence, on constatera que la longueur du contour n'est exactement égale à aucune fraction de mètre. Cette longueur est comprise entre 6 et 8 mètres, plus précisément entre $2 \times 3,1$ et $2 \times 3,2$, plus exactement encore, entre $2 \times 3,14$ et $2 \times 3,15$. Quelque loin, cependant, que l'on pousse la subdivision du mètre (en millimètres, dixièmes, centièmes de millimètres, etc.) on n'obtient jamais une mesure exacte de la circonférence : on en a seulement des mesures de plus en plus approchées.

Mais la mesure effective d'une circonférence au moyen d'un mètre flexible est une opération physique qui ne présente aucune

[1] Lorsqu'une mesure ou une quantité est définie comme résultat de telles opérations, on dit qu'elle est *calculable par radicaux*.

[2] On appelle *circonférence* ou *cercle* la ligne formée par l'ensemble des points situés à égale distance d'un même point appelé *centre* du cercle; le segment de droite joignant le centre à un point quelconque de la circonférence s'appelle *rayon* (*radius*). Il est bon de noter que le mot *circonférence* désigne exclusivement le contour (περιφέρεια) du cercle; le mot *cercle*, au contraire, sert également à désigner la surface limitée par ce contour. Le segment (double du rayon) qui joint, en passant par le centre, deux points opposés de la circonférence (et la coupe en deux), s'appelle *diamètre*.

garantie. Nous avons déjà dit que les géomètres ne pouvaient en faire état et devaient avoir recours à une méthode théorique, seule susceptible d'être rigoureusement précise. C'est pourquoi ils imaginèrent la méthode d'*exhaustion* (cf. n° 58), que l'on appellerait aujourd'hui méthode du *passage à la limite* ([1]). Encore, Euclide, le prudent, n'ose-t-il appliquer directement cette méthode ([2]) au problème de la rectification du cercle dont les termes mêmes ne lui paraissent pas logiquement recevables ; car, pour seulement parler de la longueur du cercle mesurée avec une unité rectiligne, il faudrait l'avoir *définie*, c'est-à-dire connaître un procédé de construction géométrique (*vide infra*, ch. III, § 5) qui fournisse un segment « égal » à la circonférence du cercle : il faudrait donc avoir déjà résolu le problème de mesure que précisément l'on se pose. C'est le grand géomètre sicilien Archimède ([3]) qui résolut, le premier, ou plutôt trancha cette difficulté logique : il comprit qu'en déterminant une mesure *arbitrairement approchée par excès ou par défaut* de la longueur du cercle, on se trouve vérifier par surcroît que cette longueur *existe* ([4]) [j'entends : vérifier que l'on pourrait, théoriquement, construire un segment rectiligne qui soit égal à la circonférence] (ce qu'au n° 57 nous avons admis comme intuitivement évident).

65. — Considérons ([5]), — pour appliquer la méthode *d'exhaustion* — un carré ABCD (fig. 20) inscrit dans la circonférence

([1]) Voir sur le mot « limite » p. 55, note 2. Le mot « exhaustion » est du XVII[e] siècle. On le trouve en particulier chez Grégoire de Saint-Vincent (*vide infra*, 67).

([2]) En revanche Euclide applique, par exemple, la méthode d'exhaustion, à la démonstration du théorème suivant : *les aires de deux cercles différents sont proportionnelles* (*vide* n° 98) *aux carrés de leurs diamètres* : ici, en effet, l'assimilation de la circonférence à un contour rectiligne et de l'aire du cercle à une aire polygonale n'est pas postulée.

([3]) Dans le traité intitulé : κύκλου μέτρησις. Cf. Heath, *The works of Archimedes*, Cambridge, 1897, p. 91.

([4]) Sur les conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs approchées pour que cette conclusion soit valable, voir p. 80, note 2.

([5]) C'est la méthode suivie par Antiphon (5[e] siècle av. J.-C.) qui s'inspire peut-être de la tradition pythagoricienne. Sur les moyens à employer pour construire le carré inscrit ou circonscrit — et les polygones réguliers dont il sera question plus loin — voir le liv. II des *Eléments* d'Euclide et tous les traités de géométrie.

(c'est-à-dire intérieur à la circonférence et ayant ses quatre sommets A, B, C, D sur son contour) : la mesure (exacte ou très approchée) du contour de ce carré est une mesure approchée par défaut [1] de la longueur du cercle. Considérons au contraire (fig. 21) le carré A'B'C'D' *circonscrit* (extérieur au cercle et dont chaque côté est tangent au cercle, c'est-à-dire le touche en un seul point) ; la mesure du contour de ce carré est une

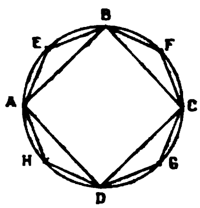


Fig. 20.

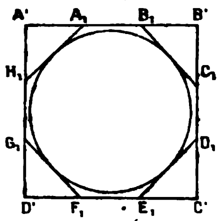


Fig. 21.

mesure approchée par excès de la longueur du cercle. Envisageons ensuite sur la figure 20, au lieu du carré ABCD, le polygone à huit côtés égaux (*octogone régulier*) AEBFCGDH qui est inscrit dans le cercle (ses huit sommets sont sur le cercle) ; la mesure du contour de cet octogone est une nouvelle valeur approchée par défaut de la longueur du cercle, valeur plus approchée que la précédente ; pareillement, sur la figure 21, la mesure du contour de l'octogone régulier [2] $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ est une mesure approchée par excès (plus approchée que la valeur donnée par le carré A'B'C'D') de la longueur du cercle.

Supposons, maintenant, que nous considérions, non plus un carré ou un octogone, mais un polygone régulier [3], ayant beaucoup plus de côtés, tous très petits, et dont la figure se rapproche par conséquent autant que nous le voulons de la figure même du

[1] Je regarde comme évident que le contour d'un carré ou polygone *inscrit* est moindre que le contour de la circonférence, tandis que le contour d'un carré ou polygone *circonscrit* est supérieur. On le voit immédiatement sur la figure.

[2] Sur l'emploi des lettres affectées d'indices, voir p. 20, note 2.

[3] Un polygone dont les côtés et les angles sont égaux (comme il arrive pour l'octogone AEBFCGDH de la figure 20) est appelé *polygone régulier* (cf. EUCLIDE, *Eléments*, livr. IV).

cercle ([1]) ; ce polygone peut être *inscrit* dans le cercle (c'est-à-dire intérieur au cercle, ses sommets étant tous sur le cercle, *exemple* : le polygone ABCD... sur la figure 22) ou *circonscrit* au cercle

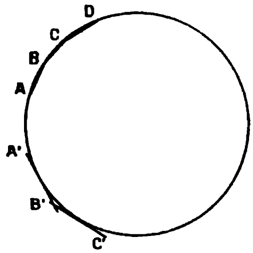


Fig. 22.

(extérieur, chacun de ces côtés touchant le cercle en un point, *exemple* : le polygone A'B'C'D' ... sur la figure 22) ; la mesure du contour du polygone est toujours, dans le premier cas, une mesure approchée par défaut, dans le second cas une mesure approchée par excès de la longueur du cercle ; l'approximation est d'ailleurs *arbitrairement grande* (*vide* n° **47**) ; aussi dit-on que les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits ont pour *limite* la longueur du cercle lorsqu'on leur donne un nombre de côtés de plus en plus grand.

66. Remarque. — Pour justifier rigoureusement ces conclusions, on prouve que la mesure du contour d'un polygone inscrit et celle du contour d'un polygone circonscrit sont arbitrairement rapprochées *l'une de l'autre* lorsque les polygones ont suffisamment de côtés ; il en résulte que *l'une et l'autre* donnent bien ([2]) des valeurs arbitrairement approchées de la longueur du cercle.

([1]) En donnant au polygone de plus en plus de côtés nous *épuisons* progressivement l'aire du cercle : d'où le mot « exhaustion ».

([2]) puisque la longueur du cercle est comprise (voir p. 79, note 1) entre les longueurs de ces deux contours. — Que ce complément de démonstration, détaillé avec soin par Archimède, soit effectivement nécessaire, c'est ce dont on se convaincra si l'on fait attention au fait suivant. De ce qu'un contour polygonal, auquel on donne de plus en plus de côtés, *tend* vers une ligne géométrique connue (c'est-à-dire a une figure qui diffère de moins en moins de cette ligne) il ne résulte pas que la longueur du contour ait pour limite la longueur de la ligne connue. Donnons-nous, par exemple (fig. 23) un triangle équilatéral ABC, et considérons successivement les contours polygonaux suivants :

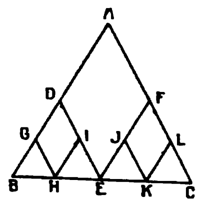


Fig. 23.

BDEFC, à 4 côtés (D, E, F étant le milieu des côtés du triangle) ;

BGHIEJKLC, à 8 côtés (G, H, I étant les milieux des côtés du triangle BDE et J, K, L les milieux des côtés du triangle EFC) ;

puis les contours à 16, 32,... côtés, qui se déduisent les uns des autres d'après le même procédé.

Ces divers contours ont pour limite la ligne BC. Cependant on démontre

67. — Voilà comment ont raisonné les géomètres [1]. Mais c'est ici que surgit l'anomalie, ou, du moins, ce qui fut longtemps considéré comme tel. Le contour du carré ABCD, celui de l'octogone régulier AEBFCGDH, ou celui d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit, ayant un nombre $2n$ de côtés, tous ces contours ont des mesures qui peuvent être définies (déduites de l'unité) au moyen d'opérations arithmétiques connues [2]; ainsi le contour du carré ABCD a pour mesure exacte $4 \times \sqrt{2}$ (le sens de l'expression « mesure exacte » étant élargi comme il a été dit au n° **63**); le contour du carré circonscrit A'B'C'D' a pour mesure 8; le contour de l'octogone AEBFCGDH (fig. 21) a pour mesure $8 \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, etc. Pourra-t-on, semblablement, indiquer une combinaison d'*opérations connues* dont le résultat définisse la mesure de la circonférence? La réponse est négative [3], mais les géomètres ont été longs à s'en convaincre, et les tentatives faites, vingt siècles durant, pour trouver une expression arithmétique de la longueur du cercle, se comptent par milliers. L'une des plus célèbres est celle de *Grégoire de Saint-Vincent* (auteur de *l'Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni*, 1647), qui fut combattue par Descartes, Pascal, Huygens. Aujourd'hui encore, les Académies Scientifiques sont saisies presque chaque année de nouvelles solutions du problème de la « rectification » ou « quadrature » du cercle. Et cependant, l'*impossibilité* de la résolution de ce problème [4], pressentie par Legendre et Euler, a été prouvée en toute rigueur,

que *leurs longueurs sont toutes égales entre elles et égales au double du côté du triangle équilatéral.*

[1] Ils ont aussi imaginé de nombreuses méthodes indirectes qui conduisent à des résultats équivalents.

[2] Ce sont là des conséquences immédiates des théorèmes de la géométrie métrique (voir chap. III, § 3).

[3] Et cela, en donnant aux mots « opérations connues » qui figurent dans l'énoncé de la question, l'acception la plus générale qu'ils puissent comporter. On ne peut former (*vide infra*, *Deux. Liv.*) aucune équation $a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ de quelque degré que ce soit, dont les coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ soient des nombres rationnels et qui ait pour racine (valeur de l'inconnue x) la mesure de la longueur du cercle de rayon 1.

[4] Il existe par contre certaines courbes (autres que le cercle) dont la longueur *exacte* est mesurée par un nombre rationnel pouvant être calculé. De telles courbes sont dites *rectifiables.*

en 1882, par le professeur Lindemann [1] de l'Université de Munich.

Ainsi, la mesure de la circonférence par rapport au rayon (pris pour unité) ne peut être définie au moyen d'opérations arithmétiques que d'une manière approximative. Tout ce qu'en peut dire l'arithméticien, c'est, par exemple, qu'elle est comprise entre [2] $2 \times 3{,}1415926535$ et $2 \times 3{,}1415926536$, valeurs que l'on pourra toujours préciser en calculant de nouvelles décimales.

La circonférence dont le rayon a pour mesure un nombre r est r fois plus grande. Sa mesure est comprise entre $2 \times r \times 3{,}1415\ldots5$ et $2 \times r \times 3{,}1415\ldots6$.

Ajoutons qu'au lieu d'une fraction décimale, on peut utiliser, pour représenter la mesure du cercle avec une approximation *arbitrairement* grande, d'autres types d'expressions arithmétiques dont nous nous occuperons plus loin (§ 7).

68. — *La demi-longueur de la circonférence de rayon 1 est désignée, d'ordinaire, par la lettre* π. On exprime l'impossibilité de la « rectification » du cercle (au sens du nº 63) en disant que la longueur π et le nombre qui la mesure sont *transcendants* [3].

69. — Après les mesures de longueurs, il convient d'étudier les mesures d'aires et de volumes. Mais ici nous rencontrons une difficulté. Il est absolument impossible, en effet, de mesurer les surfaces et les corps sans tenir compte de leurs figures et sans invoquer certains théorèmes de géométrie pure dont nous ne nous occuperons que plus loin (chap. III). Cependant, afin de ne pas séparer en deux tronçons la théorie de la mesure, nous avons cru

(1) *Berichte der Berliner Akademie*. 1882, II.

(2) Ces valeurs approchées ont été données par VIÈTE (*Variorum de rebus mathematicis responsorum liber* VIII, 1597, chap. XV : *Geometrica* κύκλου μέτρησις, *bene proxima verae*). ARCHIMÈDE, dans sa κύκλου μέτρησις avait indiqué les valeurs : $2 \times \left(3 + \frac{1}{7}\right)$ (approchée par défaut) et $2 \times \left(3 + \frac{10}{71}\right)$. Des valeurs tout aussi approchées furent données par les mathématiciens hindous qui sans doute les trouvèrent indépendamment des Grecs bien qu'ils vinssent sept siècles plus tard (*Leçons de calcul d'Aryabhata*, trad. Rodet, *Journ. asiatique*, t. XIII, p. 399 et suiv.).

(3) *Quantitas transcendens* dit LEIBNIZ, *Acta eruditorum*, 1703, p. 20 (*Continuatio analyseos quadraturarum*) et *Math. Werk.*, V, p. 35.

devoir rappeler tout de suite, dans un paragraphe spécial formant parenthèse, les règles bien connues du « système métrique », qui permettent le calcul des aires et des volumes. D'une part, en effet, l'exposé de ces règles n'offre au point de vue de la géométrie des figures qu'un intérêt secondaire. Et d'autre part, il complètera utilement ce que nous avons dit et dirons encore du calcul des grandeurs, en nous faisant voir nettement de quelle manière les grandeurs géométriques peuvent se combiner suivant les lois de l'arithmétique.

3. — Digression sur la mesure des aires et des volumes en géométrie rationnelle.

70. — Revenons d'abord un peu en arrière, et complétons par quelques remarques les observations que nous avons présentées touchant le problème de la mesure.

Soit à mesurer une *aire plane* (n° **55**). Prenant comme unité d'aire le *mètre carré* — c'est-à-dire l'aire du carré dont le côté est long d'un mètre, — nous pouvons, *théoriquement* du moins, placer sur la surface à mesurer (de manière à la recouvrir aussi exactement que possible) un certain nombre de carrés égaux à l'unité ou de fractions de ces carrés (cf. n° **55**). Mais comment réaliserons-nous en fait, une semblable opération? Ou plutôt, puisquelle n'est pas réalisable, comment, pourrons-nous en prévoir le résultat sans l'effectuer. Telle est la question à laquelle ont dû répondre les premiers géomètres. La même question se pose au sujet des volumes (cf. n° **60**) lorsqu'on cherche à les mesurer en prenant pour unité le *mètre cube*, c'est-à-dire le volume du cube dont le côté est 1.

71. — Le problème ainsi formulé peut être étudié de deux points de vue différents. On peut renoncer de prime abord à trouver une mesure exacte de la grandeur que l'on considère : c'est ce que fait la géométrie empirique. On peut au contraire, — et c'est là ce que veut faire la géométrie rationnelle, — chercher à établir qu'étant

spécifiée une forme de grandeur, la mesure d'une grandeur de cette forme est égale à la mesure d'une grandeur correspondante ayant une forme plus simple : j'entends par là que, *si loin que soit poussée l'approximation*, on trouvera *le même nombre comme mesure* des deux grandeurs correspondantes ([1]) ; ce qui indique — notons-le en passant — que, dans le monde idéal des êtres géométriques, les deux grandeurs jouissent d'une propriété commune, ont une parenté, totalement indépendante de nos procédés de mesure et de leur plus ou moins grande approximation (comparer le n° **88**).

Les calculateurs égyptiens ([2]) se plaçaient au point de vue empirique lorsque, pour avoir la mesure d'un triangle ABC où l'angle A est petit (fig. 24), ils faisaient le produit des mesures de AB et de BC et divisaient par 2 ; règle qui n'est que très grossièrement approximative ([3]). Le géomètre grec, au contraire (*vide infra* n° **76**) — lorsqu'il démontre que la mesure de l'aire du triangle est égale au demi-produit des mesures de BC et de la hauteur AH (fig. 24) — se place au point de vue théorique. Aussi son œuvre est-elle impérissable : les instruments ont beau se perfectionner et nous permettre d'atteindre une approximation plus grande, la relation constatée par lui entre la grandeur d'une aire et celle de deux longueurs ne saurait être altérée.

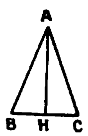


Fig. 24.

72. — Comment maintenant, la géométrie rationnelle parvient-elle à ses fins ? Elle n'effectue pas de calculs numériques, mais, remontant à l'origine de la notion de mesure, elle « opère » directement sur les figures des grandeurs en cherchant à y discerner certains points, lignes ou surfaces auxquels elle puisse appliquer les théorèmes connus (je veux dire : les théorèmes dont elle dispose déjà). D'ailleurs, il lui faut d'ordinaire pour pouvoir appliquer ces

([1]) Les unités avec lesquelles sont mesurées les grandeurs étant supposées choisies à l'avance et une fois pour toutes.

([2]) Cf. le *Manuel du calculateur* d'Ahmes : *vide* Eisenlohr (*supra*, p. 2, note 2), *op. cit.*, p. 126 sqq.

([3]) La méthode égyptienne est en revanche parfaitement recommandable si l'imperfection des instruments dont nous disposons doit nous faire perdre en tout cas le bénéfice que nous tirerions de la connaissance d'une règle exacte.

théorèmes, compléter les figures sur lesquelles elle raisonne en y adjoignant (par la pensée tout au moins) certains points, ou lignes, ou surfaces auxiliaires. Les opérations qu'elle effectue reviennent donc, en définitive, à des *constructions* théoriques de certaines figures géométriques qui sont en relation avec les figures données (sur le sens du mot *construction* en géométrie, voir ch. III, § **5**).

C'est par de tels moyens, nous l'avons vu, qu'Archimède a déterminé la longueur de la circonférence. C'est également par de tels moyens que la géométrie rationnelle enseigne à calculer les aires et les volumes formés par les figures les plus simples.

73. Aire d'un rectangle. Produit de deux longueurs. — Cherchons à mesurer l'aire d'un *rectangle* ABCD (quadrilatère dont les quatre angles sont droits) sachant que les côtés AB et BC ont respectivement pour mesures (par rapport à l'unité de longueur) les nombres a et b.

Supposons, en premier lieu, que les nombres a et b soient entiers.

Nous considérerons d'abord le rectangle BCC_1B_1 dont les côtés, BC et BB_1 ont pour mesures a et 1 (fig. 25). Portant sur BC la longueur BG de mesure 1, je construis le carré BGG_1B dont la surface sera prise pour *unité d'aire* (n° **69**). Or on voit immédiatement qu'autant de fois la longueur BC contient la longueur-unité BG,

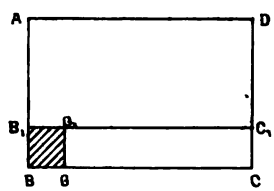


Fig 25.

autant la bande rectangulaire BCC_1B contient de carrés égaux à BGG_1B. Donc l'aire de cette bande rectangulaire a pour mesure le nombre a [a mètres carrés si l'unité de longueur est le mètre]. Cela dit, le rectangle ABCD contient évidemment autant de bandes rectangulaires égales à BCC_1B que le côté AB contient de fois la longueur-unité BB_1 : il en contient donc b. J'en conclus que le rectangle proposé ABCD, contient $a \times b$ carrés égaux à l'unité d'aire : *il a pour mesure le produit* $a \times b$ (1).

Si les nombres a et b, au lieu d'être entiers, étaient simplement rationnels, on parviendrait à la même conclusion à condition de

(1) C'est pourquoi le produit $a \times b$ de deux nombres cardinaux est dit ***nombre plan*** : il représente une surface (portion du plan), celle d'un rectangle.

prendre une unité auxiliaire contenue un nombre exact (entier) de fois ([1]) dans a et dans b.

Supposons maintenant que les longueurs AB et CD n'aient point de mesures exactes (nombres rationnels) par rapport à l'unité BB_1. En ce cas nous ne pouvons donner du rectangle ABC (par rapport à l'unité d'aire) qu'une mesure approchée. Désignant par α, β des mesures arbitrairement approchées de AB et CD, nous pouvons construire un rectangle dont les côtés aient pour mesure α et β et qui recouvre avec une approximation arbitrairement grande le rectangle donné. *Plus les mesures α et β seront approchées, plus le produit $\alpha \times \beta$ sera une mesure approchée du rectangle* ABCD.

Ces remarques nous conduisent à regarder en tout cas la construction d'un rectangle dont les côtés sont des longueurs données AB, CD, comme une *opération équivalente à la multiplication arithmétique*. Nous dirons que l'*aire du rectangle* ABCD (rectangle *construit sur* AB *et* CD) *est le* « *produit* ([2]) » *des deux longueurs* AB *et* CD [*appelées* « *dimensions* » *du rectangle*]. Pour avoir une mesure exacte ou approchée de ce produit, on n'a qu'à faire le produit des mesures exactes ou approchées des deux longueurs.

D'ailleurs, en conséquence des théorèmes de la géométrie, la « construction » d'un rectangle dont on connaît deux dimensions est toujours réalisable avec la règle et le compas ([3]). La multiplication géométrique est donc une opération parfaitement et rigoureusement définie.

74. — Ces préliminaires posés, si nous démontrons d'une aire donnée quelconque qu'elle est égale (n° **55**) à l'aire d'un rectangle

([1]) Cela est toujours possible puisque les fractions qui ont pour valeurs a et b peuvent toujours être réduites au même dénominateur. Soit n ce dénominateur : la $n^{ième}$ partie de l'unité de surface sera l'unité auxiliaire requise.

([2]) Au lieu de dire que le *rectangle* est un *produit*, les anciens employaient le mot *rectangle* (rectangle de deux quantités, rectangle de deux nombres) dans le sens où nous prenons le mot *produit*. Nous avons nous-mêmes continué à appeler *carré* le *produit* d'un nombre par lui-même. Le carré d'une longueur AB est désigné par le symbole AB^2.

([3]) Prenant sur une droite un segment AB ayant pour longueur une dimension a du rectangle, il faudra mener en A et B des perpendiculaires à AB (sur lesquelles on prendra des longueurs égales à b) : or c'est là une construction que la géométrie rationnelle enseigne à faire très simplement (*vide infra*, 234).

ABCD que nous savons construire, nous pourrons considérer la mesure de cette aire comme théoriquement déterminée et nous dirons que l'aire est égale au « produit des deux dimensions du rectangle ».

Rappelons, comment, pour les figures classiques les plus simples, le problème peut être ainsi résolu.

75. Parallélogrammes, triangles, polygones ([1]). — On appelle *parallélogramme* ([2]) un quadrilatère (p. 69, note 1) dont les côtés sont deux à deux parallèles.

Pour mesurer l'aire du parallélogramme ABCD (fig. 26), abaissons des points A et D les perpendiculaires AH et DK sur BC et son prolongement. On démontre que ([3]) les deux triangles ABH, DCK sont égaux (superposables). Donc on a :

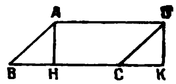


Fig. 26.

surface AHCD + surface ABH = surface AHCD + surface CDK,

c'est-à-dire :

surface du *parallélogramme* ABCD = surface du *rectangle* AHKD.

Appelons alors *base* ([4]) (βάσις) du parallélogramme le côté BC

([1]) Le lecteur trouvera dans tous les traités de géométrie élémentaire les démonstrations des propositions que nous nous bornons à énoncer. Ces démonstrations reposent sur les définitions et propriétés fondamentales des droites perpendiculaires et parallèles, savoir :

Une droite est perpendiculaire sur une autre si elle forme avec elle deux angles droits (voir n° 54).

Par un point A pris *sur* une droite on peut mener une et une seule (droite) perpendiculaire à cette droite. — D'un point H pris *hors* d'une droite on peut abaisser une perpendiculaire et une seule sur cette droite.

Deux droites sont dites parallèles si elles ne se rencontrent pas quelque loin qu'on les prolonge.

Par un point pris hors d'une droite on peut toujours mener une parallèle à cette droite ; on n'en peut mener qu'une seule d'après le postulat dit *Postulat d'Euclide* (voir *Deux. liv.*, V, § 9).

([2]) De παράλληλος, parallèle et γραμμή, droite. Un parallélogramme dont les angles sont droits est un *rectangle*. Un parallélogramme dont tous les côtés sont égaux est appelé *losange* (ou *rhombe*).

([3]) En appliquant les théorèmes des n°s 168, 172.

([4]) On peut naturellement prendre pour *base*, au lieu de BC, un côté quelconque du parallélogramme ; une démonstration semblable conduit

(c'est l'un quelconque des côtés du parallélogramme) et *hauteur* (ὕψος) la longueur AH ou DK, c'est-à-dire la distance des deux côtés parallèles BC et AD. Nous pouvons dire que *l'aire du parallélogramme est égale au produit de la longueur de sa base par sa hauteur.*

76. — Soit maintenant proposé le *triangle* ABC (τρίγωνον). Le triangle peut être regardé comme la moitié du parallélogramme ABCD (fig. 27) ; en effet, on démontre que les deux triangles ABC, DCA qui composent ce parallélogramme sont égaux (superposables). Appelons alors, *hauteur* (¹) (relative au côté BC) la perpendicu-

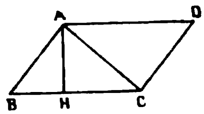


Fig. 27.

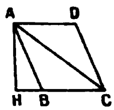


Fig 28.

laire AH abaissée du sommet A sur le côté opposé BC. Nous pouvons dire que *l'aire du triangle* $\left(\frac{BC \times AH}{2}\right)$ *est égale au demi-produit de la longueur de sa base par la longueur de sa hauteur.* [On peut naturellement prendre pour base un côté quelconque du triangle ; à chaque côté correspond une hauteur].

Remarque. — Les conclusions sont les mêmes dans le cas où le *pied* H de la hauteur n'est pas entre B et C mais bien sur le prolongement de BC; ainsi dans la figure 28 l'angle ABC est alors obtus, tandis qu'il est aigu dans les figures 26 et 27.

77. — Considérons enfin un *polygone quelconque* (**55**), par exemple le pentagone ABCDE. Prenant un point O à l'intérieur

aux mêmes conclusions, d'où il résulte que, de quelque côté que l'on parte, le produit de la longueur de ce côté par la hauteur correspondante a la *même valeur*.

(¹) Par le mot *hauteur* nous désignons en général une longueur [cf. n° 79, 80, 81, etc.]. Dans le cas du triangle, cependant (et dans le cas de la pyramide, *vide infra*) le même mot « hauteur » désigne indistinctement, tantôt le segment de droite tel que AH, tantôt la longueur de ce segment. Il en sera de même pour le mot *côté* (côté d'un triangle ou d'un polygone) et, chez certains auteurs, pour le mot *base* (d'un triangle ou d'un parallélogramme).

de ce polygone et joignant ce point aux divers sommets (fig. 29) nous décomposons le polygone en triangles. Evaluant séparément les aires des triangles et faisant leur somme, nous aurons l'aire du polygone.

Exemple. — Soit à évaluer l'aire d'un *trapèze* [1] (quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et inégaux, (fig. 30)). Appelant de *bases* les deux côtés parallèles et *hauteur* (du trapèze) la longueur la perpendiculaire AH aux bases nous démontrons (en décomposant le trapèze en deux triangles ADC. ABD) que *l'aire du trapèze est égale au demi-produit de la demi-somme des longueurs de ses bases par sa hauteur* [2].

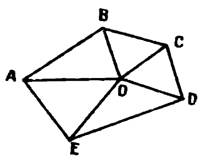


Fig. 29.

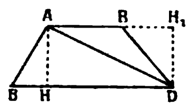


Fig. 30.

78. Stéréométrie. — La mesure des volumes des *corps* ou *solides* géométriques (στερέα), — on appelle ainsi les figures géométriques tracées dans l'espace à *trois dimensions* et pourvues d'un *volume* (voir n° **60**), — est l'objet de la *stéréométrie.* Cette science ne suivit que de loin les progrès de la *planimétrie*, bien que l'on trouve déjà dans le manuel d'Ahmes quelques mesures *approximatives* de volume (comparer n° **71**). L'ignorance où nous sommes, — opinait Platon dans les premières années du IVe siècle (*Lois* VII, chap. 21), — par rapport à la mesure des corps suivant leur longueur, largeur et profondeur, convient moins à des hommes qu'à de stupides animaux : « j'en ai rougi non seulement pour moi-même, mais pour tous les Grecs ». Protestation sévère, mais qui porta ses fruits : car lorsque Platon mourut en 348, les bases de la stéréométrie étaient d'ores et déjà, grâce aux travaux d'*Archytas* de Tarente et d'*Eudoxe* de Cnide, solidement établies.

[1] Le mot τραπέζιον a été employé par les Grecs dans des acceptions diverses ; celle que nous indiquons a seule subsisté.

[2] Les hauteurs des deux triangles AH et DH_1 (voir fig. 30) sont égales.

Pour mesurer les volumes, nous raisonnerons et procèderons comme nous l'avons fait pour mesurer les surfaces [1].

[1] Je rappelle les énoncés des propriétés fondamentales des plans sur lesquelles reposent les définitions des figures *solides* dont nous allons nous occuper.

Par trois points quelconques de l'espace, non situés sur une même droite, il passe un plan et un seul (nous nous dispensons de définir la notion de plan. *voir supra*, nº 52). Ce plan contient toutes les droites qui joignent l'un des trois points (C sur la figure) à un point arbitraire M de la droite indéfiniment prolongée qui passe par les deux autres points (A et B sur la fig. 31).

Par définition, la *parallèle* à une droite AB menée par un point C est la parallèle CD (fig. 31) menée à AB par C dans le plan déterminé par la droite AB et le point C.

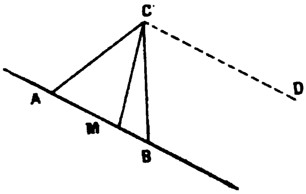
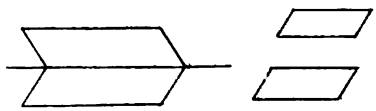


Fig. 31.

Deux droites qui se coupent, telles que CM, AB (fig. 31) ou *deux droites parallèles* telles que AB, CD *déterminent un plan* [c'est-à-dire qu'il existe un plan et un seul contenant ces deux droites]. Si deux droites ne se coupent pas et ne sont pas parallèles, elles sont dans des plans différents.

Deux plans quelconques se coupent suivant une droite [c'est-à-dire ont en commun une droite, indéfiniment prolongeable dans les deux sens, appelée *intersection* des deux plans] et forment un dièdre (nº 59), — ou sont *parallèles* [fig. 32; sur la figuration d'un plan par un parallélogramme, voir 59].


Fig. 32.

Un plan est dit *parallèle à une droite donnée* (située hors de lui) *s'il contient une droite parallèle à cette droite donnée.*

Un plan — je le désigne par une lettre, soit P — *qui est parallèle à un autre plan* Q *est parallèle à toutes les droites contenues dans le plan* Q.

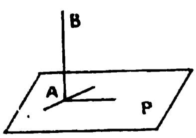


Fig. 33.

Par un point extérieur à un plan donné P, *il passe un plan parallèle à* P *et un seul.*

Quand deux plans sont parallèles leurs intersections par un troisième plan quelconque sont deux droites parallèles.

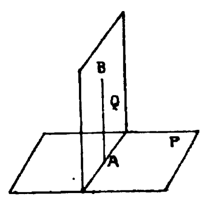


Fig. 34.

Une droite BA (fig. 33) qui coupe un plan P au point A est dite *perpendiculaire* sur ce plan si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan P qui passent par A.

Par un point A d'un plan P on peut mener une droite et une seule perpendiculaire au plan P.

D'un point B *pris hors d'un plan* P *on peut abaisser une droite et une seule perpendiculaire sur le plan* P.

Deux droites perpendiculaires à un même plan sont perpendiculaires.

Un plan Q (fig. 34) est dit *perpendiculaire* à un autre plan P s'il con-

Nous commencerons donc par considérer les *polyèdres*, figures de l'espace qui correspondent aux figures planes appelées *polygones*.

Un *polyèdre* (πολυεδρόν) est un solide limité par des polygones situés dans des plans différents et ayant deux à deux un côté commun (exemple : fig. 35). Les polygones sont les *faces* du polyèdre, leurs côtés en sont les *arêtes*, leurs sommets en sont les *sommets*.

Le polyèdre le plus simple est le *cube* (κύβος), corps limité par six carrés égaux (fig. 36). Le cube qui a pour face l'unité de surface est, par définition, l'unité de volume. Ainsi le volume du cube dont l'arête est 1 mètre a pour mesure un *mètre cube*.

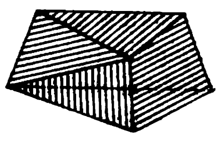


Fig. 35.

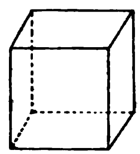


Fig. 36.

79. Volume du parallélépipède rectangle. Produit de trois longueurs. — On appelle *parallélépipède rectangle* (παραλληλεπίπεδον), un corps limité par six rectangles, opposés et égaux deux à deux ([1]) (*exemple* : une boîte, une chambre, fig. 37). On démontre que toutes les arêtes du parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' sont égales soit à AB, soit à AD, soit à AA'. Ces trois longueurs sont appelées *les trois dimensions* ([2]) du parallélépipède : on peut regarder la longueur AA' comme la *hauteur* et AB, A'B' comme les deux côtés (dimensions) de la *base* ABCD du parallélépipède.

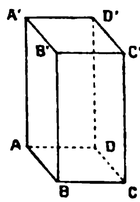


Fig. 37.

On peut raisonner sur le parallélépipède rectangle comme sur le rectangle plan. Supposons d'abord que les trois dimensions AB,

tient une droite perpendiculaire à ce plan (il contient en ce cas une infinité de telles droites).

Ces diverses propositions, que nous dicte immédiatement notre intuition peuvent être déduites logiquement d'un petit nombre de définitions et postulats. Elles sont démontrées au XIe livre des *Eléments* d'Euclide.

([1]) Les rectangles opposés sont situés dans des plans parallèles.

([2]) On les appelle souvent : *longueur*, *largeur*, *profondeur* (μῆκος, πλάτος, βάθος, dit Euclide).

AD, AA′ aient (par rapport à l'unité de longueur) des mesures exactes (nombres rationnels) a, b, c. On démontre que la mesure du parallélépipède (par rapport au cube-unité) est le produit [1] $a \times b \times c$. Si, par contre, les trois dimensions n'ont pas de mesures exactes, le produit de leurs mesures approchées donne la mesure du parallélépipède avec une approximation arbitrairement grande. Nous concluons de là que *la construction d'un parallélépipède rectangle sur trois longueurs données* (c'est-à-dire : *ayant pour dimensions trois longueurs données*) *est une opération équivalente à la multiplication arithmétique de trois facteurs*. Nous conviendrons donc de dire que le volume du parallélépipède rectangle ABCDA′B′C′D′ est le *produit des trois longueurs* AB, AD, AA′.

Cela dit, si nous démontrons d'un volume donné quelconque qu'il est égal au volume d'un parallélépipède rectangle que nous savons construire [voir au n° **60** la définition de l'égalité entre les volumes de deux corps] nous pourrons considérer la mesure de ce volume comme théoriquement déterminée. C'est en ce sens que la géométrie rationnelle résout le problème de la mesure des volumes.

80. Volume d'un prisme droit. — On appelle *prisme* [2] *droit* un corps limité par deux polygones égaux situés dans des plans parallèles [ces polygones sont les *bases* du prisme, ABCDE et A′B′C′D′E′ sur la fig. 38] et par des rectangles joignant deux à deux les côtés correspondants (parallèles) des bases (rectangles ABA′B′, BCB′C′, etc., sur la fig. 38) ; l'ensemble des rectangles constitue la *surface latérale* du prisme ; les côtés AA′, BB′, etc., sont les *arêtes* ; ces arêtes sont *perpendiculaires* sur les plans des bases et leur longueur commune est appelée « *hauteur* » du prisme.

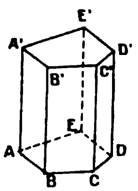


Fig 38.

Lorsque les bases d'un prisme droit sont des parallélogrammes, ce prisme est appelé *parallélépidède droit*. En raisonnant sur un tel parallélépipède comme sur le parallélogramme (n° **75**), nous démontrons que le volume du parallélépipède ABCDA′B′C′D′

(1) C'est pourquoi le produit de trois nombres cardinaux, qui représente le volume d'un solide, est appelé *nombre solide*.

(2) Πρίσμα de πρίειν scier, cf. Euclide, liv. XI, déf. 13.

(fig. 39) est *égal* au volume du parallélépipède rectangle AEFDA′E′F′D′ qui a une *base égale* et une *hauteur égale*. J'en conclus que le volume de ABCDA′B′C′D′ est égal au produit de *l'aire de sa base par sa hauteur*.

Le volume du *prisme droit à base triangulaire* ABCA′B′C′B′ (fig. 40) est manifestement la moitié du volume du parallélépipède

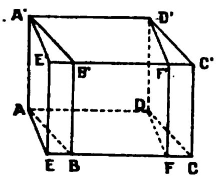


Fig. 39.

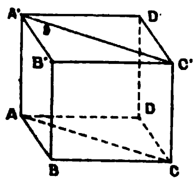


Fig. 40.

droit ABCDA′B′C′D′ ; or la base de ce prisme (triangle ABC) est la moitié du parallélogramme ABCD : donc *le volume du prisme droit à base triangulaire est encore le produit de l'aire de sa base par sa hauteur*.

Cela dit, nous remarquons qu'un *prisme droit quelconque* tel que ABCDEA′B′C′D′E′ (fig. 41) peut toujours être décomposé en prismes droits à bases triangulaires. [Ainsi, en menant sur la figure 41 les droites AC, AD et A′C′ et A′D′, nous décomposons notre prisme en trois prismes à bases triangulaires ABCA′B′C′, ACDA′C′D′, ADEA′D′E′], D'ailleurs tous ces prismes ont même hauteur et la somme des aires de leurs bases est l'aire du prisme total. Donc *le volume de ce dernier est encore égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur*.

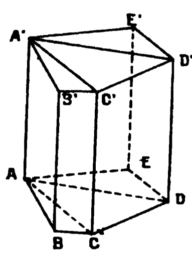


Fig. 41.

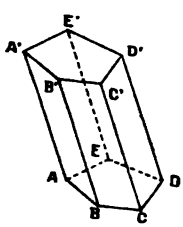


Fig. 42.

81. Prismes obliques. — On appelle *prisme oblique* un corps limité par deux polygones égaux situés dans des plans parallèles (ce sont les bases du prisme, ABCDE et A′B′C′D′ sur la fig. 42) et par des *parallélogrammes* joignant deux à deux les côtés des bases (parallélogrammes ABA′B′, etc., sur la fig. 42); les côtés AA′, BB′,... sont les *arêtes* du prisme. La

longueur HH′ d'un segment de droite compris entre les deux bases et perpendiculaire à leurs plans est appelée « hauteur » du prisme ([1]).

Ceci posé, on démontre que tout prisme oblique est *égal* à un prisme droit ayant une base d'aire égale et une hauteur égale. On en conclut que le *volume du prisme oblique est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

82. Pyramide triangulaire ou tétraèdre. — Nous avons défini au n° **60** la pyramide triangulaire. Cette pyramide est un polyèdre à quatre faces que l'on appelle pour cette raison *tétraèdre* (du grec τετράεδρον). Construisons (fig. 43) le prisme oblique ABCSDE qui a pour base inférieure la base ABC de la pyramide SABC et qui a une hauteur égale à la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet S sur la face ABC (*hauteur de la pyramide*). Menons, d'autre part, la droite AE qui est une *diagonale* du parallélogramme ACED. On démontre que la pyramide SABC a même volume que chacune des deux pyramides équivalentes SADE, SACE. On en conclut que le volume de la pyramide est le tiers du volume du prisme et est, par conséquent, égal au produit *de l'aire de la base de la pyramide par le tiers de sa hauteur.* On peut naturellement traiter comme base du tétraèdre l'une quelconque de ses faces.

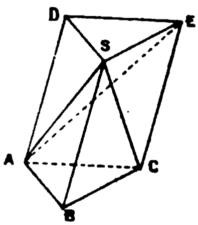


Fig. 43.

83. Pyramide quelconque. — On donne, d'une manière générale, le nom de *pyramide* à un solide limité par un polygone (appelé *base*) et par des *faces triangulaires latérales* ayant un sommet commun S et pour côtés opposés à ce sommet les différents côtés du polygone-base (exemple : la fig. 44). En décomposant la base en triangles (triangles ABC, ACD, ADE sur la figure 44) on décompose la pyramide donnée en pyramides triangulaires qui ont

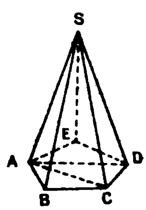


Fig. 44.

([1]) Si les bases sont elles-mêmes des parallélogrammes, le prisme est dit *parallélépipède oblique.*

des *hauteurs* égales (¹), et dont les bases ont pour somme l'aire de la base polygonale proposée. On en conclut que le volume de la pyramide est toujours le *produit de l'aire de sa base par le tiers de sa hauteur* (²).

84. Aire du cercle. — Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que d'aires ou de volumes limités par des droites ou des faces planes. C'est qu'en effet, quelque combinaison d'opérations connues (cf. n° **63**) que l'on opère sur l'unité de surface (plane) ou l'unité de volume, on n'obtiendra jamais comme résultat — si ce n'est dans des cas très exceptionnels — ni une aire plane limitée par une ligne courbe, ni un volume limité par une *surface courbe* (surface non-plane). Les mesures de semblables aires ou volumes ne pourront donc pas, en général, être ramenées par un procédé théorique *exact* (³) à des mesures de longueurs rectilignes ainsi

(¹) toutes égales à la hauteur de la pyramide proposée, c'est-à-dire à la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base [par l'expression « hauteur de la pyramide » nous désignons, suivant les cas, cette perpendiculaire ou sa longueur, cf. p. 88, note 1].

(²) La découverte de cette proposition est attribuée à EUDOXE DE CNIDE (*vide supra*, n° 78). — Rappelons qu'à l'étude la pyramide se rattache celle d'un corps solide remarquable qui a joué un grand rôle en géométrie : c'est la *pyramide tronquée* ou *tronc de pyramide* (πυραμὶς κόλουρος ou τεθραυσμένη) portion de pyramide comprise entre la *base* et un plan parallèle à la base ; ce plan coupe les diverses faces latérales de la pyramide suivant des segments de droites dont la réunion forme un polygone, appelé *base supérieure* du tronc ; la base de la pyramide en est la *base inférieure* ; ainsi, la figure ABCA'B'C' ci-contre est un tronc de pyramide à bases triangulaires. Le tronc de pyramide est la *différence* des deux pyramides [sur la figure : SABC, SA'B'C'] ; il a pour *hauteur* la différence SH-SH' des hauteurs des deux pyramides. Appelons h la mesure de cette hauteur, b et b' les mesures (exactes ou arbitrairement approchées) des aires des deux bases (inférieure et supérieure) : la mesure du volume du tronc de pyramide est donnée en termes précis, au Iᵉʳ ou au IIᵉ siècle ap. J.-C., par HÉRON d'Alexandrie (*Stereometrica* I, chap. 33, 34, *Metrica*. liv. II) ; elle a pour expression (exacte ou arbitrairement approchée) :

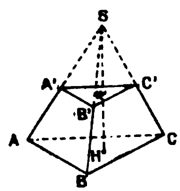


Fig. 45.

$$\frac{h}{3} \times (b + b' + \sqrt{b \times b'}).$$

(³) c'est-à-dire conduisant à la mesure exacte et non pas seulement à une mesure approchée. C'est pourquoi le problème de la détermination des aires et volumes courbes est exclu des *Éléments* d'EUCLIDE. Euclide se borne à des *comparaisons* de telles aires ou de tels volumes *entre eux* (*vide* n° 64).

qu'il a été requis au n° **72**. Mais, si l'on suppose connue la longueur d'une courbe, par exemple, la longueur du cercle de rayon 1, on peut déduire de cette longueur la grandeur de nombreuses surfaces ou volumes dans la figure desquels entre cette courbe.

Proposons-nous, tout d'abord, de déterminer l'aire du cercle.

Inscrivons dans le cercle de centre O, comme nous l'avons déjà fait, au n° **65**, un polygone régulier ayant un très grand nombre de très petits côtés égaux AB, BC, ... et dont le contour est très voisin du contour du cercle. L'aire de ce polygone est la somme des aires des triangles OAB, OBC, etc. Tous ces triangles sont

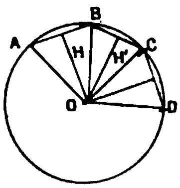


Fig. 46.

d'ailleurs égaux (comme ayant leurs trois côtés égaux, voir **173**) et leurs hauteurs OH, OH', etc., sont par conséquent toutes égales (la longueur commune de ces hauteurs est appelée *apothème*). Si donc le polygone a n côtés, son aire est égale à n fois l'aire du triangle OAB, c'est-à-dire à n fois le demi-produit de la longueurAB par la longueur OH, ou, si l'on veut, égale au *demi-produit de la longueur* OH *par la longueur du périmètre du polygone* (ce périmètre égale n fois AB). Cela dit, multiplions indéfiniment le nombre des côtés du polygone, de manière que son contour se rapproche indéfiniment du contour du cercle; la longueur OH est de plus en plus voisine de la longueur du rayon du cercle, et le périmètre et l'aire du polygone se rapprochent de plus en plus de la longueur et de l'aire du cercle. Nous concluons (1) de là que *l'aire* (2) *du cercle est égale au demi-produit de la longueur de son rayon par la longueur de sa circonférence* (3).

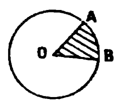


Fig. 47.

La même démonstration établit que l'aire d'un *secteur circulaire*

(1) Pour rendre la démonstration rigoureuse, il faut suivre la voie qui a été indiquée au § 2,

(2) ARCHIMÈDE énonce ainsi ce théorème : [Κύκλου μετρήσις, *Œuvr.*, éd. Heiberg I, p. 232] Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. *Tout cercle est égal à un triangle rectangle, son rayon étant égal à un des côtés de l'angle droit et son périmètre à la base du triangle rectangle.*

(3) Lorsque nous aurons défini les nombres irrationnels et transcendants nous pourrons dire que la mesure de l'aire du cercle dont le rayon a pour mesure le nombre r est $\frac{r}{2} \times 2.\pi.r$, donc $\pi \times r^2$ (voir n° 68).

(ou portion de cercle comprise entre deux rayons donnés OA, OB, fig. 47) est égale à *la demi-longueur de l'arc* AB *multipliée par la longueur du rayon.*

85. Aire et volume du cylindre. — C'est par une méthode semblable que nous parviendrons à la définition et à la détermination des aires et volumes des corps ronds tels que le *cylindre*, le *cône*, la *sphère*.

On obtient (on engendre) un *cylindre* (κύλινδρος de κυλίνδειν, rouler) — plus précisément un *cylindre droit* — en faisant tourner un rectangle ABCD autour d'un de ses côtés AB pris comme pivot [1] de telle sorte que chacun des côtés AC et BD se meuve

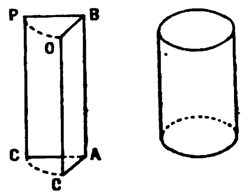


Fig. 48.

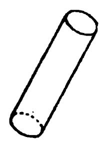


Fig. 49.

dans un plan et engendre un cercle. Si l'on remplaçait le rectangle par un parallélogramme on aurait un *cylindre oblique* (fig. 49).

Le côté CD du rectangle (ou parallélogramme) générateur, ou plutôt, les droites de l'espace avec lesquelles, en tournant, ce côté vient successivement coïncider, sont les *génératrices* du cylindre ; il y en a une infinité dont l'ensemble constitue la surface, plus exactement, la *surface latérale* du cylindre. Les cercles engendrés par les côtés AC et BD de la figure génératrice sont appelés *bases* du cylindre [2]. Quant au côté AB, *si le cylindre est droit*, il est dit *axe* du cylindre (axe de rotation ou de révolution); sa longueur est la *hauteur* du cylindre.

Pour évaluer l'aire de la surface latérale et le volume du cy-

(1) C'est là la définition du cylindre que donne EUCLIDE (*Eléments*, liv. XI. déf. 21). Cette définition — qui indique comment la figure est engendrée — est dite ***définition génétique***.

(2) D'après la terminologie adoptée dans la théorie générale des cylindres le contour de l'un ou de l'autre des cercles de base sera une « *directrice* » du cylindre [courbe sur laquelle s'appuient les génératrices].

lindre droit, nous inscrirons dans le cercle de base inférieur un polygone régulier ABCD ... d'un grand nombre de côtés (je ne marque sur la figure ci-contre que les premiers sommets du polygone). On démontre facilement que les points A', B', C', ... où les génératrices AA', BB', CC', ... du cylindre, issues des points A, B, C, ... rencontrent le cercle de base supérieur sont les sommets d'un polygone régulier (inscrit dans ce cercle) égal (congruent) au polygone ABCD ... Construisant ce polygone, nous constatons que la figure ABCD ... A'B'C'D' ... [polyèdre ayant pour arêtes les côtés des deux polygones réguliers et les génératrices qui joignent leurs sommets correspondants] est un *prisme droit*, prisme qui sera dit « inscrit dans le cylindre ». L'aire de la surface latérale de ce prisme, — c'est-à-dire l'aire de la somme de ses faces latérales, qui sont des rectangles égaux, — est égale à la hauteur commune (1) des rectangles (hauteur du cylindre), multipliée par la somme des longueurs des côtés AB, BC, ..., c'est-à-dire par le *périmètre* du polygone régulier inscrit dans la base. Or, lorsque nous augmentons indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone, son périmètre se rapproche indéfiniment de la longueur de la circonférence de base. D'où cette conclusion : *l'aire de la surface latérale du cylindre droit est égale au produit de la longueur de la circonférence de base par la hauteur du cylindre.*

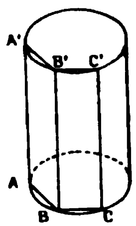


Fig. 50.

Pareillement, le volume du prisme inscrit est égal au produit de sa hauteur (hauteur du cylindre) par l'aire de sa base. Augmentant indéfiniment le nombre des côtés de cette base, nous constatons que *le volume du cylindre est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

86. Aire et volume du cône droit. — Le *cône droit* (κῶνος) est engendré par un triangle rectangle ABC qui tourne autour

(1) Je regarde comme la hauteur de l'un quelconque des rectangles considérés la longueur de ceux de ses côtés qui sont des génératrices du cylindre. Cette hauteur est « commune » à tous les rectangles (c'est-à-dire est la même pour tous).

d'un de ses côtés, autre que l'hypoténuse, pris comme pivot [1]. Le côté-pivot (fig. 51) est l'axe du cône, sa longueur en est la *hauteur*, son extrémité B en est le *sommet*; les droites de l'espace avec lesquelles vient successivement coïncider l'hypoténuse tournante sont les *génératrices* ou *arêtes*; leur ensemble constitue la *surface latérale* du cône; le cercle engendré par le côté AC est le *cercle de base*.

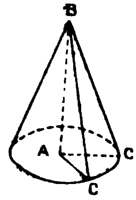
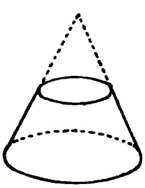


Fig. 51.

Pour évaluer l'aire de la surface latérale et le volume du cône, nous inscrirons encore un polygone régulier dans le cercle de base. Ce polygone, avec les génératrices qui joignent ses sommets au sommet B du cône, définit une pyramide qui est « inscrite dans le cône ». Evaluant l'aire des faces latérales et le volume de cette pyramide, puis augmentant indéfiniment le nombre des faces, nous parvenons aux conclusions suivantes : *l'aire de la surface latérale du cône droit est égale au demi-produit de la longueur de la génératrice par la longueur de la circonférence de base; le volume du cône droit est égal au tiers du produit de la hauteur par l'aire du cercle de base* [2].

87. Sphère. — On appelle sphère (σφαῖρα), la figure découpée dans l'espace à trois dimensions par l'ensemble des points situés à la même distance d'un même point, appelé *centre* de la sphère; l'ensemble de ces points constitue la *surface* de la sphère; tous les points de l'espace qui se trouvent à l'intérieur de cette surface (plus rapprochés du centre) sont dits intérieurs à la sphère; le segment de droite joignant le centre à un point quelconque de la

[1] Si le triangle tournant n'est pas rectangle, mais pivote cependant de telle sorte que le côté BC décrive un cercle, la figure engendrée est un *cône oblique*. On peut toujours définir ce cône comme la figure obtenue en joignant tous les points d'une circonférence à un même point situé hors du plan de cette circonférence.


Fig. 52.

[2] La portion d'un cône comprise entre la base et un plan parallèle à la base (situé entre le sommet et le plan de la base) est appelée *tronc de cône* : les expressions du volume et de l'aire d'un tronc de cône se déduisent des expressions correspondantes relatives au tronc de pyramide (*vide* p. 95, note 2).

surface de la sphère s'appelle *rayon* ; deux rayons en prolongement l'un de l'autre forment un *diamètre*. — On obtient une sphère en prenant un cercle (voir la fig. 53) et le faisant *tourner* autour d'un de ses diamètres pris comme pivot ([1]).

On démontre que tout plan qui rencontre une sphère en plus d'un point la coupe suivant un cercle : ce cercle est appelé *petit cercle de la sphère* si le plan *sécant* (plan qui coupe) ne passe pas par le centre de la sphère (p. c. sur la fig. 54), il est appelé *grand cercle de la sphère* si le plan sécant passe par le centre (g. c. sur la fig. 54) ; on voit que tous les grands cercles d'une même sphère ont des rayons égaux et égaux au rayon de la sphère. — Un plan qui ne rencontre une sphère qu'en un point lui est *tangent*.

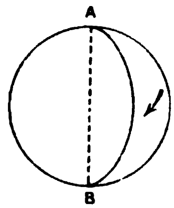


Fig. 53.

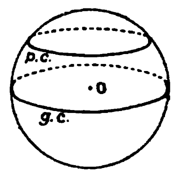


Fig. 54.

Comment obtenir des mesures (arbitrairement approchées) de la surface et du volume de la sphère? Nous allons indiquer un procédé qui permet de ramener la détermination de ces mesures à un calcul d'aires planes et de volumes limités par des faces planes. Ce dernier calcul, toutefois, quoique n'offrant pas de difficulté théorique, est assez long et pénible : aussi est-il préférable de parvenir à la surface et au volume de la sphère par des voies détournées. C'est ce que fit Archimède qui déploya dans la résolution de ce célèbre problème ([2]) toutes les ressources de son génie ; nous trouverons plus loin l'équivalent des méthodes archimédiennes dans le procédé moderne de l'intégration, procédé que nous pourrons appliquer à la sphère sans avoir pour ainsi dire aucun calcul à faire.

([1]) C'est là la *définition génétique* de la sphère (*vide*, p. 97, note 1).

([2]) Archimède détermine en même temps les mesures des aires et volumes d'un grand nombre de corps découpés dans la sphère par des plans sécants différemment définis.

Bornons-nous, pour l'instant, à remarquer que l'on peut *inscrire* dans la sphère ou *circonscrire* à la sphère un *polyèdre* ayant un nombre arbitraire de faces : le polyèdre est dit *inscrit* dans la sphère si tous ses sommets sont sur la surface de la sphère ; il est dit *circonscrit* à la sphère si toutes ses faces sont *tangentes* à la sphère (la touchent en un point seulement et ne le traversent pas).

Cela posé, en raisonnant comme nous l'avons fait sur le cercle au n° **84**, on constate que si le polyèdre inscrit ou circonscrit a un *très grand* nombre de faces très petites, sa surface (ensemble de ses faces) est une figure qui se confond presque avec la surface de la sphère, son volume est très voisin du volume de la sphère. Supposons alors que nous puissions évaluer l'aire de la surface (somme des aires des faces) et le volume d'un polyèdre inscrit ou circonscrit à n faces, — polyèdre dont la forme reste à notre discrétion pourvu que les faces soient arbitrairement petites quand leur nombre n est arbitrairement grand : nous aurons ainsi, de l'aire et du volume de la sphère des valeurs arbitrairement approchées.

Nous parviendrons ainsi aux résultats bien connus que voici (1) : *L'aire de la surface de la sphère est le quadruple de l'aire d'un grand cercle. Le volume de la sphère est égal au produit de l'aire de sa surface par le tiers de la longueur de son rayon* (2).

4. Rapports et proportions

88. — La mesure, telle que nous l'avons définie au § *2*, indique combien de fois l'unité est contenue dans la grandeur mesurée. Elle est donc relative à l'unité et variable en même temps qu'elle : ainsi la longueur qui a pour mesure 1 609 en *kilomètres* mesure

(1) $4.\pi.r^2$ pour l'aire, $\frac{4}{3}.\pi.r^3$ pour le volume, avec les notations et dans les conditions indiquées page 96, note 3.

(2) Archimède a présenté ces faits sous diverses formes; il énonce en particulier comme il suit le théorème relatif au volume : ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καί ἡ ἐπιφάνεια (surface totale c'est-à-dire surface latéral plus surfaces des bases) αὐτοῦ τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας (Περί σφαίρας καὶ κυλίνδρους, I préface). Sur le tombeau d'Archimède, un monument représentant la sphère et le cylindre circonscrit (qui a pour base un grand cercle) immortalisa l'énoncé de ce théorème.

1000 en *milles anglais*. Mais il y a quelque chose que ne modifient pas les changements d'unités. Considérons en effet deux longueurs commensurables quelconques dont les *mesures exactes* aient été calculées par rapport à des unités différentes : il résulte des définitions du n° 61 *que le rapport* (*ou quotient*) *des mesures respectives des deux longueurs reste le même lorsque l'on passe d'une unité à une autre* ; ce rapport, en d'autres termes, ne dépend que de la grandeur relative des deux longueurs et non de l'unité qui sert à les mesurer. C'est pourquoi notre langage ne prêtera à aucune équivoque si nous convenons d'appeler « rapport (*ratio*) des deux longueurs AB et CD » le rapport de leurs mesures exactes déterminées relativement à une unité quelconque ; nous pouvons ajouter qu'en conséquence de nos définitions (61), le rapport $\frac{AB}{CD}$ n'est autre *que le nombre* (*entier ou fractionnaire*) *qui mesure la longueur* AB *quand on prend la longueur* CD *pour unité*.

Ainsi les mesures exactes représentent des rapports de grandeurs à grandeurs semblables (car nous pourrions raisonner sur des grandeurs quelconques comme nous l'avons fait sur les longueurs), et les calculs effectués sur les mesures ne sont que l'expression numérique des comparaisons et rapprochements auxquels donnent lieu les rapports de grandeurs.

Il en est ainsi du moins pour les grandeurs exactement mesurables. En sera-t-il autrement pour les autres? — Sans doute, dans le cas des grandeurs incommensurables, l'assimilation de la mesure à un nombre fractionnaire n'a plus qu'une valeur approximative. Mais la notion de rapport de grandeurs, — qui est, nous venons de le voir, indépendante de l'unité et par conséquent du calcul, — est-elle nécessairement dépendante de la notion de nombre? Ne pourrait-on pas soutenir que nous en avons l'intuition directe et qu'en conséquence nous sommes libres de l'appliquer à toutes les grandeurs géométriques, indistinctement?

Nous allons voir qu'il en est ainsi en effet et que l'on peut considérer et étudier des « rapports » de grandeurs quelconques, se prêtant tous à des opérations identiques [1].

[1] C'est Eudoxe de Cnide, contemporain de Platon, qui paraît avoir constitué le premier une théorie générale des rapports géométriques, et l'on a même attribué à ce géomètre la paternité du Ve livre des

89. Rapports de longueurs. Similitude. — Le géomètre se fait du rapport de deux longueurs (ou, plus généralement, de deux grandeurs géométriques) une idée parfaitement nette quoique difficile à formuler en termes rigoureux (¹). Cette idée est liée à celle de la *similitude*. Imaginons par exemple que nous fassions une réduction ou un agrandissement d'une épreuve photographique : nous dirons que la nouvelle image est *semblable* à la première ; elle a la même forme sans avoir la même grandeur. Traçons sur l'épreuve primitive deux segments de droites arbitraires AB, CD, et appelons (²) A'B', C'D' les « images » respectives de ces deux

Eléments d'Euclide, où se trouve l'exposé de cette théorie. Les propositions du Ve livre simplifient considérablement l'étude des aires et volumes (voir le paragraphe précédent) et redonnent, par une voie nouvelle, les résultats auxquels on a tout d'abord été conduit par la considération directe de l'égalité géométrique. (Exemple : Le théorème de Pythagore, voir 199). M. Zeuthen suppose (*Hist. des math. dans l'antiqu.*) que les difficultés inhérentes à la théorie des proportions ne furent définitivement surmontées que peu de temps avant Euclide : c'est pourquoi celui-ci aurait tenu à laisser une place dans son système à la méthode ancienne à côté de la nouvelle.

(¹) Le rapport (λόγος) est, dit Euclide, une certaine manière d'être (ποια σχέσις, *quaedam habitudo*) de deux grandeurs homogènes entre elles suivant la quantité [*Eléments*, liv. V, déf. 3]. Mais Euclide (ou Eudoxe, voir la note précédente) ne se contente pas de cette affirmation : il donne du rapport une définition indirecte et arithmétique qui ne diffère guère au fond de celle que fournit la théorie moderne des nombres irrationnels exposée ci-dessous au § 6.

Deux grandeurs, dit-il (déf. 4), sont dites avoir une raison (*ratio*) entre elles lorsque ces grandeurs étant multipliées peuvent se surpasser mutuellement : en d'autres termes (en désignant les grandeurs par A et B), si l'on peut trouver deux nombres entiers m et n tels que m *fois* A $>$ B et n *fois* B $>$ A. — Que deux grandeurs de même espèce (par exemple deux longueurs ou deux aires) satisfassent à ces conditions (et aient par conséquent un rapport), c'est là un postulat qui équivaut à l'axiome connu sous le nom de *postulat d'Archimède* (*vide*, p. 74, note 1).

La définition des rapports égaux est donnée en ces termes par Euclide : « Des grandeurs sont dites en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples [produits par un même nombre] quelconques de la première et de la troisième et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou sont plus petits à la fois. » (trad. Peyrard).

(²) Les segments A'B', C'D', ... sont dits *homologues* des segments AB, CD, ... et *proportionnels* à ces segments.

segments sur l'épreuve réduite ou agrandie. Nous dirons que le « rapport » de AB à A'B' (rapport que nous désignerons par le symbole $\frac{AB}{A'B'}$) est *égal* (1) au rapport de CD à C'D' ; ce rapport est donc indépendant du choix des droites AB, CD considérées : il caractérise le rapport des *échelles* (2) (rapport de réduction ou d'agrandissement) des deux figures (3).

90. — L'exemple le plus simple de figures semblables nous est fourni par une construction qui était bien connue des géomètres grecs du ve siècle (Hippocrate de Chios et Archytas de Tarente en particulier). Soit un triangle ABC et une droite B'C', parallèle au côté BC, qui coupe les côtés AB, AC aux points B' et C' (fig. 55) : les triangles ABC et AB'C' sont deux *figures semblables* (4), en sorte que l'on peut écrire (voir la note 1) :

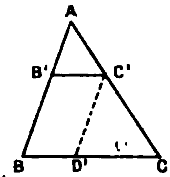


Fig. 55.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

(1) Nous écrirons donc, en exprimant l'égalité par le même signe que les arithméticiens : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

(2) Terme emprunté à la cartographie ; deux cartes géographiques d'un même pays sont des figures semblables dont les échelles peuvent être différentes.

(3) La décoration des chambres funéraires de l'Egypte ancienne était faite d'après un modèle réduit que l'artiste reproduisait à l'échelle voulue : ainsi la notion de similitude était déjà familière aux Egyptiens.

(4) Détachons maintenant, de la figure 55, le petit triangle A'B'C': il reste, dans toutes ses positions, *semblable* au triangle ABC ; ainsi, les

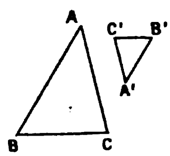
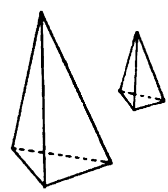


Fig. 56.


Fig. 57.

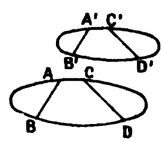


Fig. 58.

deux triangles de la figure 56 sont semblables ; la figure 57 nous offre un exemple de pyramides semblables (les longueurs des arêtes correspondantes sont proportionnelles). La figure 58 nous montre deux figures

Ce fait, — ou, du moins, l'égalité des deux premiers rapports que nous venons d'écrire — est exprimé par la proposition suivante (¹) :

Une parallèle B'C' *à un côté* BC *d'un triangle* ABC *détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels aux longueurs de ces côtés, — c'est-à-dire des segments* AB', AC' *tels que* $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. De cette proposition on déduira immédiatement — en vertu des propriétés des proportions que nous formulerons au n° **96** — que l'on a aussi les égalités :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}, \qquad \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}, \qquad \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}.$$

Les mêmes égalités sont encore vraies lorsque la parallèle à BC ne traverse pas le triangle et rencontre les côtés AB et AC sur leurs prolongements (comme il arrive sur les figures 59).

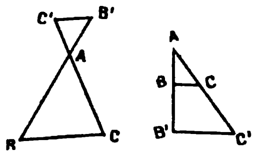


Fig 59.

D'ailleurs, une fois acquise l'égalité des deux rapports $\frac{AB'}{AB}$ et $\frac{AC'}{AC'}$, on *démontrera* (²) facilement, en s'appuyant sur les théorèmes de la géo-

curvilignes semblables : les points A', B', C', D' sont les *images* des points A,B,C,D ; les segments AB, CD d'une part, et les segments « homologues » A'B', C'D', d'autre part, sont proportionnels (ce qui veut dire que leurs rapports sont égaux).

(¹) Ce théorème est souvent appelé *théorème de Thalès* ; mais il ne semble pas que l'on soit autorisé à en attribuer la paternité au géomètre de Milet.

(²) Menons C'D' parallèle à AB (fig. 55). Notre théorème, appliqué aux côtés CA et CB du grand triangle donne l'égalité $\frac{CC'}{AC} = \frac{CD'}{BC}$, ou, si l'on veut (d'après les propriétés des proportions mentionnées au n° 95) l'égalité équivalente $\frac{AC'}{AC} = \frac{BD'}{BC}$. Mais la figure BB'C'D est un parallélogramme, et par suite BD' = B'C'. Donc on a bien $\frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. La démonstration est semblable lorsque la figure est disposée comme sur les figures 59.

On démontrera aussi (voir chap. III, § 3) que le rapport $\frac{AB'}{AB}$ est égal au rapport de deux droites quelconques se correspondant dans les deux triangles (par exemple deux hauteurs, ou deux bissectrices).

métrie, que ces rapports sont aussi égaux au rapport $\frac{B'C'}{BC}$ comme nous l'avons déclaré.

91. — Mais cette égalité des rapports $\frac{AB'}{AB}$, $\frac{AC'}{AC}$, qu'affirme notre proposition, peut-elle, elle-même, être *démontrée*? On ne saurait la prouver que par des considérations arithmétiques. Du point de vue de la géométrie, il faut l'admettre *a priori* (ou admettre une proposition équivalente), *ce qui revient à voir dans la construction des géomètres grecs la définition même de la similitude et de l'égalité des rapports de longueurs.* Nous dirons, en d'autres termes, que le rapport de deux longueurs l et m est égal au rapport de deux autres longueurs n et p, si ces longueurs satisfont à la condition géométrique suivante : Sur deux demi-droites arbitraires Ox, Oy issues d'un même point O, je porte à partir de O des longueurs égales à l, m, n, p [savoir $OA = l$, $OB = m$ sur Ox, et $OC = n$, $OD = p$ sur Oy] ; *les deux rapports seront dits égaux si les droites* AC *et* BD *sont parallèles* (fig. 60).

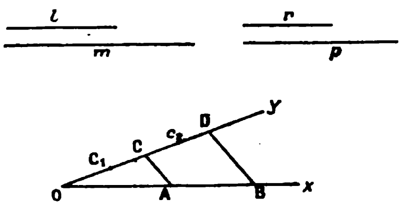


Fig. 60.

Semblable définition ne se trouve toutefois justifiée que par ce fait que, dans le cas où elle est arithmétiquement contrôlable, — c'est-à-dire lorsque les quatre segments l, m, n, p sont exactement mesurables, — elle est en effet véridique [1]. De ce fait,

[1] Supposons que l'unité ou sous-unité de longueur soit contenue un nombre exact de fois dans AB' et dans B'B, par exemple 2 fois dans AB' et 3 fois dans B'B. Divisons AB en cinq segments égaux à l'unité, et par les extrémités de ces segments, menons les parallèles à BC qui coupent AC aux points C_1, C', C_2, C_3. Je démontre que les segments C_1C', $C'C_2$, C_2C_3, C_3C sont tous égaux à AC_1 : [menons C_2D parallèle à AB ; la figure $B_2B_3C_2D$ est un parallélogramme (n° 75) ; donc $C_2D = B_2B_3 = AB_1$; d'ailleurs les angles des triangles AB_1C_1 et C_2DC_3 sont égaux (*vide infra*, 168) ; donc ces triangles sont égaux et l'on a $C_2C_3 = AC_1$; la même démonstration s'applique aux segments C_1C', ..., C_3C]. Il résulte de là que le point C' est aux deux tiers de AC comme le point B' est aux deux tiers de AB. On raisonnera semblablement si B'C' est hors du triangle (cas des figures 59).

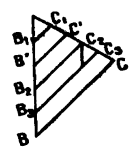


Fig. 61.

d'ailleurs on conclura, en raisonnant comme au n° 61, que lorsque les grandeurs l et m, n et p qui satisfont à la condition énoncées sont incommensurables, les rapports de leurs mesures approchées ont des valeurs d'autant plus voisines l'une de l'autre que les grandeurs ont elles-mêmes été mesurées avec une approximation plus grande.

92. — La construction géométrique, faite comme il a été dit, permet de décider si deux rapports donnés sont ou ne sont pas égaux : elle permet également de classer par ordre de grandeur les rapports inégaux. Soient en effet considérées quatre longueurs l, m, n, p que nous portons comme tout à l'heure sur les deux droites Ox, Oy (fig. 60), savoir l et m sur Ox ($OA = l$, $OB = m$), n et p sur Oy ($OD = p$). Si l'extrémité de la longueur n tombe en C (point de rencontre de Oy avec la parallèle AB à CD), les rapports $\frac{l}{m}$ et $\frac{n}{p}$ sont égaux (n° 91). Si cette extrémité tombe en C_1 (c'est-à-dire si la longueur P est plus petite que OC), le second rapport est *plus petit* que le premier. Si elle tombe en C_2, le rapport $\frac{n}{p}$ est *plus grand* que $\frac{l}{m}$.

Ainsi, sans pouvoir dire précisément ce que c'est qu'un rapport, le géomètre sait comparer les rapports au point de vue de leur grandeur ; il sait, par conséquent, ranger un ensemble de rapports donnés suivant une suite croissante, c'est-à-dire dans un ordre tel que chaque rapport soit supérieur ou égal à tous ceux qui le précèdent dans la suite.

Il y a mieux. Le géomètre peut définir, sans ambiguïté, la *somme*, la *différence*, le *produit* ou le *quotient* de deux rapports donnés.

93. — Remarquons d'abord qu'*étant donné le rapport de deux longueurs quelconques, on peut toujours trouver un rapport égal formé de deux longueurs dont l'une est fixée à l'avance* (*par exemple égale à l'unité*). Portons, en effet, les deux longueurs données sur Ox (fig. 60) ; elles prennent les positions OA, OB. Prenons, d'autre part, sur Oy, la longueur OD égale à l'unité de longueur et menons AC parallèle à BD. Le rapport $\frac{OC}{OD}$ satisfait à la condition requise.

Cela dit, soit à faire la *somme* de deux rapports $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{A_1B_1}{A_1'B_1'}$. Nous pouvons remplacer ces rapports par des rapports $\frac{CD}{EF}$, $\frac{C_1D_1}{EF}$, qui leur sont respectivement égaux et où EF est égal à l'*unité de longueur*. D'ailleurs les deux longueurs (segments) CD et C_1D_1 ont une somme bien déterminée qui est un certain segment GH (n° **53**). Nous considérerons alors comme somme des deux rapports $\frac{CD}{EF}$ et $\frac{C_1D_1}{EF}$ [et, par conséquent, comme somme de $\frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{A_1B_1}{A_1'B_1'}$] le rapport $\frac{GH}{EF}$.

94. — Passons au *produit* de deux rapports. Nous en pouvons donner *a priori* la définition, définition que nous interprèterons comme il suit. J'imagine qu'après avoir agrandi une épreuve photographique, on opère sur l'agrandissement un nouvel agrandissement [1]. Finalement l'épreuve aura été agrandie dans un rapport qui sera regardé comme le *produit* des deux rapports d'agrandissement successivement adoptés. Considérons, en d'autres termes, deux segments AB, CD de l'épreuve primitive ; appelons A'B', C'D' leurs images sur la seconde épreuve, et [2] A''B'', C''D'' leurs images sur la troisième épreuve. Par définition, le produit des deux rapports (d'agrandissement), $\frac{AB}{A'B'}\left(\text{ou } \frac{CD}{C'D'}\right)$ et $\frac{A'B'}{A''B''}\left(\text{ou } \frac{C'D'}{C''D''}\right)$ est égal au rapport $\frac{AB}{A''B''}\left(\text{ou } \frac{CD}{C''D''}\right)$.

De cette définition résulte celle du produit des rapports $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{A_1'B_1'}{A_1B_1}$, de deux couples quelconques de longueurs ; nous savons en effet (d'après le n° **93**) construire une longueur A_2B_2 dont le rapport à A_1B_1 soit égal à $\frac{AB}{A'B'}$; le produit $\frac{AB}{A'B'} \times \frac{A_1B_1}{A_1'B_1'}$ sera, dès lors, égal au produit $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} \times \frac{A_1B_1}{A_1'B_1'}$, donc à $\frac{A_2B_2}{A_1'B_1'}$.

Ayant défini le produit et la somme de deux rapports

[1] Comme nous raisonnons sur l'*agrandissement*, nous pourrions raisonner sur la *réduction*.

[2] Les signes A', A'', ... se lisent : A *prime*, A *seconde*, cf. *supra*, 51.

quelconques, nous saurons définir leur quotient et leur différence [en particulier le quotient d'un rapport égal à 1 par un rapport $\frac{AB}{CD}$ sera le rapport $\frac{CD}{AB}$ dit *inverse* ou *rapport inverse* de $\frac{AB}{CD}$].

D'ailleurs, il serait facile de vérifier (nous nous en dispenserons pour ne point allonger cette exposition) que les sommes et produits de rapports jouissent de toutes les propriétés associatives, commutatives et autres que nous avons énumérées en définissant les opérations fondamentales de l'Arithmétique.

95. Application du calcul des rapports au calcul des longueurs. — Ainsi, sans faire appel à la notion de nombre, nous sommes en état de construire un véritable *calcul* des rapports géométriques [1], calcul analogue au calcul des fractions (Chap. I, § 3), et *qui coïncide exactement avec ce calcul dans le cas particulier où les rapports sont des nombres* (mesures exactes, voir n° **88**).

D'ailleurs les opérations effectuées sur les rapports correspondent toujours, aux termes mêmes de leurs définitions, à des opérations effectuées sur les grandeurs ; il sera donc toujours possible de transposer le calcul des rapports en un calcul relatif aux grandeurs elles-mêmes.

Convenons de remplacer un rapport (de longueurs) donné quelconque par le rapport *égal* $\frac{AB}{UN}$, où UN est la longueur-unité ; nous savons toujours (n° **93**) construire la longueur AB ; nous dirons que cette longueur *représente* (*est mesurée par*) le rapport donné. Moyennant cette convention, les règles énoncées plus haut peuvent être prises comme définitions des opérations fondamentales (addition, soustraction, multiplication, division) effectuées sur les longueurs. Les opérations ainsi définies ont ceci de remarquable que *les résultats auxquels elles conduisent sont eux-mêmes toujours des*

[1] **Nous ne nous sommes occupés dans les paragraphes précédents que des rapports de longueurs : l'étude des rapports d'angles, d'aires ou de volumes, conduirait manifestement aux mêmes conclusions. Sur la comparaison de ces différentes sortes de rapport.** *vide infra*, **n° 98.**

longueurs [1]. Le quotient des deux longueurs AB, CD, par exemple, est le quotient des deux rapports $\frac{AB}{UN}$, $\frac{CD}{UN}$, c'est-à-dire le rapport $\frac{AB}{CD}$, représenté lui-même par une longueur. Le produit de AB par CD est également une longueur (voir la construction de Descartes, note 1). Dans les paragraphes précédents, au contraire, nous n'avions su définir le produit de deux longueurs qu'en tant qu'il représente la surface d'un rectangle.

96. Proportions. — Pratiquement, le calcul des rapports sert surtout à l'étude et à la transformation des couples de rapports égaux que l'on a coutume d'appeler « *proportions* ».

Soient données quatre longueurs que je désignerai par les lettres majuscules A, B, C, D. Si le rapport $\frac{A}{B}$ est égal au rapport $\frac{C}{D}$, on dit que le couple des rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ constitue une *proportion* [2].

(1) Longueurs déduites, au moyen d'une construction géométrique (*vide*, chap. III. § 5), des longueurs sur lesquelles on opère. L'idée de représenter par une longueur le résultat de toute opération effectuée sur des longueurs, — idée d'une portée considérable — s'est précisée dans l'esprit de DESCARTES entre l'époque où il écrivit les *Regulae ad directionem ingenii* (vers 1629) et l'année où il composa sa *Géométrie* (1636-37). Dans les *Regulae* (qui sont, il est vrai, inachevées), DESCARTES représente encore un produit par une surface. Dans la *Géométrie*, au contraire, il s'exprime ainsi (*Œuv. de Descartes*, éd. Ad.-Tan., VI, p. 370) :

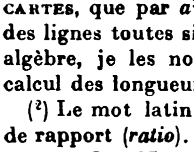


Fig. 62.

« Soit. par exemple, AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC; je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication. — Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division ».

« Et il est à remarquer, ajoute plus loin DESCARTES, que par a^3 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en algèbre, je les nomme des carrés ou des cubes, etc. » Voir aussi sur le calcul des longueurs, *Deux. liv.* ch. III.

(2) Le mot latin *proportio* a souvent été pris, autrefois, dans le sens de rapport (*ratio*). Ce n'est qu'au XVIIIe siècle que son sens fut définitivement fixé [JACQUES BERNOUILLI en donne la définition suivante (*De rationibus et proportionibus* (1688) : « *Si rationes æquales invicem comparantur, existit proportio* »].

Les longueurs A, B, C, D sont appelées « termes de la proportion ». Lorsque la proportion est écrite sous la forme :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

on appelle souvent les termes A et D « termes extrêmes » ou « extrêmes », et les termes B et C « termes moyens » ou « moyens » (¹). Si B est égal à C, on dit que B ou C est moyen proportionnel (ou *moyenne proportionnelle*) entre A et D (*vide* n° **20**).

Nous trouvons, dans les *Eléments* d'Euclide (vᵉ livre) une théorie générale des proportions géométriques (*vide*, p. 102). Cette théorie nous enseigne à déduire, d'une ou plusieurs proportions données, certaines proportions nouvelles. En voici les premiers principes :

La proportion $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ *peut être retournée* (ἀνάπαλιν λόγος); en d'autres termes, on a (comme conséquence de la proportion donnée) :

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C}.$$

Les termes moyens peuvent être intervertis (ἐναλλάξ) ; en d'autres termes, on a : $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$.

La proportion donnée entraîne également comme conséquence la proportion $\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$ (σύνθεσις λόγος).

Le rapport $\frac{A+C}{B+D}$ *est égal aux deux rapports* $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ *et forme, par conséquent, une proportion avec chacun d'eux.*

Soient données, d'autre part, les deux proportions :

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{E}, \quad \frac{B}{C} = \frac{E}{F} : \quad \textit{on en déduit} \quad \frac{A}{C} = \frac{D}{F}.$$

Soient données les deux proportions :

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{F}, \quad \frac{B}{C} = \frac{D}{E} : \quad \textit{on en déduit} \quad \frac{A}{C} = \frac{D}{F}.$$

(¹) On dit aussi que l'une (quelconque) de ces quatre grandeurs est *quatrième proportionnelle* aux trois autres.

Euclide établit toutes ces propositions par la géométrie; nous ne le suivrons pas dans cette voie, car nous arriverons bien plus rapidement aux mêmes résultats en employant les méthodes de l'Arithmétique, à laquelle nous allons pouvoir ramener toute la théorie des proportions; il nous suffira, pour cela, de faire subir à la notion générale de *nombre* une nouvelle extension, hardie en apparence, mais parfaitement naturelle au point où nous en sommes.

97. Les rapports sont des nombres. — Je dis que *les rapports de longueur* (ou, plus généralement, les rapports de grandeurs géométriques d'un même type quelconque) constituent une *classe de pseudo-nombres sur lesquels on peut effectuer toutes les opérations de l'Arithmétique et qui renferme comme sous-classe la classe des nombres rationnels.*

Considérons un rapport $\frac{A}{B}$. Si les deux longueurs A, B, sont *commensurables* (*vide* n° **61**), ce rapport $\frac{A}{B}$, on l'a vu, doit être regardé comme un *nombre rationnel* (rapport des mesures de A et de B).

Supposons maintenant que A et B soient *incommensurables* [1]; le rapport $\frac{A}{B}$ n'est plus un nombre rationnel, mais on peut le représenter avec une approximation aussi grande que l'on veut par un nombre rationnel (dit *valeur approchée* du rapport); car, si l'on calcule (en choisissant convenablement l'unité) des mesures α, β de A et B suffisamment approchées (n° **61**) le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ des longueurs mesurées par α et β pourra être aussi voisin qu'on le voudra de $\frac{A}{B}$. D'ailleurs nous avons vu que l'on peut effectuer sur les rapports de longueurs incommensurables toutes les opérations fondamentales définies plus haut.

En résumé les rapports sont parfois des nombres rationnels et parfois n'en sont pas; mais ils se prêtent toujours à des opérations

[1] Ce cas se présente, par exemple (d'après le n° 63) si les segments de longueur A et B sont, l'un un côté, l'autre l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a ses deux petits côtés égaux.

bien définies, *opérations qui coïncident rigoureusement avec les opérations de l'arithmétique dans le cas où les rapports sont des nombres rationnels.*

Ces remarques nous incitent à donner aux rapports de longueurs le nom de *nombres*; nous les appellerons « *nombres algébriques* » et les qualifierons *irrationnels* dans le cas où ils ne sont pas des nombres rationnels.

En particulier, si nous prenons la longueur B pour longueur-unité, nous regarderons le rapport $\frac{A}{B}$ comme étant le « *nombre* » *qui mesure la longueur* A : *quidquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam*, écrit en 1717 le professeur Christian Wolf, *numerus dicitur* (¹).

Les nombres irrationnels se prêtent exactement aux mêmes opérations que les nombres rationnels.

98. Comparaison des rapports de grandeurs hétérogènes. — Il importe de remarquer que si, au lieu de rapports de longueurs, nous considérions des rapports d'angles, ou d'aires, ou de volumes, nous nous trouverions toujours définir les *mêmes nombres*. En effet on peut toujours comparer entre eux deux rapports de grandeurs hétérogènes (de types différents) et décider si ces rapports sont égaux ou si l'un est plus petit que l'autre : un rapport d'angles, par exemple, sera dit égal à un rapport de longueurs s'il est le même nombre rationnel ou s'il a la même valeur approchée (voir le n° précédent) quelque loin que l'on pousse l'approximation; si les deux rapports ne sont pas égaux celui dont la valeur approchée est la plus grande (lorsque l'approximation est poussée très loin) sera dit plus grand que l'autre, et ainsi de suite. Il est dès lors permis de dire que deux rapports égaux quelconques sont égaux à un même nombre.

99. Nombres proportionnels. — Revenons maintenant après un long détour, à la notion de mesure introduite au n° **61**. Nous

(¹) *Elementa matheseos universæ*, Halle 1717 t. I, p. 21, cf. Newton (*Arithmetica universalis* 1707) : *Per numerum abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus.*

concluons de l'étude qui précède que, quelle que soit l'unité choisie, toute longueur a, par rapport à cette unité, une *mesure exacte qui est un rapport de longueurs*, partant un *nombre* irrationnel ou rationnel. Considérons, d'autre part, une série de longueurs A, B, C,... dont les mesures par rapport à deux unités différentes sont respectivement a, b, c,... et a', b', c'... ; on a les égalités

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots, \tag{1}$$

fait que j'exprimerai en disant que les nombres (irrationnels ou rationnels) a, b, c... et a', b', c'... sont des *nombres proportionnels* ; en d'autres termes, tout changement d'unité se traduit par la substitution aux mesures anciennes de mesures proportionnelles.

Les égalités marquées (1) sont des *proportions numériques*. On les énonce souvent ainsi : *a est à a' comme b est à b', comme c est à c'*. On peut aussi définir la proportionnalité en disant que les nombres a, b, c,... se déduisent des nombres a', b', c',... en les multipliant par un même facteur (non nul) qu'on appelle *coefficient de proportionnalité* ; ce coefficient est le nombre $\frac{a}{a'}$.

Nous obtiendrons des *nombres proportionnels* lorsque nous traduirons en nombres les proportions géométriques.

Remplaçons, en effet, dans la proportion $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, les longueurs A, B, C, D, par leurs mesures a, b, c, d (l'unité étant arbitraire); nous aurons la proportion numérique :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

A toute transformation de cette proportion correspond une transformation semblable de la proportion géométrique, et réciproquement. Ainsi, tous les théorèmes euclidiens énoncés au n° **96** pourront être vérifiés arithmétiquement [1]; ils résultent immédiatement des règles du calcul élémentaire, que l'on a le droit d'appliquer aux nombres irrationnels comme aux nombres rationnels.

[1] L'étude des proportions arithmétiques fait l'objet du livre VII des *Eléments* d'EUCLIDE.

Appelons m, pour simplifier l'écriture, le nombre $\frac{a}{b}$ (nombre irrationnel ou rationnel) : nous avons $a = b \times m$ et $c = d \times m$; il en résulte par exemple que $\frac{a}{c} = \frac{b \times m}{d \times m}$, ou $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (interversion des termes moyens) ; de même, nous avons :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b \times (m+1)}{b} = m+1; \quad \frac{c+d}{d} = \frac{d \times (m+1)}{d} = m+1;$$

d'où résulte la σύνθεσις λόγου. Le lecteur fera sans peine les autres vérifications.

Remarquons, d'autre part, qu'en multipliant par le produit $b \times d$ les deux membres de la proportion numérique, on obtient l'égalité :

$$a \times d = b \times c,$$

où ne figurent plus de rapports ; on énonce ce résultat en disant que *dans toute proportion le produit des* (*termes*) *moyens est égal au produit des extrêmes.*

100. Applications de la théorie des proportions. — La théorie des proportions numériques n'exige point, on le voit, une étude spéciale. Historiquement [1], cependant, cette théorie n'a pas joué en arithmétique un moindre rôle qu'en géométrie.

Nous avons parlé au n° **20** des médiétés de Théon de Smyrne. Ces médiétés sont définies par des proportions.

Mais c'est surtout dans le calcul pratique qu'intervient la pro-

[1] Avant que la conception du nombre irrationnel ne se fût répandue, on ne raisonnait *arithmétiquement* que sur les proportions de nombres rationnels, et les résultats obtenus ne s'appliquaient aux grandeurs incommensurables que par approximation. Cependant les savants du moyen-âge négligent parfois de formuler, au sujet des nombres qui interviennent dans leurs raisonnements, les restrictions traditionnelles : ainsi JORDANUS NEMORARIUS (XIIIe siècle), chez qui certains auteurs pensent trouver la notion générale de nombre [voir le *Tractatus de numeris datis* de Jordanus et les commentaires de Max Curtze dans le supplément historique de la *Zeitsch. f. math. u. phys.*, XXXVI, 1891]. STEVIN (1548-1620) a une conscience plus nette de ce qu'il fait lorsqu'il assimile, dans ses cal uls, les grandeurs incommensurables aux nombres rationnels. DESCARTES fut cependant le premier à dégager les raisons qui légitiment cette assimilation (*vide infra* § 5).

portion. Elle est, en effet, le fondement d'un mode de raisonnement fort ancien, qui est, aujourd'hui encore, familier à nos écoliers : la règle de trois (en latin *regula de tribus numeris*, ou, par abréviation *regula detri* — règle dorée, dit un traité allemand du xve siècle). Supposons que, dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, les trois nombres a, b, c, soient connus tandis que d est un nombre inconnu que l'on veut calculer ; nous dirons : ce que a est à b, 1 l'est à $\frac{b}{a}$ et d l'est à $\frac{b \times c}{a}$; donc $d = \frac{b \times c}{a}$.

Cette règle fut connue des calculateurs orientaux et des logisticiens grecs depuis une haute antiquité. Nous en trouvons de nombreuses applications dans les traités d'arithmétique indiens. « Si l'on reçoit, — dit Bhaskara [1], — 104 nishcas pour 63 palhas du meilleur camphre, calcule et dis-moi, ami, combien on en recevra pour $12\frac{1}{4}$ palhas. — Si une esclave de 16 ans est cédée pour 32 nishcas, que coûtera une esclave de 20 ans? Réponse : $25\frac{3}{5}$ nishcas » (la valeur de l'esclave diminue proportionnellement à l'âge).

Tous ces problèmes sont ramenés par leurs auteurs à des proportions.

101. Relations entre grandeurs. Homogénéité. — Nous devons faire encore, avant de clore ce paragraphe, quelques remarques accessoires.

Nous avons vu que nous étions toujours en droit d'assimiler les proportions géométriques aux proportions arithmétiques. Plus généralement, il résulte de l'analyse qui précède et en particulier des remarques faites au n° **95** que nous avons le droit de calculer sur les longueurs, et pareillement sur les autres grandeurs géométriques, exactement comme sur des nombres.

C'est ce qui permet aux traités de géométrie d'énoncer à volonté les propriétés des figures sous forme de relations entre grandeurs (voir la note 1, p. 117), ou d'égalités numériques entre

[1] *Lilavati apud* Colebrooke, *Algebra with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmagupta and Bhascara*, 1817, p. 33, 34.

mesures de grandeurs. Le même traité passe souvent, sans prévenir le lecteur, d'un point de vue à l'autre. Aussi les mots *longueur*, *mesure* ou *valeur* de *longueur*, *nombre*, *quantité* seront, à moins d'indication contraire, regardés comme équivalents.

En revanche, les égalités ou relations [1] auxquelles conduisent les calculs relatifs aux grandeurs présentent toutes un certain caractère qui est une conséquence directe de leur signification géométrique : ces égalités sont *homogènes*.

Voici ce qu'il faut entendre par là.

La géométrie ne compare entre elles que des grandeurs de même espèce. Ainsi, si le premier membre d'une égalité est une longueur (ou une aire, ou un volume), le second membre doit être pareillement une longueur (ou une aire, ou un volume); si le premier membre est une somme de termes (ou plus généralement une combinaison de sommes et différences telle que $A - B + C + D - E$), tous les termes doivent être des grandeurs de même espèce.

Désignons, par exemple, par A, B, C, D, ... des longueurs; nous dirons [2] que ce sont des *grandeurs de dimension* 1. Tout produit ou carré de ces longueurs [3], $A.B$, $A.C$, ... ou A^2, B^2, ... sera (ou pourra être interprété comme) une aire (*grandeur de dimension* 2). Tout produit d'une grandeur de dimension 2 par une longueur (exemple : $A.B.C$, $A^2.B$, $A.B^2$, A^3, ...) sera (ou pourra être interprété comme) un volume (*grandeur de dimension* 3). Considérons, d'autre part, une grandeur telle que $\frac{A}{B}.C$ ou $\frac{A.C}{B}$ (quatrième proportionnelle à A, B, C); cette grandeur est une *longueur*. Il en est de même des grandeurs telles que

$$\frac{A^2}{B^2}.C, \qquad \frac{A.B}{D^2}.C, \qquad \frac{A^3}{B^3}.C, \text{ etc.}$$

produits d'une longueur C par un rapport de grandeurs de même

(1) Par *relation*, nous entendons une *égalité* dont chaque membre est le résultat d'une combinaison d'opérations effectuées sur des grandeurs.

(2) Ceci nous conduit à regarder les rapports de longueurs (et pareillement les rapports de grandeurs quelconque de même espèce) — et, d'une manière générale, les *nombres* — comme des *grandeurs* de *dimension* 0.

(3) J'emploie ici le signe . dans le sens *multiplié par* comme en arithmétique (*voir* n° 7).

espèce, c'est-à-dire par un *nombre*. En conséquence les **grandeurs**

$$\frac{A.C}{B}.D\left[\text{ou } \frac{A.C.D}{B}\right],\ \frac{A.C}{B^2}.A^2\left[\text{ou } \frac{A^3.C}{B^2}\right] \text{ etc.}$$

sont des *aires*. Les grandeurs

$$\frac{A.C}{B}.A.D\left[\text{ou } \frac{A^2.C.D}{B}\right],\ \frac{A.C}{B^2}.A.B.D\left[\text{ou } \frac{A^2.B.C.D}{B^2},\ \text{ou } \frac{A^2.C.D}{B}\right]$$

sont des *volumes*, etc. Je dirai alors que les égalités

$$A + \frac{A.C}{B} = \frac{B.D}{C}, \qquad A^2 + BC = \frac{A^3.C^2}{B^3}$$

qui ont lieu entre grandeurs de même espèce sont *homogènes*, tandis que l'égalité

$$A + \frac{B^2.C}{C} = D^3$$

n'est pas homogène.

Nous verrons plus loin par quels caractères se traduit l'homogénéité dans les relations entre mesures a, b, c, d, ... qui correspondent aux relations établies entre les grandeurs A, B, C, D, ...

102. Extension de l'idée de mesure. — Nous avons défini la mesure d'une grandeur au n° **61** en partant d'une longueur-unité que nous supposons contenue un certain nombre (entier ou rationnel) de fois dans la grandeur à mesurer. La définition ainsi donnée s'applique immédiatement aux mesures de longueurs, de surfaces ou de volumes.

Soit, au contraire, à mesurer une température. Il est clair qu'on ne saurait regarder une température comme contenant un certain nombre de fois une température-unité. Cela n'aurait aucun sens. C'est pourquoi l'on substitue à la mesure directe de la température une mesure correspondante que l'on considère comme équivalente ; on se sert, par exemple, d'un thermomètre à mercure et l'on mesure la longueur de la colonne mercurielle qui « représente » la température.

Il n'y a rien de commun, on le voit, entre une telle mesure et une mesure ordinaire de longueur ou de surface. Cependant on a coutume d'employer le même mot « *mesurer* » pour désigner les

deux opérations. De même on dit que, — dans certaines limites et à supposer que certaines conditions physiques ne se modifient pas, — les variations de température sont proportionnelles aux variations de la colonne de mercure, le mot *proportionnel* n'ayant point ici, il est vrai, le sens mathématique que nous lui avons donné au n° **99**.

Dans le domaine même de la géométrie, il y a certaines grandeurs, les angles par exemple, que l'on a avantage à mesurer indirectement en les comparant à des grandeurs *proportionnelles* d'une autre espèce. Et ici le mot « proportionnelle » a toute sa valeur, car nous avons vu (n° **98**) que, dans le domaine de la géométrie, nous pouvons donner de la *proportionnalité* entre grandeurs d'espèces différentes une définition mathématique précise.

103. Mesure des angles. — Considérons des angles auxquels nous donnerons, pour plus de commodité, un même sommet O.

Les angles sont des grandeurs mesurables directement. En effet, prenons un angle-unité, l'angle O′ donné une fois pour toutes. Dans l'angle à mesurer AOB, nous pouvons, à partir du côté OA, placer une série d'angles contigus tous égaux (superposables) à l'angle O′ ; ce sont les angles marqués 1, 2, 3, ... sur la figure ; nous obtenons ainsi, comme mesure de AOB, un nombre entier, rationnel ou irrationnel.

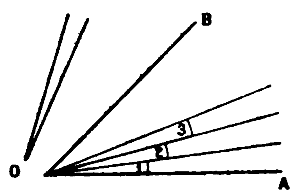


Fig. 63.

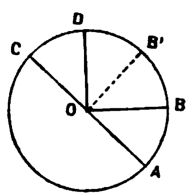


Fig. 64.

Mais la mesure ainsi définie est aussi malaisée à calculer pratiquement qu'elle est difficile à manier dans la démonstration théorique. C'est pourquoi on préfère la remplacer par une mesure indirecte.

De O comme centre, décrivons un cercle dont le rayon a pour longueur l'unité, et considérons divers angles de sommet O, soit les angles AOB, COD, ... (les points A, B, C, D, ... étant à l'intersection des angles avec le cercle, fig. 64). La grandeur de ces angles est ma-

nifestement *déterminée* par la longueur des *arcs de cercle* AB, CD, ... respectivement compris entre leurs côtés. En effet, on démontre (voir n° **187**) qu'*à deux angles égaux correspondent des arcs égaux*. Dès lors, nous pouvons regarder les *mesures des arcs* AB, CD, ... *comme étant les mesures mêmes des angles correspondants*.

104. — On prend généralement pour unité de longueur de l'arc de circonférence ([1]), soit la 360ème partie (appelée *degré*), soit la 400ème partie (appelée *grade*) de la longueur totale de la circonférence. L'angle droit (AOB' sur la figure 64) a alors pour mesure $\frac{1}{4}$ de circonférence, c'est-à-dire 90 degrés (on écrit : 90°) ou 100 grades (100^g) [le quart de la circonférence est appelé *quadrant*].

La division de la circonférence en degrés est, encore aujourd'hui, la plus généralement adoptée. Elle était familière aux astronomes de Babylone et l'origine s'en perd dans la nuit des temps. On la complète en divisant le degré lui-même en 60 parties égales appelées *minutes* et la minute en 60 parties égales appelées *secondes* ([2]). La division en grades ([3]) que l'on rencontre dès le XVIIIe siècle dans certaines tables de logarithmes, est sans contredit, la plus avantageuse pour les adeptes du système décimal ; c'est pourquoi, depuis la Révolution française, elle fut préconisée par de nombreux savants. Mais, pour qu'elle passât dans la pratique, il faudrait que toutes les tables astronomiques, cartes de géographie, horloges, instruments de physiques divers, établis d'après le *système sexagésimal*, fussent refaits à nouveau.

105. Mesure des dièdres. — La mesure des angles dièdres, elle aussi, se fait au moyen d'un intermédiaire, et l'intermédiaire est ici l'angle ordinaire. Considérons un plan quelconque R per-

([1]) On prend parfois aussi pour unité le *radian*, arc égal au rayon (cf. *infra*, 150).

([2]) Pour écrire une mesure d'angle telle que 6 degrés, 50 minutes, 27 secondes, on écrit 6°, 50', 27''. Si l'on veut pousser plus loin l'approximation on divise la seconde en *dixièmes*, *centièmes*,... de secondes conformément aux principes de système décimal.

([3]) Les grades sont eux-mêmes divisés en dixièmes, centièmes, millièmes, et figurés au moyen de la notation décimale. Ainsi l'on écrit 7^g,567 pour signifier 7 grades + 567 millièmes de grade.

pendiculaire à l'arête du dièdre en un point O (fig. 65). Ce plan coupe les deux faces du dièdre (plan P et Q) suivant deux droites qui se coupent en O, soit OA et OB, et forment un angle plan, dit *angle plan* du dièdre considéré. On démontre facilement que tous les angles plans répondant à cette définition pour un même dièdre sont égaux, et que deux dièdres dont les angles plans sont égaux sont deux dièdres égaux (superposables). Et l'on déduit de là que l'on peut prendre comme *mesure* d'un dièdre la mesure de son angle plan. On dit que les dièdres sont *proportionnels* à leurs angles plans.

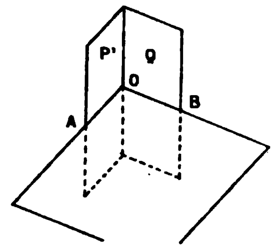


Fig. 65.

5. Confrontation du nombre et de la grandeur

106. — Nous avons cité (**97**) la définition donnée par Christian Wolf : Tout ce qui est rapporté à une unité comme un segment de droite à un autre segment est appelé *nombre*.

Quelque naturelle que nous semble aujourd'hui cette définition, il lui fallut cependant de longs siècles pour se faire accepter. Les Grecs avaient poussé fort loin l'étude des *rapports* (λόγοι) et l'étude des nombres (ἀριθμοί), mais ils ne les avaient jamais confondus [1].

[1] Les savants grecs ne se préoccupent point des applications concrètes de la science, et c'est pourquoi ils n'ont point comme nous modernes un intérêt pratique immédiat à ramener les opérations géométriques à des calculs arithmétiques plus faciles à effectuer. Pour comprendre leur point de vue, il faut se rappeler que les Grecs établissaient une distinction absolue entre l'arithmétique théorique, étude des propriétés des nombres, et la *logistique*, qui est l'art de calculer numériquement sur des grandeurs concrètes. « La logistique, dit un scholie ancien, est la théorie qui traite des dénombrables et non des nombres ; elle ne considère pas ce qui est réellement le nombre, mais suppose ce qui est un comme unité et ce qui est dénombrable comme nombre... Elle examine donc, d'une part, ce qu'ARCHIMÈDE a appelé le *problème des bœufs*, de l'autre, les nombres *mélites* et *phialites*, les uns sur des fioles, les autres sur des troupeaux... » [Scholie sur le *Charmide* de PLATON, *apud* P. TANNERY, *La géométrie grecque*, Première partie, p. 48]. Ainsi, loin d'assimiler les grandeurs aux nombres, la tradition grecque interdisait de considérer comme de véritables nombres les nombres qui mesurent des grandeurs : ce sont des

Et le rapprochement si suggestif que nous avons établi entre les opérations arithmétiques et les opérations faites sur des grandeurs, ne s'est-on pas bien longtemps appliqué à le masquer au lieu de le mettre en lumière? L'un des plus grands algébristes du XVIe siècle, Tartaglia (¹), reproche à un traducteur d'Euclide d'avoir indifféremment employé dans un même sens les mots *multiplicare* et *ducere*. Il faut, dit-il, distinguer entre ces deux mots : le premier se dira des nombres (ainsi l'on regardera 2 comme le plus petit multiplicateur) tandis que *ducere* conviendra s'il s'agit de grandeurs géométriques. Pareillement, pour désigner l'opération de la division, on devra dire *partire* ou *misurare* suivant que l'on parlera de nombres ou de grandeurs.

Cinquante ans plus tard, Viète (²) considère encore la science des nombres et celle des grandeurs comme ayant des règles parallèles mais distinctes. C'est à Descartes que revient le mérite d'avoir affirmé, sans restriction, l'identité du calcul numérique et du calcul géométrique (³) :

« Et comme toute l'arithmétique, — dit Descartes (⁴) dans un langage précis et définitif, — n'est composée que de quatre opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire, en géométrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien, en ayant

nombres *phialites*, ou relatifs aux fioles, des nombres *mélites*, ou relatifs aux troupeaux (ou aux pommes). Et c'est pourquoi les problèmes concernant les grandeurs étaient énoncés sous forme concrète et non sous forme théorique : ce qui est pour nous la « résolution d'une équation de tel ou tel type » (*infra*, *Deux. liv.*, chap. I) était autrefois « la solution du problème des bœufs », du « problème des arbres », du « problème des lapins », du « problème des sept vieilles femmes », du « problème des oiseaux » (voir LUCA PACIUOLO, *Summa de Arithmetica*, passim). Semblable terminologie se retrouve chez les Hindous et chez les Arabes, pendant tout le Moyen Age et au début de la Renaissance.

(¹) *General Trattato*. liv. II, fil. 17. Cf. le début de l'Algèbre d'OMAR AL KHAYYAM, cité au nº 273.

(²) *In artem analyticam isagoge*, 1551, ch. IV.

(³) *Vide supra*, p. 110, note 1. Sur l'histoire du calcul géométrique avant Descartes, voir *Deux. liv.*, ch. III, § 1.

(⁴) *La Géométrie*, liv. I (*Œuv.*, t. VI, p. 369).

une que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis, en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver [1] une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou, enfin, trouver une ou deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne [2], ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie afin de me rendre plus intelligible ».

Ces déclarations résument excellemment les conclusions auxquelles nous ont conduits les premiers paragraphes du présent chapitre.

107. — La résistance qui fut longtemps opposée aux vues formulées par Descartes s'explique par des raisons profondes. Il faut en chercher l'origine dans les premières spéculations de la science grecque.

La mathématique des Pythagoriciens se proposait un double objet : l'étude des propriétés des nombres (voir I, § 1) et l'étude des propriétés des corps géométriques. Entre ces deux études il y avait, à l'origine, une parenté étroite : les Pythagoriciens ne représentaient-ils pas les nombres par des figures géométriques formées de points (n° 3) et n'affirmaient-ils pas que « toutes les choses sont nombres ? » Mais voici que, tout d'un coup, surgit une difficulté inattendue : l'existence des longueurs incommensurables est reconnue et le théorème de Pythagore sur le triangle

(1) Comment ces lignes (résultats des opérations) sont effectivement déterminées, c'est là une question dont nous n'avons pas à nous préoccuper ici. On les obtient très facilement en appliquant les théorèmes de la géométrie rationnelle ainsi que nous le verrons au chapitre III du Deuxième livre.

(2) Trouver, par exemple, une longueur b telle que $\frac{a}{b} = \frac{b}{1}$, a étant connu (d'où $a = b^2$, $b = \sqrt{a}$), ou trouver deux longueurs b et c tels que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{1}$ (d'où $b = c^2$, $a = \frac{b^2}{c} = c^3$, $c = \sqrt[3]{a}$).

rectangle (¹) (nºˢ **63** et **199**) montre que ces longueurs se rencontrent dans les problèmes géométriques les plus simples. Les Pythagoriciens restent confondus (²); l'édifice de la science est ébranlé; comment va-t-il être possible de le reformer ?

C'est ici qu'interviennent les fameux arguments de Zénon d'Elée. Il n'est pas vrai, dit Zénon, que les grandeurs soient des nombres au sens pythagoricien, c'est-à-dire des assemblages d'unités ou de points. En effet, le point, n'ayant ni grandeur, ni épaisseur, ni volume, est le néant, et avec le néant on ne peut pas former des assemblages. « Si (³) en effet, on l'ajoute (le point) « à autre chose, il ne la rend pas plus grande; car, ajoutez une « grandeur nulle, vous ne pouvez augmenter la grandeur; ainsi « l'augmentation sera nulle. Retranchez au contraire, l'autre chose « ne sera en rien moindre, comme elle n'était en rien plus grande par « l'addition; ainsi l'augmentation et la diminution sont également « nulles. » Par conséquent il n'est pas possible de regarder les choses réelles comme des « pluralités » de points. Réciproquement, si un être est, il est nécessairement pourvu de grandeur et d'épaisseur. Supposons alors que tout être soit une pluralité, c'est-à-dire soit composé de parties; ces parties, pourvues de grandeur et d'épaisseur, seront donc elles-mêmes des êtres composés de parties lesquelles auront à leur tour des parties; « ce qu'on a dit une fois, on pourra tou« jours le répéter; il n'y aura jamais de la sorte un terme (une « partie) extrême, où il n'y ait pas de parties différentes l'une de « l'autre. Ainsi, s'il y a pluralité, il faut que les choses soient à la « fois grandes et petites, et tellement petites qu'elles n'aient pas de

(¹) Ce théorème a-t-il été énoncé par Pythagore sous la forme que nous lui donnons aujourd'hui ? Nous l'ignorons. Proclus, en tout cas nous dit formellement (dans son Prologue du *Commentaire des Eléments*) « C'est à lui (Pythagore) que l'on doit la découverte des incommensurables ».

(²) S'il faut en croire un scholie ancien (voir Cantor, *Vorles.*, I, 171) la légende racontait que l'auteur de la théorie des incommensurables fut englouti dans un naufrage. C'est ainsi que le ciel punit celui qui avait exprimé l'inexprimable, représenté l'infigurable, dévoilé ce qui eût dû rester toujours caché. « Tel était, ajoute le scholie, l'étonnement religieux où la théorie des incommensurables plongeait ces hommes (les anciens géomètres) ».

(³) Fragment de Simplicius, *Phys.* Diels, 139. Voir Paul Tannery, *Pour l'histoire de la science hellène*, 1887, p. 250 et sqq.

« grandeur [puisque la fragmentation répétée conduit à des parties « de plus en plus petites] tellement grandes qu'elles soient infinies « [puisque chaque partie comprend une infinité de parties]. » D'où une contradiction qui condamne l'hypothèse pythagoricienne.

C'est peut être la même contradiction que Zénon cherche à mettre en lumière dans l'argument célèbre d'*Achille et de la tortue* (1). Achille, courant après une tortue, ne la ratrappera pas ; en effet, soit *a* l'avance de la tortue [c'est une longueur, donc une pluralité de points, d'après la théorie à combattre] ; lorsque Achille aura parcouru la distance *a*, la tortue aura parcouru une nouvelle distance *b* ; cette distance il faudra qu'Achille la parcoure à son tour ; pendant ce temps, la tortue s'avancera de *c* ; et ainsi de suite indéfiniment, la tortue restant toujours en avant. On voit comment se peut expliquer ce paradoxe : le raisonnement de Zénon décompose en une infinité de longueurs partielles, *a plus b*, *plus c*,... la distance au bout de laquelle Achille rattrape *effectivement* la tortue, et il imagine que, pour parcourir chacune de ces parties la tortue emploie un temps *appréciable*. Ces hypothèses ne sont pas conformes aux conditions physiques dans lesquelles s'effectue la poursuite. D'où cette conclusion naturelle qu'il n'est pas permis de regarder une distance comme une *somme* de parties discernables ou de points. Une pareille conception conduit à des conséquences absurbes et rend impossible l'explication mathématique des faits physiques.

108. — M. Milhaud résume en ces termes (2), le rôle joué par les philosophes d'Elée (Parménide et Zénon) dans l'évolution des mathématiques. Pythagore a dit « les choses sont nombres ». « En disant : *non, les choses ne sont pas nombres*, Parménide et Zénon rendaient bien plus facile l'application du nombre aux choses; car rien ne s'opposait plus désormais à ce que le nombre s'y appliquât indéfiniment dans les deux sens, rien ne s'opposait plus au concept scientifique de l'infiniment grand et de l'infiniment petit ». La

(1) Nous ne parlons pas des conséquences que l'on peut tirer des arguments de Zénon relativement au mouvement. Peut-être, d'ailleurs, la question du mouvement n'est-elle que secondaire dans la pensée du philosophe d'Elée. Cf. Paul Tannery, *loc. cit.*

(2) *Leçons sur les origines de la science grecque*, 1893, p. 219.

notion générale du nombre se trouvait, en d'autres termes, délivrée de toute entrave.

Nous admettrons donc que les grandeurs ne sont pas des nombres. — Et si, pourtant, elles sont des nombres, et une révolution s'impose, inverse de celle qu'ont accomplie les Éléates ; comme l'a fort bien vu Descartes, les progrès futurs des mathématiques sont à ce prix. Mais il faut bien nous entendre sur le sens des mots ; il faut tirer définitivement au clair la définition du nombre irrationnel et lui ôter le voile d'infinitude [1] qui l'obscurcissait aux yeux des Grecs. Nous ferons intervenir dans ce but une notion fondamentale, dont nous nous sommes déjà occupés incidemment lorsque nous avons parlé d'*approximation arbitrairement grande* en arithmétique (n° 47) et d'*exhaustion* en géométrie : la notion de *limite*. Nous allons préciser le sens de cette notion et en donner, sans aucune préoccupation historique désormais, une double interprétation, arithmétique et géométrique.

6. — *Définition rigoureuse des nombres irrationnels*

109. Suite de nombres rationnels convergeant vers une limite rationnelle. — Considérons l'ensemble des nombres rationnels qui sont voisins d'un nombre donné c (positif, négatif ou nul) et qui sont, soit tous inférieurs, soit tous supérieurs, à ce nombre. Il y a dans chacune des deux classes de nombres ainsi déterminées, une infinité de nombres de plus en plus rapprochés de c. En effet, nous savons que l'on peut former des fractions arbitrairement petites (aussi petites que l'on veut), par exemple la fraction $\frac{1}{10^m}$, où m est un nombre entier arbitrairement grand : ajoutant ces fractions à c ou les en retranchant, nous formons des nombres rationnels *arbitrairement* rapprochés de c (au sens du n° 46).

Envisageons, en particulier, une série indéfinie de nombres,

(1) MICHEL STIFEL, *Arithmetica integra*, Nüremberg, 1544, lib. II, p. 103 « *irrationalis numerus non est verus numerus, et latet sub quadam infinitatis nebula* ».

tous inférieurs à c, de plus en plus rapprochés de c ; numérotons ces nombres dans l'ordre où nous les prenons, et désignons-les par les symboles $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; nous dirons que la suite des nombres $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *tend* ou *converge* vers la *limite* (plus précisément : *limite supérieure*) c *si, quelque petit que soit un nombre donné* ε, *on peut trouver un nombre entier* N *tel que la différence* $c - a_n$ *soit inférieure à* ε *pour toutes les valeurs de l'indice n supérieur à* N.

Ainsi, par exemple [1], si l'on fait

$$a_n = c - \frac{1}{10^n},$$

la suite $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tendra vers la limite c, puisque l'on aura

$$c - a_n = c - \left(c - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{10^n}.$$

et, par conséquent, pour $n > N$:

$$c - a_n < \frac{1}{10^N},$$

[où $\frac{1}{10^N}$ est aussi petit que l'on veut si l'on a pris N assez grand].

Lorsque la suite $a_1, a_2, \ldots$ converge vers c, nous disons que le nombre a_n tend vers *la limite c pour n infini, ou que la différence* $c - a_n$ *tend vers* o.

Prenons maintenant, et semblablement, une suite de nombres $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ tous supérieurs à c et se rapprochant de plus en plus de c ; nous dirons que cette suite tend vers la *limite* (ou *limite inférieure*) c si, quelque petit que soit ε, on peut trouver un nombre entier N tel que la différence $b_n - c$ soit inférieure à ε pour toutes les valeurs de n supérieures à N ; la différence $b_n - c$ tend alors vers o pour n infini.

110. Remarques et généralisations. — On remarquera que les définitions qui précèdent n'exigent pas que la suite des nombres

[1] Au n° 65 nous avons défini une suite de polygones de 4, 8, ... n côtés dont les *périmètres* ont pour valeur une suite de nombres tendant vers la longueur du cercle de rayon 1. Toutes les évaluations d'aires ou de volumes faites par les géomètres anciens (d'après la méthode d'exhaustion) reposent sur la considération de semblables suites de figures.

$a_1, \ldots, a_n, \ldots$ aille toujours, sans exception, en croissant, ou la suite des nombres $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ toujours en décroissant. Nous affirmons seulement — en ce qui concerne les a, par exemple — que, quel que soit un nombre α moindre que c, a_n est sûrement supérieur à α à partir d'une certaine valeur de n et ne redescend plus au-dessous de la valeur α quelque grand que devienne n.

On remarquera aussi que nous pouvons facilement étendre notre définition de la limite au cas d'une suite de nombres qui sont tantôt plus petits, tantôt plus grands que c. *Si la différence des nombres c et a_n (différence qui est $c - a_n$ ou $a_n - c$ suivant que $c > a_n$ ou $c < a_n$) tend vers la limite 0 pour n augmentant indéfiniment, nous dirons que la suite $a_1, \ldots, a_n$ a pour limite c.*

111. Progressions géométriques infinies. — Nous allons appliquer les définitions qui précèdent à un exemple remarquable. Considérons la somme des n premiers termes de progression géométrique de raison r qui commence par l'unité, c'est-à-dire la somme :

$$s_n = 1 + r + \ldots + r^{n-1}$$

et supposons la raison r *inférieure* à 1. D'après les nos **21** et **38** (voir p. 45, note 1) nous avons

$$s_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \cdot (1 - r^n).$$

Considérons alors la suite indéfinie des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ où n prend toutes les valeurs entières. Cette suite est croissante, puisque chacun des nombres se déduit du précédent en ajoutant un nouveau terme de la progression géométrique ; d'ailleurs les nombres $s_1, s_2, \ldots$ sont tous inférieurs à $\frac{1}{1-r}$.

Je dis que *ma suite de nombres converge vers la limite* $\frac{1}{1-r}$. En effet on a

$$\frac{1}{1-r} - s_n = r^n.$$

Mais, lorque $n > N$, r^n est inférieur à r^N (puisque r est inférieur à 1), et la puissance r^N est un nombre aussi petit que l'on veut pourvu que N soit assez grand (n° **40**). Donc $\frac{1}{1-r}$ est bien,

d'après la définition donnée plus haut, la limite de s_n pour n infini. Nous exprimons ce résultat en disant que *la somme de la progression géométrique indéfinie*

$$1 + r + r^2 + \dots r^n + \dots$$

est égale à $\frac{1}{1 - r}$. Ainsi la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

prolongée indéfiniment est égale à $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ ou 2.

C'est là un résultat qu'énonçait déjà explicitement *Archimède* dans son *Traité de la quadrature de la parabole*, prop. 23.

112. Abscisses. Interprétation géométrique de la limite. — Comme type de grandeur, nous prendrons de préférence, avons-nous dit, la longueur d'un segment géométrique (n° **53**). *Convenons en particulier de toujours porter les segments sur une même droite, dans une même direction, et à partir d'un même point* O *appelé origine.* La comparaison des segments entre eux est alors particulièrement aisée [1].

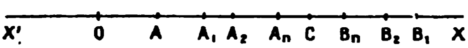


Fig. 66.

Imaginons, par exemple, que les longueurs soient portées du côté droit (à partir de l'origine O) sur la droite indéfinie [2] X'OX (fig. 66) ; alors à toute longueur OA correspond un point A (seconde extrémité du segment OA) situé à droite du point O ; nous dirons que la longueur OA est l'*abscisse* du point A.

[1] La représentation des longueurs par des abscisses rend intuitives toutes les propriétés que nous avons dit appartenir aux longueurs. Ainsi, par exemple, étant données deux longueurs, on en aura l'abscisse de leur somme en les portant bout à bout à partir du point O. — Le produit de deux longueurs pourra d'après le § 3 (n° 95) être défini comme une longueur, partant comme une abscisse.

[2] Le point X, naturellement, est quelconque sur la droite indéfinie ; on peut l'éloigner autant qu'on veut.

Cela dit, supposons que nous ayons fait choix d'une unité de longueur. Alors, à tout nombre rationnel a correspond une longueur (ayant ce nombre pour mesure) que nous pouvons porter en abscisse sur la demi-droite OX. A tout nombre rationnel, en d'autres termes, correspond une et une seule abscisse OA, un et un seul point A que nous appellerons *point représentatif du nombre a*.

Revenons maintenant aux deux suites indéfinies de nombres $a_1, \dots a_n, \dots$ et $b_1, b_2, \dots b_n \dots$ définies au n° **109**. Les nombres de la première suite sont tous inférieurs à c ; donc les points $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ qui les représentent (fig. 66) sont tous *à gauche* du point C représentatif du nombre c ; d'ailleurs lorsque l'indice n augmente indéfiniment, la différence $c - a_n$ tend vers o ; donc la distance du point A_n au point C devient inférieure à toutes les longueurs imaginables ; c'est pourquoi nous dirons que *le point* A_n *tend* (sur la droite OX) *vers le point* C, ou *admet pour limite le point* C [ou encore : que les points $A_1, \dots, A_n, \dots$ *tendent* ou *convergent* vers le point C].

Pareillement, les points $B_1, \dots, B_n, \dots$ représentatifs des nombres $b_1, \dots, b_n, \dots$ se rapprochent indéfiniment de C (en restant *à droite* de ce point) : nous dirons donc que *le point* B_n *tend vers le point* C lorsque l'indice n augmente indéfiniment.

Nous pourrions d'ailleurs également, en vertu des remarques du n° **110**, envisager une suite de points admettant pour limite le même point C et situés cependant tantôt à gauche, tantôt à droite de ce point.

113. Suite de nombres rationnels convergeant vers une limite irrationnelle. — Sur la droite OX définie ci-dessus, considérons maintenant une longueur OC qui ne soit pas mesurée par un nombre rationnel. Nous savons qu'en nous servant d'une sous-unité suffisamment petite, nous pouvons donner de la longueur OC une mesure arbitrairement approchée qui soit un nombre rationnel ; en d'autres termes, il existe des longueurs approchant arbitrairement la longueur OC, soit par défaut, soit par excès, et mesurées par des nombres rationnels. Considérons en particulier une suite de telles longueurs $OA_1, \dots, OA_n, \dots$, toutes portées en abscisses sur la demi-droite en OX, et jouissant de la

propriété suivante : quelque petite que soit une longueur donnée de mesure (rationnelle) ε, je suppose qu'on puisse trouver un nombre entier N tel que la distance A_nC soit plus petite que cette longueur pour toutes les valeurs de l'indice n supérieures à N. S'il en est ainsi nous dirons que les points A_1, A_2, ... A_n *tendent ou convergent vers le point limite C lorsque l'indice n augmente indéfiniment.*

Cette définition est également valable que les points A_1, ..., A_n, ... soient *à gauche* du point C (comme sur la figure 66 dont nous pouvons nous resservir ici), ou qu'ils soient *à droite* de C (comme les points B_1, ... B_n, ... de la figure 66) ou qu'ils soient tantôt à gauche tantôt à droite. Il est donc inutile de spécifier quel est celui de ces cas que nous considérons.

Lorsque les points A_1, ..., A_n, ... convergent vers C, nous dirons que la suite [1] des longueurs OA_1, ..., OA_n, ... est *convergente* [2] et admet pour limite la longueur OC. Et nous dirons aussi que la suite des nombres rationnels a_1, ..., a_n ... qui sont les mesures de OA_1, ... OA_n, ... est une « *suite convergente* » [3].

114. — Ainsi donc, à toute suite convergente de longueurs exactement mesurables correspond une suite convergente de nombres rationnels. La suite des longueurs, par hypothèse, admet toujours une limite qui est une longueur OC ; la suite des nombres admet, elle aussi, une limite (mesure de OC) *dans le cas où* OC *est exactement mesurable.* Il est donc indiqué d'adopter la convention de langage suivante : Chaque fois que nous aurons une suite convergente de nombres rationnels (au sens du n° **113**), nous dirons que **cette suite admet une limite, qui est la mesure de OC**, et à cette limite nous donnerons le nom de « **nombre** » ; si OC n'est

(1) Le mot *suite* indique que les longueurs sont considérées successivement, et non, bien entendu, qu'elles sont juxtaposées.

(2) Si, au contraire, les points A_1, ... A_n, ... ne tendaient pas vers un point déterminé, nous dirions que la suite est *divergente*.

(3) Si les longueurs OA_1, ... OA_n, ... sont toutes inférieures à OC, et de plus en plus grandes, la suite convergente est dite *croissante*. Si elles étaient toutes supérieures à OC et de plus en plus petites, la suite serait *décroissante*. — Si les longueurs OA_1, ... OA_n, ... ne tendent pas vers une longueur déterminée, la suite a_1, ... a_n, ... est dite « *divergente* ».

pas mesuré par un nombre rationnel nous dirons que la **limite** est un **nombre irrationnel.**

115. — Cette définition du nombre irrationnel est toute conventionnelle mais elle est parfaitement légitime. De même qu'un nombre fractionnaire n'est pas défini directement, mais bien indirectement par un *couple* de nombres entiers (numérateur et dénominateur), de même un nombre irrationnel sera défini indirectement par une suite convergente (indéfiniment prolongeable) de nombres rationnels.

Deux nombres irrationnels seront, par définition, déclarés *égaux* ou *inégaux*, suivant qu'ils sont mesures de longueurs égales ou de longueurs différentes. Ainsi, *deux suites convergentes* $a_1, \dots a_n, \dots$ *et* $b_1, \dots, b_n, \dots$ *définiront le même nombre si les extrémités* $A_1, \dots, A_n, \dots$ *et* $B_1, \dots, B_n, \dots$ *des abscisses correspondantes tendent vers un même point-limite.* Considérons d'ailleurs, en ce cas, (en supposant, pour fixer les idées, les nombres b supérieurs aux nombres a) la suite des nombres rationnels

$$(b_1 - a_1), (b_2 - a_2), \dots, (b_n - a_n), \dots$$

qui mesurent les longueurs $A_1B_1, \dots, A_nB_n, \dots$ arbitrairement petites pour n arbitrairement grand; cette suite est convergente et admet pour limite *zéro*. Réciproquement, si la suite des différences $(b_1 - a_1), \dots (b_n - a_n), \dots$ admet la limite o, les deux suites $a_1, \dots, a_n, \dots$ et $b_1, \dots, b_n, \dots$ définissent le même nombre. Ainsi, nous sommes en état de définir l'égalité [1] de deux nombres irrationnels sans faire intervenir à nouveau la notion de longueur géométrique.

Il résulte des remarques qui précèdent qu'une suite convergente de nombres rationnels définit un nombre (rationnel ou irrationnel) et un seul, tandis qu'un nombre quelconque peut être considéré comme limite de plusieurs [2] suites différentes de nombres rationnels. En revanche, *il ne correspond à un nombre*

[1] Nous dirons indifféremment, sans faire de distinction entre ces deux locutions, qu'un nombre est égal à un autre nombre ou qu'il est le *même* nombre.

[2] On peut construire autant de suites convergentes que l'on voudra qui aient pour limites le même nombre.

quelconque qu'une seule abscisse OC *et réciproquement* [lorsque l'on a choisi, une fois pour toutes, un axe et une direction des abscisses, une origine et l'unité de longueur (n° **95**)]. Il y a coïncidence exacte entre la notion de nombre et celle d'abscisse.

116. Opérations effectuées sur les nombres irrationnels. — Pour avoir le droit de considérer les nombres irrationnels comme formant avec les nombres rationnels une classe unique de nombres, il faut que nous ayons défini l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances des nombres irrationnels, et il faut que nos définitions satisfassent à la condition suivante [cf. les remarques faites au n° **31** à propos des fractions] : *toutes les fois que les nombres sur lesquels nous opérons se trouvent être rationnels, les opérations définies doivent être identiques aux opérations de l'arithmétique élémentaire qui portent le même nom.*

Or cette condition sera remplie si nous définissons les opérations fondamentales relatives aux nombres irrationnels comme opérations *correspondantes* de celles que nous savons effectuer sur les longueurs [1].

La somme ou la différence, le produit ou le quotient de deux nombres quelconques c et c' sera le nombre qui mesure la somme, la différence, le produit, ou le quotient des abscisses mesurées par c et c'. *La puissance* $m^{\text{ème}}$ ou la *racine* $m^{\text{ème}}$ d'un nombre c (pour m entier) sera le nombre qui mesure la puissance $m^{\text{ème}}$ ou la racine $m^{\text{ème}}$ de l'abscisse mesurée par c.

Il importe d'observer que *l'extraction d'une racine d'ordre p est, dans la théorie des nombres irrationnels, une opération toujours possible.* En effet, nous avons vu (**48**) que l'on peut calculer des valeurs (rationnelles) de plus en plus approchées (*arbitrairement approchées*) de la racine $p^{\text{ème}}$ d'un nombre rationnel quelconque. On démontre facilement que les longueurs mesurées par ces valeurs approchées convergent vers une longueur-limite dont la mesure sera la racine $p^{\text{ème}}$ en question.

Après avoir défini les opérations fondamentales, on pourra

[1] Les produits et quotients étant définis comme longueurs ou abcisses ainsi qu'il a été dit au n° 95.

étendre au domaine des nombres irrationnels *toutes les règles de calcul relatives aux proportions ou aux progressions arithmétiques et géométriques* (comparer n° 38).

C'est là un fait que le lecteur établira aisément lui-même.

117. Définition arithmétique des nombres irrationnels. — Pour définir les suites convergentes de nombres rationnels, nous avons eu recours à la notion d'abscisse. Cet appel à la géométrie n'est point indispensable.

On peut donner, en effet, des suites convergentes croissantes ou décroissantes une définition purement arithmétique. *Une suite de nombres rationnels croissants qui restent tous inférieurs à un même nombre fixe sera dite convergente; de même une suite de nombres décroissants qui restent tous supérieurs à un même nombre fixe.* Cela posé, on dira qu'une suite convergente de nombres croissants $a_1, \ldots a_n, \ldots$ et une suite de nombres décroissants $b_1, \ldots b_n, \ldots$ définissent un nombre si la différence $b_n - a_n$ est arbitrairement petite pour n arbitrairement grand [1].

Cette définition est d'accord avec les propriétés des nombres rationnels qui ont été établies en arithmétique. En effet, si la suite $a_1, \ldots a_n, \ldots$ [ou $b_1, \ldots b_n, \ldots$] admet pour limite un nombre rationnel — c'est-à-dire s'il existe un nombre c tel que la différence $c - a_n$ ou $b_n - c$ devienne arbitrairement petite pour n arbitrairement grand — les hypothèses que nous faisons sur les deux suites indiquent qu'elles admettent nécessairement la même limite : donc il leur correspond un nombre c et un seul que nous dirons être défini par ces deux suites.

S'il n'existe, par contre, aucun nombre rationnel qui soit limite des deux suites, nous dirons que ces suites ont pour limite un *nombre irrationnel*.

Partant de là, nous pouvons définir *a priori* (cf. **116**) les diverses opérations relatives aux nombres irrationnels et démontrer que ces opérations coïncident bien avec les opérations arithmétiques de même nom dans le cas particulier où les limites des suites considérées sont des nombres rationnels.

[1] C'est-à-dire, si *quelque petit que soit un nombre* donné ε, on peut trouver un entier N tel que $b_n - a_n < \varepsilon$ pour $n > N$.

118. Remarque. — Il faut remarquer toutefois que l'on ne peut légitimer complètement la définition arithmétique du nombre irrationnel et établir l'équivalence de cette définition et de celle du n° **114** qu'en admettant *à priori* certains postulats indémontrables. Nous reviendrons sur ce point dans notre *Deuxième Livre* (chap. v, § 7) et ferons connaître, d'autre part, une nouvelle définition du nombre irrationnel qui est indépendante à la fois de la notion d'abscisse et de celle de limite.

119. Remarque sur le sens du mot abscisse. — Nous avons, au n° **112**, défini l'abscisse comme une longueur. Mais étant donné l'analyse qui précède, les notions d'abscisse et de nombre sont pour nous rigoureusement équivalentes. C'est pourquoi nous pourrons désigner désormais par le même mot abscisse, la longueur définie au n° **112** (*longueur-abscisse*) et la mesure de cette longueur (*nombre abscisse*).

7. — Expressions arithmétiques convergentes. Séries (1)

120. — Nous avons considéré le nombre irrationnel comme la limite d'une suite convergente de nombres rationnels. Il convient de compléter nos définitions en montrant comment il sera effectivement possible de former de telles suites. Nous allons donc indiquer quelques-uns des procédés les plus simples au moyen desquels on peut définir la succession des nombres d'une suite ; j'entends par là : définir la loi qui permettra, étant considérée une suite, d'en calculer autant de termes que l'on voudra. [Les nombres de la suite peuvent ici être supposés irrationnels aussi bien que rationnels.]

121. — Reprenons d'abord, et énonçons maintenant sous sa forme la plus générale, la définition des *suites convergentes*.

(1) Les notions de convergence et de série ne se précisèrent tout à fait dans l'esprit des géomètres qu'au début du XIXe siècle, sous l'influence d'ABEL et CAUCHY, en particulier. (Voir par exemple le *Cours d'analyse algébrique* de CAUCHY, 1821). Cf. *infra, Deux. Liv.*, ch. VI.

Soit donnée une suite quelconque indéfinie de nombres rationnels ou irrationnels :

$$a_1,\ a_2,\dots\ a_n,\dots$$

c'est-à-dire soit défini un procédé permettant de déduire chaque nouveau nombre de la suite de ceux qui le précèdent. S'il existe un nombre c tel que la différence de c et du $n^{\text{ème}}$ nombre de la suite, devienne *arbitrairement petite* pour n *arbitrairement grand*, nous dirons que la suite est *convergente* et admet pour *limite* le nombre c; nous entendons par cet énoncé (cf. **110**) que, *quelque petit que soit un nombre donné quelconque* ε, on peut toujours trouver un nombre entier N tel que pour $n > N$, la différence de c et a_n soit inférieure à ε.

122. Séries convergentes. — Considérons, en particulier une suite convergente de quantités de plus en plus petites $u_1,\ u_2,\ \dots\ u_n,\ \dots$ ayant pour limite o. Posons :

$$s_1 = u_1,\quad s_2 = u_1 + u_2,\quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\dots\ s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Les nombres croissants $s_1,\ s_2,\ s_n,\dots$ forment à leur tour une *suite*; si cette suite est convergente elle définit un nombre rationnel ou irrationnel c : on dit alors que le nombre c est la *somme de la série convergente* $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ et l'on écrit (¹) :

$$c = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

les nombres $u_1,\ u_2,\dots\ u_n$ étant appelés *termes de la série*.

Plus on considère de termes dans la somme écrite ci-dessus, plus la valeur de cette somme est approchée de la valeur c. La somme $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ différence entre la somme de la série c et la somme s_n de ses n premiers termes *tend donc vers la limite* o lorsque l'on donne à n des valeurs arbitrairement grandes.

Supposons, en particulier, que $u_1,\ u_2,\ u_n,\dots$ soient respectivement des fractions de dénominateurs 1, 10, $10^2,\dots\ 10^n,\dots$ Alors la somme des n premiers termes de la série est de la forme :

$$a_1 + \frac{a_2}{10} + \frac{a_3}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^{n-1}},$$

(¹) Comme d'habitude, les *points..*, tiennent ici place des *termes* non-écrits.

$a_1, a_2, \ldots a_n$ étant des nombres entiers moindres que 10 ; cette somme est un nombre décimal qui a $n - 1$ *chiffres décimaux*. Ainsi un nombre décimal auquel on ajoute indéfiniment de nouveaux chiffres décimaux est la somme d'une série convergente, — somme qui peut être un nombre rationnel ou un nombre irrationnel.

Considérons, par exemple, la mesure de la longueur de la circonférence de rayon 1. Cette mesure est un *nombre irrationnel que nous appelons* $2.\pi$ et nous pouvons écrire, d'après le n° **67**

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \ldots$$

ce qui est la même chose que l'égalité

$$\pi = 3,145\ldots$$

expression qui approchera de plus en plus la mesure cherchée lorsque nous en déterminerons un plus grand nombre de décimales.

Un autre exemple de série convergente est la progression géométrique de raison *inférieure* à 1 que nous avons considéré au n° **111**

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots$$

Considérons encore la série suivante :

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots$$

On démontre que cette série est *convergente* et l'on appelle [1] e le nombre *irrationnel* qui est sa limite. La valeur approchée de ce nombre est :

$$2,718\,281\,828\,459\,045\ldots$$

Le nombre e jouit de remarquables propriétés sur lesquelles nous aurons à revenir. *Hermite* a démontré en 1873 qu'il est transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être considéré comme le résultat

(1) Nous verrons plus loin comment historiquement le nombre e s'est introduit en algèbre.

d'aucune combinaison d'opérations fondamentales effectuées sur l'unité (plus précisément; on ne peut former aucune équation polynomale ayant pour coefficients des nombres rationnels dont le nombre e soit racine, voir p. 81, note 3). Pour obtenir une expression exacte du nombre e, il faudrait effectuer une combinaison comprenant une infinité d'opérations.

123. — Les considérations qui précèdent peuvent être généralisées. Envisageons, d'une manière générale, une combinaison composée d'opérations dont le nombre peut être augmenté indéfiniment suivant une loi déterminée. Cette combinaison *est* appelée « expression arithmétique ». Si la suite des nombres qu'elle représente (lorsqu'on multiplie indéfiniment les opérations) converge vers une limite c, l'expression arithmétique est dite *convergente* et le nombre c est sa *limite*.

La *série* convergente définie ci-dessus est le type le plus simple d'expression arithmétique convergente, puisque c'est une combinaison d'additions seulement. Une combinaison d'additions et de soustractions sera également appelée *série* : ainsi l'expression :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

qui peut être prolongée indéfiniment suivant une loi bien apparente est une « série convergente ». Leibniz [1] a démontré qu'elle a pour limite le nombre $\frac{\pi}{4}$ (π étant la moitié de la mesure du cercle de rayon 1).

Une autre expression arithmétique convergente est celle par laquelle François Viète [2] propose de définir le nombre π :

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots;$$

(1) *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus. Acta eruditorum*, 1682, p. 41, et suiv. et *Math. Werke*, t. V, p. 118.

(2) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber* VIII, chap. XVIII, 1597.

dans cette expression le nombre des radicaux peut être indéfiniment multiplié ; l'expression est convergente et a pour limite $\frac{2}{\pi}$.

Wallis [1] et lord *Brouncker*, d'autre part, formèrent — toujours pour définir le nombre π, — les expressions convergentes suivantes :

$$\frac{3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7 . 9 . 9 . 11 . 11 \ldots}{2 . 4 . 4 . 6 . 6 . 8 . 8 . 8 . 10 . 10 \ldots}$$

et

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ldots}}}}}$$

qui ont respectivement pour limites $\frac{4}{\pi}$ et $\frac{2}{\pi}$. La seconde expression [2], composée d'une cascade indéfinie de fractions est appelée *fraction continue* (*fractio continua fracta*). Des expressions convergentes de même forme avaient déjà été étudiées au XVIe siècle par l'algébriste *Bombelli* [3] de Bologne.

124. Expressions convergentes où figure un nombre qui augmente indéfiniment. — Il existe des expressions arithmétiques convergentes qui se présentent sous une forme autre que celle dont nous venons de parler.

Considérons une combinaison d'opérations effectuées sur le nombre entier ou rationnel n et supposons que ce nombre prenne des valeurs arbitraires *de plus en plus grandes* : si la suite des nombres fournis par la combinaison considérée (pour les valeurs successives de n) converge vers une limite c, la combinaison est une « expression arithmétique convergente » dont la limite est c.

(1) Voir WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1655, *Opera* I, p. 469-75.

(2) La loi suivant laquelle cette expression est formée est manifeste : les nombres 1, 9, 25, 49, 81,... sont en effet les carrés des nombres impairs successifs 1, 3, 5, 7, 9, etc.

(3) L'*Algebra*, 1579, p. 35-37 (Bibl. N. V. 6922).

Ainsi [1] l'on démontre que le nombre :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

où n est un nombre *entier*, se rapproche de plus, du nombre e défini plus haut lorsque n prend des valeurs arbitrairement grandes. Nous dirons donc que l'expression $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *admet, pour n infiniment grand, la limite e*, et nous écrirons :

$$e = \text{limite de } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ pour } n \text{ infini},$$

ou simplement :

$$e = \lim_{n \text{ infini}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

L'expression :

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

où a est un nombre quelconque et n un nombre entier arbitrairement grand, est également convergente : sa limite est en général un nombre irrationnel.

Nous pourrions facilement allonger la liste de ces exemples, car la combinaison des opérations arithmétiques indéfiniment répétées ou portant sur des nombres indéfiniment croissants, offre à l'ingéniosité du mathématicien des possibilités illimitées. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet et nous étudierons en détail certaines expressions convergentes, les séries en particulier. Nous aurons ainsi l'occasion d'insister sur les difficultés d'une nature assez délicate auxquelles donne lieu l'étude de la convergence lorsque l'on cherche à l'approfondir.

[1] Voir aussi sur les expressions de ce type, *infra*, *Trois. liv.*, ch. II, § 1.

8. — *Les nombres relatifs*

125. Abscisses des sens opposés. — Après avoir réconcilié de notre mieux les notions de grandeur continue et de nombre rationnel discontinu, nous allons poursuivre l'étude générale des nombres (irrationnels ou rationnels) qui représentent des grandeurs.

Nous avons reconnu plus haut l'intérêt qu'il y a à représenter les nombres sous forme d'abscisses ([1]). Cependant il y a, dans la figuration géométrique des abscisses une dissymétrie choquante qui semble en diminuer la valeur.

Sur la droite indéfinie (ou axe) X'OX tous les points situés d'un même côté (par exemple *à droite*) de l'origine O ont des abscisses, et sont, par conséquent, *déterminés* par des nombres (irrationnels ou rationnels); au contraire les points situés à gauche de O n'ont pas d'abscisse; il ne leur correspond aucun nombre.

Cependant nous pouvons désirer raisonner sur les points situés à gauche de O comme sur les points situés à droite; nous remarquerons alors qu'il suffit de renverser la direction suivant laquelle les segments-abscisses sont portés sur X'X pour que les points de OX' soient, à leur tour, définis par des abscisses. En indiquant, autrement dit, non seulement la valeur, mais aussi le *sens* du segment OA, nous pouvons regarder tout point A de la droite X'X comme défini par une abscisse. Par exemple, si la droite X'X est orientée d'ouest en est, et si ([2]) *longueur* OA = *longueur* OA' = *a* (fig. 67), nous conviendrons de dire que A est le point d'abscisse « *a, est* », et A' le point d'abscisse « *a, ouest* ».

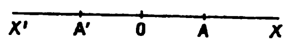


Fig. 67.

Mais il ne suffit pas de distinguer deux classes différentes d'abscisses ; il faut apprendre à les comparer, c'est-à-dire effectuer des calculs qui portent à la fois sur des *abscisses est* et sur des *abscisses ouest*.

([1]) Voir le n° 119.

([2]) Nous supposons l'unité de longueur fixée une fois pour toutes ; nous pouvons prendre alors, pour abréger, l'expression « longueur OA » dans le sens de « mesure de la longueur OA » et regarder les mots « abscises » et « nombre abscisse » comme équivalents (cf. 119).

Comment y parvenir? La question est délicate, car l'Arithmétique ne nous autorise à calculer que sur des unités de même espèce : il n'est pas permis, comme on dit vulgairement, d'additionner des bottes avec des gendarmes. Cependant, si nous analysons les notions d'addition et de soustraction géométriques introduites au n° 53, nous trouverons que ces notions conservent toute leur signification lors même qu'on les applique à des segments qui n'ont pas tous le même sens, et que, par conséquent, les abscisses de sens opposés sont des « grandeurs comparables » au sens du n° 55.

126. Opérations sur les longueurs-abscisses. — Revenons à notre conception première des abscisses définies comme segments ou longueurs de segments, et considérons deux abscisses OA et OB *dirigées* de O vers X (fig. 68); j'entends dire par là que les extrémités A et B sont entre O et X; d'une manière générale, en effet, *nous attribuerons à un segment tel que* OA *ou* OB, *ou* OA', fig. 67 *le* **sens** *qui va, du point* O, *nommé le premier, vers l'extrémité* A *ou* B *ou* A'.



Fig. 68.

Désignons par a et b les longueurs de OA et OB. Pour ajouter les abscisses a et b, nous devons manifestement porter, à partir de A, *et à droite* de ce point (c'est-à-dire *dans le sens du segment* OB) une longueur égale à b. Pour retrancher b de a, nous devons à partir de A, porter la même longueur en sens inverse. Ainsi sur la fig. 68, la somme $a + b$ est l'abscisse OC, la différence A — B est l'abscisse OD.

Les opérations additive et soustractive que nous définissons ainsi ne supposent nullement, au point de vue géométrique tout au moins, que b soit plus petit que a. Elles sont encore possibles si $b > a$ [le point D, construit comme il a été dit tombe alors *à gauche* du point O], bien qu'en ce cas la différence $a - b$ n'ait plus de sens arithmétique.

Il y a plus. Nos opérations conservent un sens géométrique bien défini lors même que les abscisses, ou les segments OA et OB sont de sens contraires (cas de la fig. 69). Si nous portons, en ce cas, sur l'axe X'OX à partir du point A, un segment égal à OB et dirigé

dans le sens [1] de ce segment (situé par conséquent à gauche de A), nous obtenons une longueur OC bien déterminée que nous pouvons continuer à appeler *somme* des abscisses OA et OB ; tandis que nous appellerons *différence* de ces abscisses l'abscisse OD obtenue en portant à partir du point A un segment égal à OB et dirigé dans le sens de B vers O.

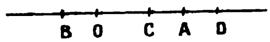


Fig. 69

La multiplication d'une abscisse OA ou OB par un nombre n est également une opération bien définie, quel que soit le sens de l'abscisse ; le résultat est une abscisse de même sens que OA ou OB et égale à n fois [2] la longueur OA ou OB.

Cela étant, ne serait-il pas possible d'élargir un peu le cadre de la vieille arithmétique afin d'y introduire ce calcul d'un nouveau genre qui permet de combiner des abscisses de sens opposés ?

127. Abscisses ou nombres positifs ou négatifs. — Faisons d'abord une convention de langage qui est très naturelle après ce que nous venons de constater.

Reportons-nous à la figure 67 et considérons le point A′ situé à gauche de O à la distance OA′ = a. Par analogie avec notre définition de la soustraction géométrique, nous conviendrons de dire que le point A′ est obtenu en soustrayant la longueur OA′ de l'abscisse (*égale à* 0) du point O : pour désigner alors l'abscisse du point A′, appelée tout à l'heure « *a ouest* », nous dirons : *zéro moins a* ou *moins a* et nous écrirons : $-a$. Quant à l'abscisse du point A (fig. 67) nous la désignerons indifféremment par $+a$ ou par la simple lettre a. Ces conventions nous amènent à appeler *sens positif* le sens primitivement (et d'ailleurs arbitrairement) choisi comme direction des segments définissant les abscisses (sens de O vers X) : c'est le sens de l'addition ; le sens opposé sera appelé *sens négatif* : c'est le sens de la soustraction. En conséquence, l'abscisse de tout point situé, par rapport à l'origine dans

(1) C'est-à-dire le sens de O vers B (voir ci-dessus).

(2) Cette locution a un sens lors même que n est irrationnel, puisque le produit de deux nombres irrationnels, $n \times$ *longueur* OA *ou* OB, a été défini comme nombre-abscisse.

la direction positive sera dite : *abscisse positive*; l'abscisse de tout point situé de l'autre côté sera dite *abscisse négative* ([1]).

D'ailleurs nous avons été conduits au § *6*, à considérer les abscisses comme des nombres. Nous conviendrons donc de dire que les abscisses positives sont des *nombres positifs* et que les abscisses négatives sont des *nombres négatifs*.

Cette terminologie est arbitraire, mais elle est féconde en suggestions : le jour où elle a été universellement adoptée, une grande révolution, dont nous verrons plus loin les effets, s'est trouvée accomplie dans la science du calcul.

Sans doute, il y avait longtemps que les arithméticiens savaient distinguer, comparer et combiner des grandeurs de sens opposés. Diophante (voir n° **27**, note 2) raisonnait sur des grandeurs ajoutées ou retranchées ([2]). Avec plus de hardiesse (voir *Deux. Liv.*, chap. 1), les Hindous avaient codifié, et poussé fort loin dans ses applications, le calcul des *biens* et des *dettes* (*propriétés* et *dettes*, *profits* et *déchets*) ([3]). Et, trouvant comme solution d'un problème le nombre $-7\frac{3}{11}$, Nicolas Chuquet ([4]) déclarait : « Ainsi ce calcul est vrai, qu'aucuns tiennent impossible ». Cependant, lorsque Diophante parlait de grandeurs retranchées, il n'entendait point dire qu'elles fussent inférieures à zéro et il s'arrangeait de manière qu'elles soient toujours soustraites de grandeurs plus grandes ; au XVI[e] siècle encore, Michel Stifel, — qui voyait clairement que raisonner sur des quantités négatives, c'est raisonner « sur des nombres moindres que 0, c'est-à-dire moindres que rien », — Michel Stifel qualifiait ces nombres de *nombres absurdes* ([5]) (*numeri absurdi*) ; Cardan ([6]) les appelait *nombres feints* (*numeri ficti*). Ce n'est

([1]) On disait autrefois : *positif* et *privatif* ou *affirmatif* et *négatif*. Un axe sur lequel on a choisi un sens positif et un sens négatif est dit « dirigé » ou « orienté ».

([2]) ὑπάρξεις et λείψεις. *Œuv. de Dioph.*, éd. Tannery I, p. 12 et suiv.

([3]) Cf. Rodet, Journal asiatique, t. XI, 1878, p. 25 et la théorie des équations, *infra*, *Deux. Liv.*

([4]) *Le Triparty*, 1484, supplément (voir p. 11, note 1), p. 419, déf. 14 (?).

([5]) *Arithmetica integra* (*vide*, p. 26, note 1), p. 246.

([6]) *Ars Magna*, 1545, chap. I. *Œuv.* IV, p. 223. Dans la résolution des équations algébriques (*vide infra*). Cardan de même que Stevin (*L'arithmétique*, 1585) n'hésitent pas à utiliser certaines transformations (*vide Deux. Liv.*, ch. 1, § 1) qui introduisent des nombres négatifs.

qu'après de longues hésitations que les mathématiciens se décidèrent à ne point établir de différence de nature entre les longueurs positives et les longueurs négatives, et à considérer les mesures de ces deux sortes de grandeurs comme *une seule et même classe de nombres* (comparer n^{os} **38** et **97**). Aux cartésiens revient le mérite d'avoir définitivement consacré cette manière de voir en formulant avec précision les définitions qu'elle suppose ([1]).

128. — Nous avons vu tout à l'heure que l'on peut effectuer sur les abscisses négatives, ou de sens opposés, des opérations analogues à celles que nous avions déjà appris à faire sur les seules abscisses positives. Partant de là, il nous est facile de constituer *a priori* une théorie des opérations fondamentales, addition, soustraction, multiplication, portant sur les nombres-abscisses négatifs ou positifs et négatifs. Nous n'aurons, pour cela, qu'à interpréter les constructions géométriques du n° **126**, et à satisfaire à la condition générale suivante : il faut (cf. **97**) que, lorsqu'elles portent sur des nombres tous positifs (nombres rationnels ou irrationnels), les opérations que l'on définit coïncident rigoureusement avec les opérations déjà connues qui portent le même nom. Or cette condition sera remplie si nous convenons d'adopter les définitions et règles que voici :

129. Nombres relatifs. — L'ensemble des abscisses positives et négatives sera regardé comme une classe de nombres, que l'on appellera *nombres relatifs*.

Chaque nombre relatif est défini par un nombre ordinaire (rationnel ou irrationnel, appelé *valeur absolue* du nombre relatif) et par un *signe* (le signe + ou le signe —). Ainsi deux nombres relatifs seront déclarés égaux s'ils ont même valeur absolue et même signe (et en ce cas seulement).

Un nombre relatif sera dit *positif* ou *négatif* suivant qu'il sera *affecté du signe + ou —*. Les nombres rationnels négatifs seront représentés dans l'écriture courante, par leur valeur absolue pré-

([1]) Cf. p. 284, note 1. Au chap. I de notre *Deuxièm Livre* (§ 6), nous aurons occasion de signaler les célèbres recherches de Descartes sur les racines négatives des équations.

cédée du signe —. Les nombres rationnels positifs sont des nombres rationnels ordinaires ; on les représentera donc par leur valeur absolue ; cependant il n'est pas interdit de placer le signe + devant cette valeur.

D'ailleurs, lorsque nous raisonnerons sur les nombres relatifs en général, sans préciser desquels il est question, nous pourrons toujours représenter ces nombres par de simples lettres ([1]) a, b, c, ... ; mais alors, quand nous remplacerons les lettres par les valeurs numériques dont elles tiennent la place, nous devrons avoir soin d'affecter ces valeurs des signes qui leur reviennent.

Pour exprimer qu'un nombre relatif représenté par une lettre a est un nombre positif, nous écrirons $a > 0$; pour exprimer que le nombre est négatif, nous écrirons $a < 0$; la valeur absolue de a sera représentée par le *symbole spécial* $|a|$. Deux nombres de même valeur absolue et de signes contraires sont dits : *nombres opposés* ou *nombres égaux et de signes contraires.*

Que a représente un nombre positif ou négatif, nous désignerons toujours par $+a$ le même nombre que a et par $-a$ le nombre opposé.

Les nombres non affectés de signes (et, par conséquent, tous positifs), en tant qu'ils s'opposent aux nombres relatifs, sont appelés : *nombres absolus*.

130. Addition des nombres relatifs. — *La somme $a + b$ de deux nombres relatifs a et b est un nombre relatif ainsi formé : si les deux nombres sont de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et on affecte le résultat du signe commun ; si les deux nombres sont de signes contraires, on retranche l'une de l'autre leurs valeurs absolues* (savoir : *la plus grande de la plus petite*) *et l'on donne au résultat le signe du nombre qui a la plus grande valeur absolue.* Ainsi l'on écrit ([2]) :

$$(-3) + (-2) = -5, \quad 3 + (-2) = 1, \quad 3 + (-4) = -1.$$

La somme de trois nombres relatifs est le résultat de l'addition

([1]) *Vide* n° 268.

([2]) Nous mettons entre parenthèses l'ensemble des signes et du nombre absolu qui définissent un nombre relatif.

du troisième nombre à la somme des deux premiers. Et ainsi de suite.

Ces règles sont conformes à l'interprétation géométrique de l'addition donnée au n° **126**. De là résulte que cette opération coïncide avec l'addition ordinaire lorsque les nombres additionnés sont positifs; elle jouit de plus des propriétés de *commutativité* et d'*associativité* (cf. n° **5**) : on a

$$a + b = b + a \qquad \text{et} \qquad (a + b) + c = a + (b + c).$$

On déduit de ces propriétés que pour calculer la somme de plusieurs nombres relatifs, on peut procéder comme il suit : on additionne, d'une part les nombres positifs, d'autre part les valeurs absolues des nombres négatifs; on retranche la plus petite somme de la plus grande et on donne au résultat le signe des nombres qui ont fourni la plus grande somme.

131. Soustraction. — Nous définirons la soustraction dans les mêmes termes qu'au n° **6**. La différence $a - b$ (a moins b) est le nombre d tel que $b + d = a$. D'où la règle suivante, conséquence de celle qui régit l'addition [1] : *pour soustraire (ou retrancher) un nombre, il suffit d'ajouter le nombre opposé, qui a même valeur absolue et un signe contraire.*

En d'autres termes, je dis que $a - b = a + (- b)$. Et, en effet, si nous faisons la somme $a + (- b) + b$ conformément aux règles de l'addition, nous obtenons bien le nombre a.

Il résulte de cette règle que toutes les différences peuvent être remplacées par des sommes et réciproquement. En particulier, les symboles $+ (- a)$ $- (+ a)$, ou $- (- a)$, où a est un nombre relatif, peuvent toujours être remplacés par les symboles $- a$, $- a$ ou $+ a$ sans parenthèses.

[1] BHASKHARA (*Vija-ganita*, chap. I, trad. Colebrooke, p. 132) énonce la règle en ces termes : *Règle de la soustraction : le bien passe à l'état de bien la perte, puis on fait l'addition comme il est dit.* En particulier : (*ibid.* p. 136) : *Dette retranchée de zéro devient un bien, et bien devient une dette*, ce qui veut dire pour nous :

$$0 - (- a) = a \qquad \text{et} \qquad 0 - a = - a.$$

La règle de l'addition est résumée par les vers suivants dans le traité de *Lucas Paciuolo* (1494) :

> **Piu con piu gionto fa sempre piu,**
> **Meno con meno gionto fa ancor men**
> **Piu con meno gionto sempre se abatte,**
> **E fara la maggiore denominatione.**
> **Meno con piu quello medesimo che piu con meno [1].**

132. Multiplication des nombres relatifs. — Soit à multiplier, en premier lieu, un nombre relatif a par un nombre absolu n (voir **129**) : la représentation géométrique du nombre-abscisse a nous conduit à définir le produit $a \times n$ comme étant le produit par n de la valeur absolue de a, ce produit étant affecté du même signe que a.

Soit maintenant à multiplier a par le nombre négatif $-n$. Nous convenons d'admettre que *moins n fois le nombre a*, c'est *n fois le nombre a retranché de* 0 : en d'autres termes, nous posons :

$$(-n) \times a = -(n \times a),$$

et nous sommes ainsi amenés à formuler la règle suivante qui satisfait à la condition requise au n° **128**.

Le produi ta $\times$ *b ou a . b de deux nombres relatifs a et b est un nombre relatif qui a pour valeur absolue le produit* [2] $|a| \times |b|$ *des valeurs absolues de a et b et qui est positif ou négatif suivant que les deux nombres a et b ont même signe ou des signes contraires.*

C'est la règle que l'on enseigne aux écoliers : *Plus* par *plus* donne *plus*, *plus* par *moins* et *moins* par *plus* donnent *moins*, *moins* par *moins* donne *plus*; ou, comme disait Luca Paciuolo :

> **Piu via piu sempre fa piu**
> **Meno via meno sempre fa piu**
> **Piu via meno sempre fa meno**
> **Meno via piu similiter anche meno [3].**

[1] *Summa*, fol. 112. « Plus ajouté à plus donne toujours plus; moin ajouté à moins donne encore moins; plus ajouté à moins se retranche toujours et le signe est celui du plus grand nombre; moins et plus donne la même chose que plus et moins ».

[2] Il résulte de cette règle que l'on a $|a.b| = |a| \times |b|$.

[3] *Summa* fol. 114, Cf. Chuquet, le *Triparty*, 1484, sec. part. chap. V. « Notable à savoir : qui multiplie plus par plus et moins par moins, il en vient plus. Et qui multiplie plus par moins *vel a contrario*, il en vient oujou rs moins ».

Ainsi

$$3 \times (-2) = -6; \qquad (-3) \times (-2) = 6.$$

Le produit de a par o sera, par définition, égal à o quel que soit a. Le produit de trois facteurs a, b, c sera le produit par c du produit $a \times b$.

La multiplication telle que nous venons de la définir jouit des propriété de *commutativité*, d'*associativité*, et de *distributivité* (n° 7); on a, en d'autres termes :

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad (a \cdot b) \times c = a \times (b \cdot c),$$
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

133. Division et fractions. — Nous appellerons *inverse* d'un nombre relatif a le nombre relatif de même signe qui a pour valeur absolue l'inverse $\frac{1}{|a|}$ de la valeur absolue de a; nous représenterons ce nombre par $\frac{1}{a}$.

Cela posé, *le quotient $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ de la division d'un nombre a par un nombre b sera, par définition, le produit de a par le nombre $\frac{1}{b}$.* Ce produit a pour valeur absolue [1] $\frac{|a|}{|b|}$ et est affecté du signe + ou du signe — suivant que a et b ont même signe ou des signes contraires.

Lorsque a et b sont des nombres entiers, le quotient $\frac{a}{b}$ est une fraction affectée du signe + ou du signe —. Les règles de calcul applicables aux fractions de nombres relatifs se déduisent immédiatement des règles établies pour les fractions ordinaires (chap. 1, § 5) et des définitions du présent paragraphe. Ainsi : *on ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou divisant ses deux termes par un même nombre relatif* (on peut par conséquent réduire au même dénominateur plusieurs fractions données) ; *pour ajouter ou retrancher plusieurs fractions de même dénominateur, il suffit d'ajouter ou retrancher les numérateurs et de donner au résultat*

[1] Il résulte de là que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

le dénominateur commun; — le produit de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ *est le produit* $\frac{a \times c}{b \times d}$; *le quotient de* $\frac{a}{b}$ *par* $\frac{c}{d}$ *est la fraction* $\frac{a \times d}{b \times c}$.

134. — Le quotient d'un nombre a par un nombre positif extrêmement petit est un nombre positif extrêmement grand de même signe que a : nous exprimerons ce fait en disant que lorsque le dénominateur d'une fraction positive ou négative se rapproche indéfiniment de o, la fraction tend vers un nombre infini positif ou négatif (voir n° **41**) et nous écrirons symboliquement (quel que soit le nombre a) :

$$\frac{a}{0} = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty .$$

135. Puissances et racines. — Ayant défini la multiplication des nombres relatifs, nous pouvons définir, *quel que soit le nombre entier positif p*, la puissance $p^{\text{ème}}$, a^p, d'un nombre relatif a. Le nombre a^p a pour valeur absolue (¹) $|a|^p$ et pour signe le signe + ou le signe de a suivant que l'exposant p est pair ou impair (²).

Nous définirons, d'autre part, la racine d'ordre p du nombre a $\left(\sqrt[p]{a} \text{ ou } a^{\frac{1}{p}}\right)$ comme un nombre b dont la puissance $p^{\text{ème}}$ est égale à a. Existe-t-il toujours un nombre b jouissant de cette propriété, et en existe-t-il un ou plusieurs? Cela dépend du nombre entier p et du signe de a; en tout cas, s'il existe un nombre b, ce nombre a pour valeur absolue le nombre positif $\sqrt[p]{|a|^p}$; donc il y a *au plus* deux racines $p^{\text{èmes}}$ de a savoir : $+\sqrt[p]{|a|}$ et $-\sqrt[p]{|a|}$.

Soit d'abord p un *nombre impair* : alors (d'après la règle énoncée ci-dessus) le nombre positif $\sqrt[p]{|a|^p}$ a une puissance $p^{\text{ème}}$ positive qui est égale à $|a|$; le nombre négatif $-\sqrt[p]{|a|}$ a une puissance $p^{\text{ème}}$ négative égale à $-|a|$. J'en conclus *que le nombre a admet*

(¹) On a donc $|a^p| = |a|^p$.

(²) En effet a^2 produit de deux nombres positif ou négatif, est positif; a^3 produit par a du nombre positif a^2, a le signe de a; a^4, produit de a par le nombre a^3 qui a même signe que a, est positif, et ainsi de suite.

une et une seule racine d'ordre p, racine qui est égale à $+\sqrt[p]{|a|}$ *ou à* $-\sqrt[p]{|a|}$ *suivant que a est positif ou négatif.*

Soit maintenant p un *nombre pair* : alors le nombre positif $\sqrt[p]{|a|}$ et le nombre négatif $-\sqrt[p]{|a|}$ ont tous deux une puissance $p^{ème}$ positive égale à $|a|$. J'en conclus que, *si a est positif, ce nombre a deux racines d'ordre p, respectivement égales à* $+\sqrt[p]{|a|}$ *et* $-\sqrt[p]{|a|}$; *si a est négatif, ce nombre n'a pas de racine d'ordre p,* et l'extraction de la racine $p^{ème}$ de a est une opération impossible.

136. — Etant donné la pluralité possible des racines d'ordre p d'un même nombre, il nous faudra soigneusement indiquer — lorsque nous parlerons d'une racine $p^{ème}$ — si nous entendons raisonner sur l'une des racines en particulier ou sur l'une *quelconque* des racines (sans préciser laquelle). D'une manière générale (¹) — dans tout ce *Premier Livre* au moins — nous désignerons par le symbole $\sqrt[p]{a}$ ou $a^{\frac{1}{p}}$, non précédé d'un signe, *la racine* $p^{ème}$ *de a qui a le même signe que a*; la seconde racine (dans le cas où p est pair et $a > 0$) sera alors représentée par la notation $-\sqrt[p]{a}$.

137. Exposants rationnels positifs ou négatifs. — Conformément à la convention du n° **50** la racine d'ordre n de a^m, c'est-à-dire $\sqrt[n]{a^m}$ sera représentée par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$. On vérifie facilement que, quels que soient le nombre relatif a et les nombres positifs rationnels p et q, les égalités fondamentales (1), (2), (3) du n° **50** :

$$a^p.a^q = a^{p+q}; \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \text{ (si } p > q); \qquad (a^p)^q = a^{p \cdot q}.$$

sont satisfaites (lorsque les puissances qui y figurent existent, voir n° **135**).

Cela dit, nous allons faire une convention nouvelle qui augmentera encore l'intérêt de la « *notation exponentielle* » (*vide*

(¹) Le symbole $\sqrt[p]{|a|}$ ou $|a|^{\frac{1}{p}}$, en particulier, représentera *toujours* la racine $p^{ième}$ positive du nombre essentiellement positif $|a|$. — La convention que nous énonçons ici devient incommode et est écartée lorsque la lettre a représente une quantité variable (voir *livre Deux*. I, 54).

n° **51**). Convenons de poser (¹), quel que soit le nombre positif rationnel k :

$$\frac{1}{a^k} = a^{-k} \qquad \left(\text{ainsi } \frac{1}{a} = a^{-1},\ \frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}},\ \text{etc.}\right)$$

et considérons a^{-k} comme une *puissance d'exposant négatif*. Nous constaterons sans peine que, si cette définition est admise, *les puissances à exposants rationnels* (²) *positifs ou négatifs jouiront des mêmes propriétés fondamentales que les puissances à exposants rationnels positifs.*

En effet, soient d'abord p et q tous deux négatifs; posant $p = -p'$, $q = -q'$, nous avons par définition :

$$a^p \,.\, a^q = \frac{1}{a^{p'}} \cdot \frac{1}{a^{q'}} \qquad \text{d'où} \qquad a^p \,.\, a^q = \frac{1}{a^{p'+q'}} = a^{-(p'+q')} = a^{p+q};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^{p'}} \,.\, a^{q'} = a^{q'-p'} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^{p'-q'}} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{p'}}\right)^{q'}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{p'q'}}} = a^{p'\cdot q'} = a^{p\cdot q}.$$

On obtient les mêmes formules dans le cas où les exposants p et q sont de signes contraires.

Ainsi, *quels que soit les nombres rationnels positifs ou négatifs p et q on a toujours les égalités fondamentales* :

$$(1) \qquad a^p \,.\, a^q = a^{p+q}, \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{p\cdot q}.$$

Remarque. — Il résulte de nos définitions qu'une puissance quelconque (à exposant positif ou négatif) d'un nombre positif est toujours positive.

138. Inégalités. — Etant donnés deux nombres relatifs a et b, nous dirons que a est inférieur à b si la différence $b - a$ est posi-

(¹) On trouve dans le *Triparty* de Nicolas Chuquet, 1484, le symbole $12^{1\bar{m}}$ (équivalent à 12^{-1}) pris dans le sens de $\frac{1}{12}$ (éd. Marre, p. 151-52).

(²) Jusqu'à nouvel avis nous devons supposer que les exposants ne sont pas nuls, car nous n'attribuons encore aucun sens au symbole a^0.

tive. Ainsi, un nombre négatif quelconque est inférieur à un nombre positif quelconque, et *de deux nombres négatifs le plus petit est celui qui a la plus grande valeur absolue*; par exemple, on écrira :

$$-3 < -2, \quad -3 < 0, \quad -3 > -5.$$

La formule qui exprime qu'un nombre est inférieur ou supérieur à un autre nombre est une *inégalité* (cf. **40**).

Nous définirons comme au n° **40** ce qu'il faut entendre par une « opération effectuée sur une inégalité » et nous pourrons énoncer les propriétés suivantes, qui se déduisent immédiatement des règles relatives aux opérations fondamentales :

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c, l'inégalité $a < b$ entraîne $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$. Si c est positif, $a < b$ entraîne $a.c < b.c$, car le produit $c \times (b - a)$ est positif comme la différence $(b - a)$. *Si c est négatif, $a < b$ entraîne $a.c > b.c$*, car le produit $c \times (b - a)$ a un signe opposé au signe de $b - a$.

Si p et q sont deux nombres rationnels tels que $p < q$, et si $a > 1$, on a $a^p < a^q$; posons, en effet $q = p + d$, nous avons $a^q = a^p.a^d$, donc $a^q - a^p = a^p.(a^d - 1)$ produit de deux nombres positifs [1].

Lorsque p est un nombre positif très grand (*a étant plus grand que* 1), *a^p est un nombre positif très grand* (cf. n° **40** *in fine*). *Lorsque p est un nombre négatif très grand en valeur absolue*, a^p est l'inverse d'un nombre positif très grand : c'est donc un *nombre positif très petit.*

139. Suites de nombres. Progressions. Proportions. — Puisque l'on peut toujours dire quel est le plus grand de deux nombres relatifs donnés, on peut, étant proposé un ensemble quelconque de nombres, ranger ces nombres suivant une suite *croissante* ou *décroissante* (cf. n° **39**). Et, sur les suites croissantes ou décroissantes de nombres relatifs, on peut raisonner comme sur les suites de nombres absolus. On peut en particulier étendre à ces suites beaucoup de propriétés des suites de nombres entiers.

Considérons en particulier une suite croissante ou décroissante de nombres relatifs dans laquelle deux nombres consécutifs quelconques ont pour différence un même nombre r : une telle suite s'appelle

[1] D'après la note 1 de la p. 61 les puissances a^p, a^d sont supérieures à 1.

progression arithmétique de raison r (cf. n°s **15**, **38**, **116**) ; si l'on désigne le premier terme par a, les termes suivants sont $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$, etc. En raisonnant comme au n° **15**, on démontre que la somme des n premiers termes est $n.a + \frac{r.(n-1).n}{2}$.

Considérons pareillement une suite croissante ou décroissante de nombres dans laquelle deux nombres consécutifs quelconques ont pour rapport (quotient) un même nombre b : une telle suite s'appelle *progression géométrique de raison* b (n°s **21**, **38**) ; si l'on désigne par a le premier terme, les termes suivants sont $a.b$, $a.b^2$, $a.b^3$,... et l'on démontre en raisonnant comme au n° **21** que la somme des n premiers termes est $a.\frac{1-b^n}{1-b}$ quelle que soit [1] la valeur de b.

On étendra également à la classe des nombres relatifs les définitions des *moyens arithmétique*, *géométrique* et *harmonique* données au n° **20**, et toutes les règles qui régissent le calcul des *proportions*.

140. Suites convergentes. Limites. — Enfin on pourra définir, comme on l'a fait avec les nombres absolus, des *suites convergentes* de nombres relatifs ; soit, par exemple, $a_1,\ldots a_n,\ldots$ une suite de nombres négatifs décroissants ou croissants : si la suite des nombres positifs, croissants ou décroissants, $|a_1|$, $|a_2|,\ldots |a_n|,\ldots$ est une suite convergente dont la limite est un nombre c (irrationnel ou rationnel), nous dirons que la suite des $a,\ldots a_n,\ldots$ est *convergente* et a pour *limite* $-c$. Cette définition est conforme aux propriétés géométriques des abscisses et à la définition des nombres négatifs irrationnels [2].

On pourra, plus généralement, étendre à la classe des nombres relatifs, la définition de la *limite* (**121**) ; on dira que la suite des nombres $a_1,\ldots a_n,\ldots$ tend vers la limite c si, quelque petit que soit un nombre *positif* donné ε, la valeur absolue $|a_n - c|$ est inférieure à ε *à partir* d'une certaine valeur de n. Lorsque cette condition est

[1] Ainsi, lorsque l'on connaît les nombres négatifs, on n'a plus besoin de deux formules différentes pour désigner la somme des termes de la progression suivant que la raison est supérieure ou inférieure à 1 (voir p. 45, note 1).

[2] Définition résultant de la définition générale donnée au n° 114.

satisfaite les extrémités des abscisses correspondant aux nombres a ,... a_n... tendent vers un *point-limite*.

Ayant défini la limite, on définira et étudiera comme au § 7 les expressions arithmétiques convergentes et en particulier les *séries*. La progression géométrique $a + a.r + a.r^2 + ...$, par exemple est une *série* qui est *convergente*, quels que soient les signes de a et r, si $|r| < 1$, *divergente* si $|r| > 1$. [On le démontre en raisonnant comme au n° **111**].

9. — *Logarithmes*

141. — Supposons que nous voulions mesurer un mât vertical d'une grande élévation. Il sera impossible ou très difficile d'appliquer directement un mètre le long de ce mât. C'est pourquoi nous prendrons une voie détournée. Nous mesurerons, par exemple, l'ombre du mât, à une heure déterminée, et de la longueur de l'ombre nous déduirons celle du mât. Ainsi — comme nous l'avons déjà remarqué à propos de la mesure des angles (n° **102**) — les grandeurs difficilement accessibles peuvent parfois être remplacées dans les calculs par des grandeurs *suppléantes* [1] plus aisées à manier; pour que cette substitution soit légitime, il suffit que l'on sache établir une « correspondance univoque et réciproque » entre les grandeurs titulaires et leurs suppléantes, de sorte qu'à chaque grandeur corresponde *une* suppléante bien déterminée et réciproquement. Dans ces conditions, à tout calcul portant sur les grandeurs titulaires correspond un calcul effectué sur les grandeurs suppléantes; et le second calcul peut tenir lieu du premier.

Une semblable méthode paraîtra à première vue un peu artificielle et l'on sera porté à croire qu'elle ne peut avoir qu'un intérêt pratique. C'est en effet dans un but utilitaire qu'elle fut mise à profit par les initiateurs du *calcul logarithmique*, Jost Bürgi (1552-1632) et John Neper (1550-1617) et par les astronomes qui posèrent les bases du *calcul trigonométrique*. Cependant l'un et l'autre calcul devaient bientôt être appelés à jouer un rôle de pre-

[1] Pascal disait : *représentantes*.

mier ordre dans la science théorique, ainsi que nous le verrons ultérieurement.

142. Définition du logarithme. — Prenons un nombre positif b, que nous appellerons *base des logarithmes* (nous le choisirons supérieur à 1) : j'appellerai *logarithme de base b* [1] d'un nombre a l'exposant α de la puissance à laquelle il faut élever b pour obtenir le nombre a, c'est-à-dire le nombre α qui est tel que $b^\alpha = a$.

Actuellement, cette définition n'offre un sens pour nous que si le nombre α est un nombre rationnel positif ou négatif. En effet, nous n'avons défini la puissance b^α que dans l'hypothèse où son exposant est rationnel (**137**). Mais, moyennant une convention toute naturelle, il nous est facile *d'attribuer une valeur déterminée à b^α pour une valeur irrationnelle quelconque de α.*

Soit en effet (n°s **109** et **139**) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ une suite convergente de nombres croissants, inférieurs à α, qui admettent α pour limite, et $\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ une suite convergente de nombres décroissants ayant la même limite. Les puissances

$$b^{\alpha_1},\ b^{\alpha_2},\ \ldots,\ b^{\alpha_n},\ \ldots$$

sont de plus en plus grandes (puisque $b > 1$, *vide*, n° **138**) mais elles sont toutes inférieures [2] à toutes les puissances

$$b^{\beta_1},\ b^{\beta_2},\ \ldots,\ b^{\beta_n},\ \ldots$$

qui sont de plus en plus petites. On en déduit, en raisonnant comme au n° **117**, que chacune des suites de nombres positifs $b^{\alpha_1}, \ldots b^{\alpha_n}, \ldots$ et $b^{\beta_1}, b^{\beta_2}, \ldots, b^{\beta_n}$ est convergente ; d'ailleurs ces deux suites ont pour limites le même nombre, car la suite des nombres

$$(b^{\beta_1} - b^{\alpha_1}),\ (b^{\beta_2} - b^{\alpha_2}),\ \ldots\ (b^{\beta_n} - b^{\alpha_n})$$

(1) *Logarithme*, de λόγος et ἀριθμός signifie ; « nombre exprimant un rapport » (*numerus rationem exponens*) ; le rapport « exprimé » est le rapport du nombre a à la base des logarithmes ; en effet, dans la progression géométrique définie plus bas, le *rapport* d'un terme quelconque au nombre b sera connu dès qu'on connaîtra le rang du terme, où le logarithme.

(2) Puisque les nombres $\beta_1, \ldots \beta_n$, sont tous plus grands que α_n.

a pour limite zéro [1]. *La limite commune des deux suites peut alors être regardée, par définition, comme la valeur de* b^α (c'est-à-dire comme le nombre auquel la puissance b^α sera égale par définition).

143. Détermination du logarithme d'un nombre. — Cela dit, pour trouver le logarithme de base b d'un nombre quelconque a, nous pourrons procéder comme il suit [2] :

Appelons :

$$\ldots\ \alpha_{-n},\ \alpha_{-(n-1)},\ \ldots,\ \alpha_{-2},\ \alpha_{-1},\ 1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots,$$

les termes d'une *progression arithmétique* de raison positive r prolongée indéfiniment dans les deux sens : j'entends par là que

$$\alpha = 1 + r,\ \ldots\ \alpha_n = 1 + n\,.\,r,\ \ldots$$

tandis que α_{-1} (*terme d'indice* — 1) est égal à $1 - r$, ..., α_n (*terme d'indice* — n) est égal à $1 - n\,.\,r$, ..., etc. La suite des nombres croissants

$$\ldots\ b^{\alpha_{-n}},\ \ldots,\ b^{\alpha_{-1}},\ b,\ b^{\alpha_1},\ \ldots,\ b^{\alpha_1},\ \ldots,\ b^{\alpha_n},\ \ldots$$

est alors une *progression géométrique* de raison b^r prolongée indéfiniment dans les deux sens ; en effet, nous avons :

$$b^{\alpha_1} = b^{1+r} = b\,.\,b^r; \qquad b^{\alpha-1} = b^{1-r} = \frac{b}{b^r},\ \text{etc.}$$

Supposons que la raison r soit très petite, égale par exemple à 10^{-p} où p est un nombre entier très grand ; alors les termes de la progression arithmétique sont des nombres très rapprochés, et il en est par conséquent de même des termes de la progression géométrique.

Dans ces conditions, soient q et $q + 1$ les indices (positifs ou

[1] Pour les valeurs de l'indice n, arbitrairement grandes, α_n et β_n sont arbitrairements voisins de a, donc arbitrairement voisins l'un de l'autre; donc b^{α_n} est arbitrairement voisin de b^{β_n}.

[2] Nous n'entrons point ici dans le détail des opérations qui permettrait au constructeur d'une table de logarithmes (n° 145) de simplifier ses calculs.

négatifs) dont sont affectés les deux termes consécutifs de la progression géométrique entre lesquels est compris le nombre a [c'est-à-dire tels que $b^{\alpha_q} < a < b^{\alpha_{q+1}}$] : je dirai que α_q est une *valeur approchée par défaut* du logarithme de base b de a, tandis que α_{q+1} en est une *valeur approchée par excès*. Plus la raison r est petite, plus α_q est rapproché de α_{q+1} et les nombres b^{α_q}, $b^{\alpha_{q+1}}$ du nombre a : j'en conclus que, lorsque la raison r devient indéfiniment voisine de zéro, α_q et α_{q+1} se rapprochent indéfiniment d'un même nombre-limite qui sera, par définition, le logarithme (exact) du nombre a.

La définition ainsi formulée suppose bien entendu qu'il existe dans la progression géométrique deux termes consécutifs b^{α_q}, $b^{\alpha_{q+1}}$ entre lesquels est compris le nombre a. Pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que le nombre a soit positif*. En effet, les termes de la progression géométrique, qui sont des puissances d'un nombre positif, sont tous positifs. Et nous savons d'autre part, que si nous prolongeons indéfiniment la progression vers la gauche et vers la droite, nous obtenons à gauche des termes aussi petits que nous voulons, et à droite des termes arbitrairement grands. Les termes de la progression sont d'ailleurs *plus grands que* 1 ou *plus petits que* 1 suivant que leur exposant est positif ou négatif : donc *un nombre positif a aura un logarithme positif ou négatif suivant qu'il est supérieur ou inférieur à* 1.

On pourra toujours, d'après ce qui précède, calculer le logarithme de a avec une approximation arbitrairement grande. Si, par exemple α_q et α_{q+1} diffèrent de moins de 10^{-7}, ces nombres seront des valeurs approchées du logarithme à moins de 10^{-7} près : une valeur plus approchée, supposée écrite dans la notation décimale ([1]), ne différerait de a_q et a_{q+1} qu'à partir du huitième chiffre décimal ; c'est pourquoi nous dirons en ce cas que *les valeurs approchées a_q et a_{q+1} du logarithme ont sept décimales exactes*.

En résumé, *tout nombre positif possède un logarithme de base b, logarithme dont on peut calculer, sous forme de nombre décimal*

([1]) Cf. 45 ; α_q, α_{q+1}, etc. étant positifs ou négatifs, c'est leur valeur absolue, bien entendu, que nous supposons écrite dans la notation décimale.

(précédé du signe + ou —), une valeur arbitrairement approchée; nous désignerons par le symbole $\log_b a$ le logarithme de base b du nombre a.

144. Utilité des logarithmes. — L'avantage que l'on trouve à prendre les logarithmes comme suppléants des nombres sur lesquels on veut calculer, tient aux circonstances suivantes : *aux opérations effectuées sur les nombres correspondent d'ordinaire, pour les logarithmes, des opérations plus simples.*

Soit par exemple, à faire le produit de deux nombres positifs a et c. Nous avons par définition

$$a = c^{\log_b a}, \qquad c = b^{\log_b c};$$

d'où (nº 137)
$$a \,.\, c = b^{\log_b a + \log_b c}$$

ce qui revient à dire que

$$\log_b (a \,.\, c) = \log_b a + \log_b c.$$

Ce résultat s'étend immédiatement au produit d'un nombre quelconque de facteurs. Ainsi, à la *multiplication* de deux ou plusieurs nombres correspond une *addition* de leurs logarithmes; *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

Nous constatons de même que

$$\frac{a}{c} = b^{\log_b a - \log_b c}$$

ou
$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c;$$

donc à la *division* de a par c correspond une *soustraction* des logarithmes : *le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

Nous aurons encore (d'après le nº 137)

$$a^p = b^{p \,.\, \log_b a},$$

d'où
$$\log_b a^p = p \,.\, \log_b a;$$

à *l'élévation* d'un nombre *a à la puissance p* correspond une *multiplication* par p de son logarithme.

De même

$$a^{\frac{1}{p}} = b^{\frac{1}{p}\log_b a} \quad \text{ou} \quad \log_b \sqrt[p]{a} = \frac{\log_b a}{p};$$

à l'*extraction de la racine* $p^{\text{ème}}$ de a correspond une *division* par p de son logarithme.

Ces belles propriétés, auxquelles conduit directement la comparaison des deux progressions arithmétique et géométrique écrites plus haut, ne pouvaient échapper aux arithméticiens qui ont approfondi l'étude des progressions. *Chuquet*, *Paciuolo*, *Stifel* [1] les ont remarquées. Mais pour qu'elles permissent effectivement de simplifier les calculs, il fallait que l'on sût déterminer rapidement le logarithme d'un nombre donné quelconque et, inversement, le nombre qui correspond à un logarithme donné. Or ce serait là une opération assez compliquée s'il ne suffisait, heureusement, de l'accomplir une fois pour toutes. Supposons, par exemple, que nous ayons calculé, avec 7 décimales exactes, les logarithmes de tous les nombres décimaux à sept décimales qui sont inférieurs à 10000. Nous pouvons noter ces logarithmes et les nombres correspondants dans une table clairement ordonnée, et lorsque plus tard, au cours de nos calculs, nous voudrons passer des nombres aux logarithmes ou inversement, nous n'aurons plus qu'à consulter notre table : nous y chercherons le nombre ou le logarithme le plus voisin de celui auquel nous avons affaire et nous prendrons le logarithme ou le nombre correspondant comme valeur approchée du logarithme ou du nombre cherché. Voilà ce dont se sont avisés *Bürgi* et *Neper* (*Napier*) : en construisant les premières *tables de logarithmes* [2], ils ont été les véritables créateurs du calcul logarithmique.

[1] *Arithmetica integra*, Nuernberg, 1544, lib. I, fol. 35 : « 1. *Additio in arithmeticis progressionibus respondet multiplicationi in geometricis*; 2. *Substractio in arithmeticis respondet in geometricis divisioni*, etc.

[2] Bürgi eut l'idée le premier, mais ses tables « *Arithmetische und geometrische Progretz-Tabuln* » ne parurent qu'en 1620 (à Prague). Neper publia les siennes en 1614, sous le titre *Mirifici logarithmorum canonis descriptio ejusque usus in utraque trigonometrica ut etiam in omni logistica mathematica amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio*, Edinburgh (B. Nat. V. 12156). Les différences que l'on pourrait relever entre la marche suivie par Bürgi ou Neper et celle que nous esquis-

145. Tables. — La table du Baron John Neper, celle qui a joué historiquement le plus grand rôle ([1]), contient les logarithmes dont la base est le nombre remarquable que nous avons appelé e au n° **122** (on les appelle *logarithmes népériens* ou *naturels*) : nous verrons plus loin pourquoi ces logarithmes présentent un intérêt théorique spécial ; pratiquement ils offraient au constructeur de la table des facilités particulières.

Mais, pour les adeptes de la notation décimale, les logarithmes les plus avantageux sont ceux qui ont pour base 10 (ou un multiple quelconque de 10). On constate en effet qu'avec la notation décimale, les *chiffres décimaux* qui figurent dans la valeur approchée du logarithme de base 10 d'un nombre décimal quelconque ne dépendent que des *chiffres* de ce nombre ; ils sont indépendants de la situation de la virgule dans le nombre, et aussi des zéros qui peuvent se trouver soit avant soit après tous les autres chiffres ([2]) ; ces zéros et la situation de la virgule déterminent, en revanche, la partie entière et le signe du logarithme. Si donc une table donne le logarithme (arbitrairement approché) d'un nombre entier tel que 3 468, elle donnera du même coup les logarithmes des nombres 3,468, 34,68, 34 680, 0,003468, etc.

C'est pourquoi, *Henry Briggs* (1556-1630) ami et collaborateur de Neper, entreprit de construire une nouvelle table, contenant les logarithmes de base 10 (*logarithmes vulgaires*). L'année même de la mort de Neper, il donna, avec 8 décimales, les logarithmes des 1 000 premiers nombres entiers (*Logarithmorum Chilias prima*, Londres, 1617) ; en 1624, il publia l'*Arithmetica logarithmica* ([3]) qui donne, avec 14 décimales, les logarithmes des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000.

Les tables dont se servent les calculateurs contemporains con-

sons ci-dessus (voir la note suivante) n'ont point d'importance théorique et ne valent pas la peine d'être signalées, non plus qu'une petite erreur systématique qui entache les tables de NEPER.

([1]) Les tables de NEPER sont, en réalité des tables trigonométricologarithmiques, *vide* p. 173, note 3.

([2]) En d'autres termes, les chiffres décimaux (chiffres de la *partie décimale*, *vide* 45) peuvent être déterminés dès qu'on connaît le produit du nombre par une puissance entière quelconque de 10, positive ou négative.

([3]) Bibl. N., rés. V 158.

tiennent, comme la table de Briggs, les logarithmes de base 10. On se fera une idée de leur disposition en regardant les fac-similés qui se trouvent dans les traités élémentaires d'arithmétique ou d'algèbre [1].

146. Logarithmes remarquables. — Il est un certain nombre de logarithmes dont le calcul est immédiat. Ainsi la base des logarithmes a pour logarithme 1 ; son carré, son cube, sa racine carrée,... ont respectivement pour logarithmes 2, 3, $\frac{1}{2}$, etc.

Quel est, d'autre part, le *logarithme de un*? Nous savons que, quelque petit que soit l'exposant p, la puissance b^p (pour $b > 1$) est supérieure à 1 ou inférieure à 1 suivant que p est positif ou négatif (**40**) ; d'ailleurs, si l'on prend successivement comme exposants de la base b une suite de nombres qui décroissent indéfiniment en valeur absolue, b^p se rapproche indéfiniment de 1. J'en conclus que le *logarithme du nombre* 1 *est* 0 ; ce logarithme est indépendant du choix de la base : *quel que soit le nombre* [2] b, *la puissance* b^0 *doit être regardée comme égale à* 1.

Le logarithme d'un nombre positif très petit est compris entre deux termes de la progression géométrique qui sont très éloignés vers la gauche, c'est-à-dire négatifs et très grands en valeur absolue. Lorsque le nombre décroît indéfiniment, son logarithme (toujours négatif) croît indéfiniment en valeur absolue ; c'est pourquoi nous dirons (en nous servant de la notation moderne que nous avons introduite au n° **134**) que *le logarithme de* 0 *est égal à* $-\infty$ (*moins l'infini*) quelle que soit la base.

Le logarithme d'un nombre positif arbitrairement grand est un nombre positif arbitrairement grand : nous dirons donc que *le logarithme d'un nombre infini est* $+\infty$.

[1] Voir, par exemple : Borel, *Algèbre*, 2e cycle, p. 344, et suiv.

[2] Nous avons supposé que b était plus grand que 1 ; on parvient à la même conclusion si b est inférieur à 1. Posons en ce cas $b = b'^{-1}$ ($b' > 1$) : nous aurons, quel que soit p, $b^p = b'^{-p}$ et pour $p = 0$, $b^0 = b'^0 = 1$.

10. — Grandeurs trigonométriques

147. — A leur tour, les géomètres ou les astronomes qui ont à faire des calculs sur des longueurs d'arcs de cercle ou sur des grandeurs d'angles, trouvent avantageux de remplacer ces grandeurs par des grandeurs suppléantes, plus faciles à mesurer et à combiner. Une technique spéciale, la trigonométrie (1), a été créée dans ce but. Elle est d'origine fort ancienne, car on en trouve les rudiments dans le *Manuel du calculateur* de l'égyptien Ahmes (*vide* p. 2, note 2). Les astronomes grecs (2) la développèrent, ainsi que les arithméticiens hindous. Avec les Arabes (3) *Mohammad Al Battani*, de Damas (xe siècle) et *Aboul Wafa*, de Bagdad (940-998), et surtout avec l'astronome persan *Nasir addin Tousi* (4) (1201-1274), elle prit une forme systématique et commença à être cultivée pour elle-même. En Occident, les principaux promoteurs de la trigonométrie furent *Regiomontanus* (de son vrai nom, Johann Müller, 1436-1476) et surtout *François Viète* (5).

148. Arcs orientés sur un cercle. Somme ou différence d'arcs. — Nous allons commencer par définir avec précision les grandeurs auxquelles la trigonométrie se propose de faire correspondre des grandeurs suppléantes.

Cherchons tout d'abord à compléter la définition des arcs de cercle en nous inspirant de la théorie des segments portés sur une droite orientée (**127**).

Représentons-nous un arc AB d'un cercle de centre O, comme

(1) *Trigonométrie* signifie, à proprement parler « mesure des angles d'un triangle ». La partie de la trigonométrie qui traite des angles en général, est souvent appelée, avec plus d'exactitude, *goniométrie*.

(2) Principalement les astronomes alexandrins. *Aristarque de Samos* (3e siècle av. J.-C.), *Hipparque de Nicée* et *Ptolémée* (2e siècle ap. J.-C.).

(3) Cf.. BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, t. I.

(4) *Traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy*, trad. par Alexandre PASCHA CARATHEODORY, Constantinople, 1891.

(5) La trigonométrie de VIÈTE se trouve dans le *Canon mathematicus seu ad Triangula*, publié à Paris en 1579.

un ruban sans épaisseur enroulé sur la circonférence, à partir du point A, dans un sens ou dans l'autre. Le point A sera regardé comme *l'origine* et le point B comme *l'extrémité* de l'arc ; le sens suivant lequel il faudra parcourir le ruban pour aller de A en B sera appelé « sens de parcours » de l'arc ; ce sens sera conventionnellement regardé comme positif (sens de la flèche sur la fig. 70) s'il est inverse du sens des aiguilles d'une montre, et comme négatif en cas contraire. *La longueur du ruban, peut être quelconque :* si elle surpasse $2 \times \pi$, le ruban recouvre plusieurs fois tout ou partie de la circonférence

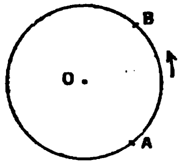


Fig. 70.

L'arc ainsi défini est dit *arc orienté*. Il est, on le voit, entièrement caractérisé si l'on connaît : 1° son origine A et son extrémité B ; 2° son sens de parcours ; 3° le nombre de tours complets qu'un point mobile le parcourant devra décrire sur la circonférence avant d'atteindre le point B.

Un arc orienté sera désigné par les noms de ses points extrêmes, l'origine étant toujours nommée avant l'extrémité. Ainsi les arcs AB et BA sont des arcs différents, de sens contraires.

Ces définitions données, il sera facile de faire correspondre à tout arc orienté un nombre relatif et un seul que nous appellerons « mesure » ou « valeur de l'arc orienté ». Ce nombre sera la mesure de la longueur de l'arc, affectée du signe + ou du signe — suivant que le sens de l'arc est positif ou négatif.

149. — La correspondance ainsi établie entre arcs orientés et nombres relatifs est évidemment, indépendante de la position qu'occupe le point-origine B sur le cercle. Ainsi, si l'on déplace un arc orienté sur un cercle en le faisant glisser le long de ce cercle (sans modifier ni sa longueur, ni son sens de parcours), le nombre relatif correspondant à cet arc reste toujours le même.

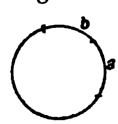


Fig. 71.

Cette remarque nous permet de définir géométriquement la somme de deux arcs orientés de valeurs *a* et *b*. Faisant glisser le second *arc* le long du cercle de manière à lui donner pour origine l'extrémité du premier, on obtient un arc orienté, formé de la réunion des deux arcs donnés (*dans les*

conditions (¹) *indiquées* au n° **126**), qui a évidemment pour valeur $a + b$: cet arc est la somme des arcs donnés.

On définira de même la somme d'un nombre quelconque d'arcs et aussi la différence de deux arcs (en plaçant les deux arcs bout à bout et renversant le sens du second).

150. Abscisses curvilignes. — Ces préliminaires posés, considérons en particulier un cercle de rayon 1 (²) sur lequel nous prenons un point fixe A et choisissons un sens positif comme il a été dit plus haut. Nous appellerons *abscisse curviligne* tout arc orienté d'origine A sur le contour de ce cercle. Nous appellerons également ainsi la mesure (³) (positive ou négative) d'un tel arc c'est-à-dire que, comme au § *6*, nous entendrons indifféremment par « abscisse » une longueur ou un nombre.

Cette définition de l'abscisse curviligne appelle une remarque.

Nous avons vu que, sur la droite X'OX définie au n° **127**, à tout point correspond une seule abscisse positive ou négative et réciproquement. Il n'en est pas de même sur le cercle. A toute abscisse curviligne ou négative correspond bien encore un point unique (tel que B ou B' sur la fig. 72). Mais à un même point B du cercle il correspond plusieurs abscisses curvilignes. Appelons, en effet, a la longueur de l'arc AB, longueur qui est, sur la figure, inférieure au quart de la longueur du cercle, c'est-à-dire au nombre $\frac{\pi}{2}$: le

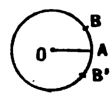


Fig. 72.

(¹) La somme se définit exactement comme si les arcs étaient des longueurs (de même sens ou de sens opposés) portées bout à bout sur un axe ainsi qu'il a été supposé au n° 126.

(²) C'est-à-dire dont le rayon a pour longueur l'unité de longueur. Ce cercle est souvent appelé *cercle trigonométrique*.

(³) Nous avons dit au n° 104 que pour mesurer un arc du cercle de rayon 1, on ne prend généralement pas comme unité le *radian* (le rayon du cercle) mais bien le *degré* (la 360ᵉ partie du cercle) ou le *grade* (la 400ᵉ partie du cercle). Rien ne serait changé aux considérations que nous développons ici si l'on adoptait ces unités, la mesure d'un arc en degrés ou en grades étant affectées du même signe que la mesure rapportée au rayon : ainsi l'arc de 60 degrés (tiers de la circonférence) n'est autre que l'arc ou l'abscisse curviligne $\frac{2.\pi}{3}$; l'arc de 90 degrés ou 100 grades est l'arc $\frac{\pi}{2}$; l'arc de -90 degrés est l'arc $-\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite.

nombre positif $+ a$ est une abscisse curviligne de B ; mais le nombre $2.\pi + a$ en est une aussi ; car si nous enroulons sur le cercle dans le sens positif un ruban de longueur $2.\pi + a$ (à partir de A), ce ruban recouvre la circonférence entière plus l'arc AB, et son extrémité tombe au point B ; les nombres $4.\pi + a$, $6.\pi + a$,.. sont pareillement des abscisses curvilignes du même point B. Je dis que le nombre $-2.\pi - a$ ou $-(2.\pi - a)$ est aussi une abscisse curviligne de B : en effet, si nous enroulons sur le cercle, *dans le sens négatif*, un ruban de longueur $2.\pi - a$, ce ruban couvre une circonférence entière moins l'arc AO et son extrémité tombe au point A. Les nombres $-4.\pi + a$, $-6.\pi + a$, etc., sont pareillement des abscisses curvilignes du point B.

Ainsi, *si un point B du cercle orienté a une abscisse curviligne égale à un nombre a, il en a une infinité d'autres, qui forment une progression arithmétique de raison* $2.\pi$: on convient de représenter l'ensemble de ces nombres par la formule $a + 2.k.\pi$; où la lettre k, représente un nombre auquel on peut donner une valeur entière ou positive quelconque (à chacune des valeurs de k correspond une abscisse curviligne du point B).

151. L'abscisse curviligne mesure d'un angle ou arc quelconque. Angle orienté. — Considérons maintenant un arc appartenant à une circonférence quelconque, ou un angle quelconque : nous pouvons considérer que la grandeur de l'arc ou de l'angle est mesurée indirectement par une abscisse curviligne.

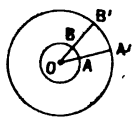


Fig. 73.

Soit en effet A'B' un arc appartenant à une circonférence de centre O (fig. 73) et de rayon quelconque, r. Appelons A, B les points de rencontre des rayons OA', OB' avec la circonférence de centre C et de rayon 1. On démontre facilement que *le rapport* [1] *des longueurs des deux arcs A'B' et AB est égal au rapport des rayons des deux cercles, c'est-à-dire au rapport* $\frac{r}{1}$ *ou r*. Ainsi la longueur d'un arc quel-

[1] A l'angle de 1 degré correspond l'arc qui a pour longueur $\frac{1}{360}$ de la circonférence, c'est-à-dire dans le cercle trigonométrique l'arc de mesure $\frac{\pi}{180}$, dans le cercle donné l'arc de mesure $\frac{\pi}{180} \times r$. Appelons d'autre

conque du cercle de rayon r est *proportionnelle* à la longueur de l'arc correspondant du cercle de rayon 1.

Si d'autre part, j'appelle A et B les points de rencontre des deux côtés d'un angle de sommet O avec le cercle de rayon 1 et de centre O, je sais que je puis, d'après les conventions du n° 103, prendre comme mesure de l'angle la longueur de l'arc AB compris entre les côtés OA et OB. Cette mesure est la valeur absolue d'*une* abscisse curviligne du point B (*la plus petite parmi celles que nous avons définies au n° 150*) comptée à partir de l'origine A.

La connexion que nous avons établie entre la notion d'arc et celle de mesure d'angle AOB nous permettrait d'ailleurs de regarder la grandeur d'un angle comme une quantité affectée de signe et susceptible d'avoir une valeur arbitrairement grande [au lieu d'être comprise entre o et 2 angles droits (π)]; il suffira de *définir la grandeur de l'angle comme étant celle de l'arc orienté compris entre ses côtés sur le cercle trigonométrique*. Le côté de l'angle qui passe par l'origine de l'arc sera appelé côté-origine de l'angle et nommé le premier. — En particulier, la position d'une demi-droite quelconque OB par rapport à une demi-droite fixe OA peut être définie par l'*angle orienté* que OA (côté-origine) forme avec OB : cet angle est l'angle dont il faut faire tourner OA dans le sens positif (sens de la flèche, fig. 74) pour l'amener à coïncider avec OB; il est compris entre o et 2π, car, lorsque A tourne de l'angle 2π, la droite OA balaye tout le plan de la figure autour du point O.

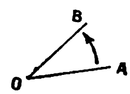


Fig. 74.

152. Sinus, cosinus et tangente d'une abscisse curviligne. — Sur le cercle de centre O et de rayon 1, choisissons une origine que j'appellerai désormais A et un sens de parcours, puis considérons un arc orienté AM, c'est-à-dire une abscisse curviligne, que nous prendrons d'abord positive et inférieure à $\frac{\pi}{2}$ (fig. 75). A la grandeur AM nous allons faire correspondre des

part, m la mesure de l'angle AOB en degrés (voir n° 103); nous avons : longueur de l'arc $AB = m \times \frac{\pi}{180}$; longueur de l'arc $A'B' = m \times \frac{\pi}{180} \times r$. Donc : $\frac{\text{arc } A'B'}{\text{arc } AB} = r$.

grandeurs suppléantes qui seront pour elle ce qu'est pour le mât imaginé au début du n° **141**, l'ombre qu'il porte sur le sol [1]. Ce seront des longueurs rectilignes, et, par conséquent, plus maniables que la longueur curviligne AM.

La première idée qui vient à l'esprit est de prendre comme grandeur suppléante de l'*arc* AM la *corde* qui sous-tend cet arc, c'est-à-dire le segment de droite qui a pour extrémités les points A et M. C'est ainsi qu'opéraient les astronomes grecs de l'Ecole d'Alexandrie, et nous trouvons, par exemple dans la *Syntaxe* [2] de Ptolémée (2° siècle ap. J.-C.) une table donnant les cordes des arcs de $\frac{1}{2}$, 1, 1 $\frac{1}{2}$,... degrés jusqu'à 180 degrés.

Il est toutefois plus avantageux de choisir comme grandeurs suppléantes des longueurs toujours portées sur les mêmes droites et à partir d'un même origine, c'est-à-dire des *abscisses*, pouvant être affectées du signe + ou du signe —.

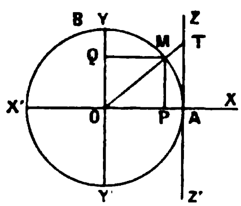


Fig. 75.

Menons la droite X'OX qui passe par le centre du cercle et l'origine des abscisses curvilignes ; sur cette droite, nous considérerons O comme une origine d'abscisses (rectilignes) et le sens de O vers A comme le *sens positif*.

Menons également la droite Y'OY perpendiculaire sur X'OX et appelons B le point de cette droite qui a pour abscisse curviligne $+\frac{\pi}{2}$: sur la droite Y'OY, O sera considéré comme une origine d'abscisses et le *sens positif sera le sens de* O *vers* B.

Menons enfin la droite Z'AZ parallèle à Y'OY (tangente au cercle en A) : sur cette droite le point A sera regardé comme origine

(1) C'est précisément à propos de la mesure d'un mât vertical (mesure dont ils déduisaient indirectement la hauteur du soleil) que les astronomes arabes ont systématisé l'emploi des notions de *tangente* et de *cotangente* d'un angle ou d'un arc (*vide infra*); ils appelaient ces lignes trigonométriques *ombres* (*umbra stans et umbra entensa*).

(2) La Μεγάλη σύνταξις, traité d'astronomie que l'on connaissait au moyen-âge sous le nom arabe défiguré d'*Almageste* (de ἡ μεγίστη). On remarquera que la corde d'un arc tel que MAM_3 (voir fig. 79) est le double du sinus (voir les définitions données ci-dessous) de l'arc moitié AM. La table de PTOLÉMÉE équivaut donc à une table de sinus.

d'abscisses (rectilignes), et le sens positif sera le même que sur OY (sens OZ sur la figure).

Du point M, abaissons sur OX et OY les perpendiculaires MP et MQ, puis prolongeons le rayon OM jusqu'à sa rencontre en T avec la droite Z'OZ : j'appelle [1] « *sinus* » de l'abscisse curviligne (ou de l'arc) AM l'*abscisse rectiligne* OP du point P, « *cosinus* » de l'abscisse curviligne (ou de l'arc) AM l'*abscisse rectiligne* OQ du point Q, et « *tangente* » de AM [ou, plus précisément, « *tangente trigonométrique* [2] »] l'*abscisse rectiligne* AT du point T [3].

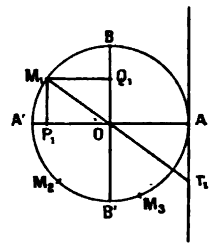


Fig. 76.

Ces définitions ont un sens précis quelle que soit la position du point M sur le cercle et par conséquent quelle que soit la valeur de l'abscisse curviligne AM. Ainsi (fig. 76) si M occupe la position M_1 entre B et A', l'abscisse curviligne AM_1 a pour *sinus* (positif) l'abscisse rectiligne OQ_1, pour *cosinus* (négatif) l'abscisse OP_1, pour *tangente* (négative) l'abscisse AT_1. — On vérifie de même, immédiatement, que si le point M occupe une position telle que M_2 entre A' et B', l'abscisse curviligne a un *sinus* et un *cosinus* négatifs, une tangente positive. — Si M occupe une position M_3 entre B' et A, le *sinus* et la *tangente* sont négatifs, le *cosinus* positif.

Les valeurs et signes du *sinus*, du *cosinus* et de la *tangente* de AM ne dépendent manifestement que de la position du point M sur le cercle. Ainsi les abscisses curvilignes (ou arcs) a et $a + 2.k.\pi$ ont même sinus, cosinus et tangente quel que soit le nombre entier, positif ou négatif, k : c'est pourquoi nous pourrons toujours raisonner sur le « sinus de l'abscisse curviligne du point M » sans spécifier quelle est celle de ces abscisses que nous considérons.

[1] Le mot *sinus* est probablement la traduction latine d'un terme emprunté aux Hindous par les astronomes arabes; le préfixe *co* dans cosinus indique que le cosinus d'un angle est le sinus de l'angle complémentaire (*vide infra*, 162). Les Hindous employaient pour désigner le sinus, un terme qui signifie *pente*.

[2] La *tangente* ainsi définie est une longueur; il ne faut pas la confondre avec la tangente géométrique (tangente à une courbe) qui est une droite illimitée, définie par sa position par rapport à une courbe.

[3] Il résulte de là que le *sinus* de l'abscisse curviligne AM sur la figure 75 est égal à PM et que son cosinus est égal à QM.

Nous conviendrons de représenter, dans l'écriture courante, le sinus de AM par le symbole « sin AM », le cosinus par « cos AM », la tangente par « tang AM » ou « tg AM ». Si a désigne une abscisse curviligne de l'arc AM, nous écrirons :

$$\sin a, \qquad \cos a, \qquad \text{tang}\, a \quad \text{ou} \quad \text{tg}\, a.$$

153. Relations entre le sinus, le cosinus et la tangente. — Il y a entre le sinus, le cosinus et la tangente de l'arc AM des relations remarquables. En effet, le théorème de Pythagore (**199**) appliqué au triangle rectangle OMP (fig. 75) donne :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2;$$

mais OM, rayon du cercle, est l'unité; OP est le sinus de AM; PM, égal à OQ, en est le cosinus ; nous avons donc (en désignant par a une abscisse curviligne de l'arc AM) :

$$(1) \qquad \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Les deux triangles rectangles OPM, OAT sont semblabes (cf. **195**) : donc nous avons :

$$\frac{OP}{OA} = \frac{PM}{AT} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos a}{1} = \frac{\sin a}{\text{tang}\, a},$$

d'où

$$(2) \qquad \text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Les relations (1) et (2) se trouvent ainsi démontrées dans le cas où l'extrémité M de l'arc AB est située entre les points A et B. On démontrera facilement que *ces relations sont encore vraies si l'extrémité de l'arc est située entre* B *et* A′ (*comme* M_1 *sur la fig.* 76), *ou entre* A′ *et* B′, *ou entre* B′ *et* A.

154. Remarque. — On déduit aisément de la définition du sinus et du cosinus que le sinus ou le cosinus d'un arc quelconque est *un nombre compris entre* — 1 et + 1, car ce nombre mesure un segment moins long que le rayon du cercle trigonométrique (p. 165, note 2) : il n'existe pas d'arc dont le sinus ou le cosinus soit supérieur à 1 ou inférieur à — 1.

155. Grandeurs ou lignes trigonométriques fondamentales. — Le sinus, le cosinus et la tangente d'un arc AM sont appelés d'ordinaire « lignes trigonométriques » de l'arc AM. A ces trois lignes trigonométriques fondamentales on en adjoint d'autres, qui sont des nombres positifs ou négatifs dont la valeur résulte immédiatement des valeurs du sinus et du cosinus. Ainsi l'on appelle *cotangente* (cotg) de l'arc AM (ou de l'abscisse curviligne a) l'inverse de la tangente; on appelle *sécante* (sec) de AM l'inverse du cosinus; on appelle *cosécante* (cosec) de AM l'inverse du sinus. En d'autres termes :

$$(3) \qquad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{\sin a}, \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}.$$

156. Lignes trigonométriques d'un angle géométrique. — Lorsque l'on raisonne sur un angle tel que MON (fig. 77) qui n'est pas orienté, on n'a point de raison de considérer la longueur de l'arc MNO (compris entre les côtés de cet angle sur le cercle de rayon 1 et de centre O) comme négative plutôt que comme posi-

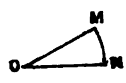


Fig. 77.

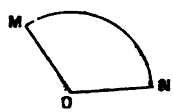


Fig. 78.

tive. Il en résulte que, lorsque l'angle est aigu par exemple $\left(\text{arc MN} < \frac{\pi}{2}\right)$, le signe du sinus et de la tangente correspondant à l'angle MNO n'est pas déterminé. Nous conviendrons de regarder l'arc MN comme positif et d'appeler « lignes trigonométriques de l'angle O » les lignes trigonométriques de l'arc positif de longueur MN. Ainsi le sinus, la tangente et le cosinus d'un *angle aigu* sont par définition, ceux d'une abscisse curviligne comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; ce sont *trois nombres positifs*. Le sinus, la tangente et le cosinus d'un angle *obtus* (fig. 78) sont ceux d'une abscisse curviligne comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π (comme l'abscisse AM_1 considérée plus haut, fig. 76) : *le sinus est positif, la tangente et le cosinus sont négatifs.*

157. Lignes trigonométriques de certains arcs. — Il résulte des définitions du n° **152** qu'une abscisse curviligne égale à o a pour sinus o et pour cosinus 1 ; nous écrirons donc :

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \operatorname{tang} 0 = \frac{0}{1} = 0.$$

Une abscisse curviligne égale à $\frac{\pi}{2}$ (et, par conséquent, un angle droit) a pour sinus 1 et pour cosinus o : nous avons donc :

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0 ;$$

la tangente de l'arc $\frac{\pi}{2}$ est le quotient de 1 par o : c'est un *nombre infiniment grand* (∞) ; et, effectivement, si, sur la figure 75, l'angle MOA était droit, la droite OM serait parallèle à la droite AZ et ne la rencontrerait en aucun point situé à distance finie.

Une abscisse curviligne égale à π a pour sinus o et pour cosinus — 1 ; en d'autres termes :

$$\sin \pi = 0, \qquad \cos \pi = -1, \qquad \operatorname{tang} \pi = 0.$$

Les théorèmes de la géométrie permettraient, d'autre part, de calculer les lignes trigonométriques de nombreux angles remarquables. Ainsi l'on pourra démontrer que :

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \text{ etc.}$$

158. Tables. — Comment passer d'une abscisse curviligne quelconque aux lignes trigonométriques de cette abscisse ou inversement ? Il n'y a qu'un moyen de rendre ce passage aisément praticable ; c'est de construire une fois pour toutes des tables de concordance (1) où seront placées en regard une série d'abscisses curvilignes très rapprochées les unes des autres et les lignes trigonométriques correspondantes ; à des abscisses curvilignes très voi-

(1) Pour construire ces tables on se servira des formules données aux numéros 160 et suivants, formules qui permettent de calculer les lignes trigonométriques d'une série indéfinie d'arcs de plus en plus grands (ou de plus en plus petits) lorsqu'on connaît déjà certains arcs pris pour points de départ.

sines correspondent manifestement (étant donné la définition géométrique de ces lignes) des sinus, ou des cosinus, très voisins ; si donc, pour valeur approchée d'une abscisse curviligne a, dont je cherche les lignes trigonométriques, je prends celle des abscisses figurant dans la table qui est la plus voisine de a, les valeurs correspondantes du sinus, du cosinus et de la tangente seront des valeurs approchées des lignes trigonométriques de a.

Des tables de sinus ont été dressées par les mathématiciens hindous ([1]), en particulier par *Aryabhata* (v[e] siècle, ap. J.-C.) et par *Bhaskara* (xi[e] siècle). Les Arabes ([2]) *Battani* et *Aboul Wafa* (*vide* **147**) ont composé des tables de cotangentes et de tangentes. Au xv[e] siècle *Regiomontanus* ([3]) construisit une table (publiée à Augsbourg en 1490) qui donne les lignes trigonométriques avec une approximation de 10^{-7}. Mais c'est à *Joachim Rhæticus*, de Wittenberg (1514-1576) que l'on doit les premières tables trigonométriques un peu étendues : elles parurent à Leipzig en 1551 sous le titre : *Canon doctrinæ triangulorum nunc primum a Georgio Ioachimo Rhætico in lucem editus.*

Lorsque les logarithmes furent inventés, le calcul logarithmique et le calcul trigonométrique se prêtèrent naturellement une assistance mutuelle. Aux tables donnant les lignes trigonométriques des abscisses curvilignes se substituèrent des tables donnant les logarithmes de ces lignes ([4]). C'est de semblables tables que l'on se sert encore aujourd'hui : les abscisses curvilignes y sont évaluées soit en grades, soit plus souvent, et conformément à l'ancien usage, en degrés, minutes, secondes.

159. Arcs correspondant à une ligne trigonométrique donnée. — Les tables trigonométriques ou trigonométrico-loga-

([1]) Cf. Braunmühl, *loc. cit.*, p. 33.

([2]) *Ibd.*, p, 57.

([3]) Regiomontanus (de son vrai nom, Johann Müller, 1436-1476) vécut en Italie, en Allemagne et en Hongrie. Il intitulait sa table *table féconde* : « *tabellam... non injuria fœcundam appellare libuit, quod multifariam ac mirandam utilitatem instar fœcundæ arboris parare soleat* ».

([4]) Les premières tables de logarithmes, celles de Neper, sont précisément des tables donnant les logarithmes des sinus et non ceux des nombres proprement dits.

rithmiques jouent le même rôle que les tables logarithmiques dont nous avons parlé au n° 145. Il y a cependant, entre ces deux espèces de tables, une différence importante. A un nombre correspond un seul logarithme et inversement. Au contraire, tandis qu'à une abscisse curviligne (à un arc) correspond un seul sinus, il correspond à un sinus donné (compris entre — 1 et + 1) une infinité d'abscisses curvilignes. De même pour un cosinus ou une tangente donnée.

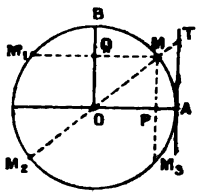


Fig. 79.

Donnons-nous en effet un *sinus* quelconque [1] OQ : tout arc terminé au point M ou au point M_1 (fig. 79) aura pour sinus OQ. Appelons alors a la plus petite abscisse curviligne AM du point M, et, par conséquent [2], $\pi - a$ la plus petite abscisse curviligne de M_1 : *les abscisses curvilignes* $a - 2.k.\pi$ *et* $\pi - a + 2.k.\pi$, *ou* $-a + (2.k + 1)\pi$ *où k est un nombre entier quelconque (positif ou négatif) ont toutes le même sinus* OQ.

Donnons-nous pareillement un *cosinus* quelconque [3] OP : tout arc terminé au point M ou au point M_3 (fig. 79) aura pour cosinus OP. J'en conclus *que les abscisses curvilignes* a, $-a$ *et, d'une manière générale,* $a + 2.k.\pi$, $-a + 2.k.\pi$, *(où k est un nombre entier quelconque positif ou négatif) ont toutes le même cosinus* OP.

Soit enfin AT une *tangente* : tout arc terminé au point M ou au point M_2 (fig. 79) aura pour tangente AT. J'en conclus que les abscisses curvilignes a et $\pi + a$ ($\pi + a$ est une abscisse curviligne de l'arc AM_2) et d'une manière générale les abscisses curvilignes $a + 2.k.\pi$, $a + \pi + 2.k.\pi$, ou, en d'autres termes, *les abscisses* $a + k.\pi$, *où k est un entier positif ou négatif quelconque, ont toutes la même tangente* AT.

En résumé, nous pouvons écrire les égalités suivantes qui seront

[1] Sur la figure 79 nous supposons ce *sinus* positif; les conclusions sont les mêmes s'il est négatif, c'est-à-dire si Q est au-dessous de la droite OA.

[2] On voit immédiatement que l'arc AM_1 est égal à une demi-circonférence (π) *moins* un arc égal à l'arc a.

[3] Sur la figure 79 nous supposons ce *cosinus* positif; les conclusions sont les mêmes s'il est négatif.

exactes, *quel que soit le nombre relatif a*, **pour toute** valeur entière **positive** ou négative de k :

$$(4)\quad \begin{cases} \sin a = \sin(a + 2.k.\pi) = \sin[-a + (2.k+1).\pi] \\ \cos a = \cos(a + 2.k.\pi) = \cos[-a + 2.k.\pi] \\ \operatorname{tang} a = \operatorname{tang}(a + k.\pi). \end{cases}$$

160. Arcs de signes contraires, arcs supplémentaires. — Les égalités relatives au cosinus montrent que l'on a en particulier [1] $\cos a = \cos(-a)$. On voit d'autre part, en se reportant à la figure 79, que, si l'arc a est terminé en M, par exemple, l'arc $-a$ a pour extrémité le point M_3, situé sur la perpendiculaire MP à OA ; d'où résulte que l'on a [2] : $\sin a = -\sin(-a)$. Il en est de même si l'extrémité de l'arc a est en M_1, en M_2 ou en M_3, donc, *quel que soit a*. Divisant le sinus par le cosinus, on déduit de là que : $\operatorname{tang} a = -\operatorname{tang}(-a)$.

Les égalités (4) relatives au sinus montrent que l'on a d'autre part :

$$\sin a = \sin(\pi - a).$$

D'ailleurs si l'arc a a pour extrémité M, l'arc $\pi - a$ a pour extrémité M_1, d'où nous concluons (voir fig. 79) que :

$$\cos(\pi - a) = -\cos a;$$

il en est de même quelle que soit l'extrémité de l'arc a, donc quelle que soit la valeur de a. — Divisant le sinus par le cosinus, nous voyons que : $\operatorname{tang}(\pi - a) = -\operatorname{tang} a$.

Ainsi nous avons les égalités suivantes, valables *quel que soit le nombre relatif a* :

$$(5)\quad \begin{cases} \sin a = -\sin(-a); & \sin a = \sin(\pi - a) \\ \cos a = \cos(-a); & \cos a = -\cos(\pi - a) \\ \operatorname{tang} a = -\operatorname{tang}(-a); & \operatorname{tang} a = -\operatorname{tang}(\pi - a). \end{cases}$$

Deux arcs [tels que AM et MA′ sur la fig. 80] dont la somme est égale à π sont dits *supplémentaires* ; leurs lignes trigonométriques

(1) On le voit en donnant à k la valeur 0 dans les formules (4).

(2) Les sinus sont de signes contraires et l'on démontre que :

$$\text{longueur MP} = \text{longueur } PM_3.$$

satisfont aux égalités écrites ci-dessus ; la dénomination « supplémentaire » rappelle que les angles MOA et MOA′ (fig. 80) sont supplémentaires (n° **54**).

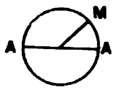


Fig. 80.

Il résulte de la définition des arcs supplémentaires que tout arc a a un supplémentaire et un seul [1] et que, si b est supplémentaire de a, a est supplémentaire de b.

161. Lignes trigonométriques de l'arc $(\pi + a)$. — D'après la formule (4) relative à la tangente, on a, quel que soit a :

$$\text{tang}\,(\pi + a) = \text{tang}\,a.$$

Pour avoir la valeur de $\sin\,(\pi + a)$, nous pouvons observer que

$$\sin\,(\pi + a) = \sin\,(-\pi + a + 2.\pi),$$

sinus égal d'après le n° **159** à $\sin\,(-\pi + a)$, donc, d'après le n° **160** à $-\sin\,(\pi - a)$, donc à $-\sin a$.

On démontre de même que $\cos\,(\pi + a) = -\cos a$.

162. Arcs complémentaires. — On appelle *arcs complémentaires* deux arcs dont la somme est égale à $\frac{\pi}{2}$; tels sur la fig. 79 les arcs AM et MB ; la dénomination « complémentaire » rappelle que les angles AOM et MOB sont complémentaires (n° **54**).

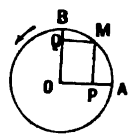


Fig. 81.

Désignons par a et b les arcs complémentaires AM, MB, tous deux positifs sur la fig. 81. Abaissant MP perpendiculaire sur OA nous avons $\sin a = \text{PM}$, $\cos a = \text{OP}$.

Cela dit, supposons un instant que pour déterminer les lignes trigonométriques de l'arc b, nous prenions, non plus le point A, mais *le point* B *comme origine des abscisses curvilignes* ; l'arc BM compté à partir de cette origine est négatif et égal à $-b$; il aura pour *sinus* (négatif) la longueur OP (affectée du signe —), pour cosinus

[1] Si l'arc ou abscisse curviligne a est un nombre compris entre 0 et π, il en est de même de l'arc supplémentaire égal à $\pi - a$; c'est le cas qui se présente sur la figure 80. Si l'arc a est positif et supérieur à π, l'arc supplémentaire est négatif.

la longueur OQ. Mais QM n'est autre chose que le cosinus de a, et $OQ = \sin a$. Donc, nous avons :

$$\sin(-b) = -\cos a \quad \text{et} \quad \cos(-b) = \sin a;$$

donc [puisque $\sin(-b) = \sin b$, $\cos(-b) = \cos b$] :

$$\sin b = \cos a, \qquad \cos b = \sin a,$$

ou

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cotg} a.$$

On démontre facilement que ces formules sont vraies quelle que soit la position du point M sur le cercle trigonométrique ([1]).

163. Calculs trigonométriques. — Pour que l'on ait effectivement avantage à substituer les lignes ou grandeurs trigonométriques aux arcs qu'elles représentent (voir n° **147**), il faut que l'on sache effectuer commodément sur ces grandeurs les opérations qui correspondent aux opérations relatives aux arcs.

On y parviendra en appliquant certaines règles ou formules générales, sur lesquelles nous reviendrons plus loin (*Deux. Liv.*, ch. I, § 10).

Afin de faire comprendre la nature de ces formules, énonçons dès maintenant celles qui sont relatives à l'addition :

Quelles que soient les valeurs (nombres relatifs quelconques) des

([1]) Des formules des nos précédents on peut déduire les expressions suivantes de $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

Remarquant que

$$a + \frac{\pi}{2} = \left(a - \frac{\pi}{2}\right) + \pi,$$

on a, d'après le n° 161,

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right); \qquad \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$$

ou, d'après 160 et 162,

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a; \qquad \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\sin a.$$

arcs ou abscisses curvilignes a et b, les valeurs des *cosinus* et *sinus* de la *somme* de ces arcs — que nous désignerons par les symboles $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ — seront donnés par les égalités

$$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a . \operatorname{tg} b}.$$

Ainsi, si l'on connaît les lignes trigonométriques de deux arcs a et b on obtiendra par des opérations arithmétiques élémentaires les lignes trigonométriques.

Nous ferons connaître dans notre *Deuxième Livre* diverses applications de ces formules. Il nous suffit pour l'instant d'avoir signalé le prolongement que le calcul trigonométrique vient donner, à son tour, à la science des nombres. De plus en plus cette science déborde hors du vieux cadre pythagoricien pour s'engager, à la suite des géomètres, des astronomes et des calculateurs, dans des voies dont nous ne pouvons pas encore prévoir l'aboutissement.

CHAPITRE III

LES FIGURES

I. — Le monde des notions géométriques

164. Grandeurs et figures. — En rapprochant au début de notre second chapitre la géométrie de l'arithmétique, en faisant une étude comparée de ces deux sciences sœurs dans leur domaine-frontière, nous avons vu nettement en quoi consiste le point de vue proprement géométrique [1]. Les grandeurs, nous l'avons dit, n'intéressent le géomètre qu'en tant qu'elles ont elles-mêmes une figure. Ainsi, lorsque le géomètre emploie le mot « égalité », c'est toujours de l'égalité de figure qu'il veut parler (*vide* n° 55) ; la notion d'égalité de grandeur ne satisfait son esprit que si, par des combinaisons de figures, il peut la ramener à la notion de superposition. De même, une opération effectuée sur des grandeurs est toujours, pour le géomètre, une *construction* [2] : partant de figures données, que l'on relie entre elles au moyen de droites, de cercles ou d'autres lignes connues, on construit une figure nouvelle appelée *résultat* de l'opération. L'élaboration d'une théorie purement quantitative des grandeurs est le fait de l'arithméticien et de l'algébriste, non du géomètre. Dans une telle théorie, même, convient-il d'éliminer tout ce qui a trait à la figure ? Doit-on et peut-on raisonner sur des grandeurs ou quantités entièrement dépouillées de forme géométrique ? Il serait audacieux de le prétendre.

[1] Sur le mot « géométrie », voir p. 62, note 1.

[2] *Supra*, chap. II, § 3, *passim* et *infra*, chap. III, § 5. Bien entendu il ne s'agit pas là d'une construction physiquement réalisée, mais d'une construction idéale.

après que nous sommes partis d'une notion de grandeur qui se confond avec celle de longueur ou de rapport de longueur (Chap. II, §§ *1, 3*). Nous verrons d'ailleurs que l'algèbre resta longtemps tributaire de la construction géométrique, si bien qu'on en est encore à se demander si dans l'ouvrage intitulé *La Géométrie* [1], Descartes a eu pour objet principal les progrès de la science du calcul ou ceux de la science des figures.

Cette dernière, aussi bien, reléguée naguère au second plan, par suite du développement triomphant de l'Analyse, a repris depuis un siècle une grande importance. Elle est et restera la plus belle illustration des spéculations mathématiques et le point de rencontre des diverses méthodes qui leur sont propres. C'est pourquoi, dans un livre où nous cherchons à mettre en lumière les principes de l'Analyse, nous ne pouvons passer sous silence les propriétés fondamentales des figures géométriques.

165. Figures géométriques et figures concrètes. — En quel sens la géométrie rationnelle étudie-t-elle les figures ? Question d'ordre philosophique que nous n'entreprendrons pas de traiter ici. Les triangles, les cercles, les ellipses sur lesquels raisonnent les géomètres ne sont point ceux que réalise la nature et que nos sens nous font percevoir. Il n'y a pas, en effet, de triangle matériel qui soit rigoureusement un triangle, c'est-à-dire qui n'ait point d'épaisseur (pas de volume), qui soit parfaitement plan (non gondolé), dont les côtés soient vraiment droits (non tordus).

Pourra-t-on, du moins, vérifier par une expérience indirecte les propriétés que les géomètres attribuent au triangle ? Non pas même, car toute expérience est, en dernière analyse, une mesure, et aucune mesure n'est absolument parfaite (cf. n° **58**). Ainsi l'on peut, au moyen d'observations astronomiques minutieuses, évaluer avec une grande précision les angles d'un triangle dont les sommets sont des étoiles ou des points terrestres définis par des signaux lumineux ; mais ce serait un merveilleux hasard que la somme des angles ainsi calculée fût rigoureusement égale à deux angles droits comme le veut le théorème

[1] *Vide infra, Deux. liv.*, ch. IV, § 3.

du n° 170 (1). En serrant la question de plus près, on constate qu'aucune des propriétés (homogénéité, isotropisme (2), etc.) attribuées à l'espace par le géomètre n'appartient à l'espace sensible. Il faut conclure de là que le géomètre raisonne sur un espace idéal, sur des figures idéales (3). Ces figures, où sont-elles, d'où les tirons-nous? Elles nous sont, — disaient les géomètres grecs et répétait après eux, Descartes, — révélées par l'intuition (cf. n° 1 et n°s 52 et suiv.). Grâce à cette faculté mystérieuse, les propriétés des figures géométriques nous apparaissent en bloc dans leur entrelacement harmonieux; nous n'avons, pour composer la géométrie, qu'à détailler ce que nous voyons dans l'ordre que nous tenons pour le plus simple et le plus clair.

166. Faits géométriques et théorèmes. — Pour exposer sous forme didactique (4) les vérités de la géométrie, nous les traduisons en propositions (*théorèmes*) que nous cherchons à *démon-*

(1) On ne peut donc pas contrôler expérimentalement ce théorème. Remarquons d'ailleurs que pour l'astronome le côté d'un triangle est un rayon lumineux. Or quelle expérience peut prouver que la direction de la lumière est bien en effet une ligne droite au sens de la géométrie rationnelle ? — Cf. *Deux. Liv.*, ch. v, § 9.

(2) L'espace géométrique est dit *homogène* parce que tous ses points sont identiques entre eux, *isotrope* parce que toutes les droites qui passent par un même point sont identiques entre elles. Or il est clair que, par rapport à nos sens, les points de l'espace, ou les droites qui passent par un même point, ne jouent pas toutes le même rôle. L'espace que nous percevons n'est pas non plus *infini*, et nous ne pouvons pas même vérifier expérimentalement qu'il a trois dimensions (cf. H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*. ch. IV).

(3) Cependant, pour faciliter le raisonnement abstrait et pour soulager notre mémoire, nous pourrons nous aider de figures réelles et, par exemple, de schémas tracés au tableau noir ou sur une feuille de papier. Telles sont les « figures » qui illustrent les traités de géométrie [nous n'oublierons pas que le mot « figure » pris dans cette acception désigne tout autre chose que la figure théorique, objet des spéculations du géomètre].

(4) Les premiers géomètres de la Grèce n'enseignaient peut-être point leur science sous forme didactique : les propriétés des figures étaient pour eux des secrets auxquels ils initiaient un petit nombre de disciples. Nous trouvons chez JAMBLIQUE (*De pythagorica vita*, 88), le renseignement suivant, d'ailleurs sujet à caution : « Voici comment les Pythagoriciens disent que la géométrie fut rendue publique : l'argent des Pythagoriciens fut perdu par l'un d'eux; à la suite de ce malheur on lui accorda de battre monnaie avec la Géométrie. » (Voir P. TANNERY, *La géométrie grecque*, p. 81).

trer, c'est à-dire à *déduire* les uns des autres. Ainsi dans un traité bien composé (cf. § 4) les théorèmes se succèdent, chainon par chainon, suivant une série logiquement ordonnée. L'ordre de cette série a-t-il, cependant, une valeur absolue? Objectivement parlant, les propriétés dont jouissent les êtres mathématiques sont des faits qui s'impliquent mutuellement, mais dont aucun n'est antérieur à l'autre. Peut-être est-il commode de déduire la proposition B de la proposition A; mais il serait souvent tout aussi légitime de tirer la proposition A de la proposition B. C'est à cause des besoins de la démonstration que des faits, simultanés pour la raison, sont traduits dans nos livres par des théorèmes successifs.

Voulant simplement rappeler, dans ce chapitre, quelques-unes des propriétés dont jouissent les figures les plus simples, nous ne nous astreindrons pas à rétablir la chaîne des démonstrations que l'on trouvera dans tous les traités de géométrie. Nous nous bornerons à signaler le contenu objectif des théorèmes fondamentaux. Il sera temps ensuite de porter notre attention sur la forme logique du système que ces théorèmes constituent (voir § 4 et *Deux. liv.*, V).

2. — *Géométrie qualitative des figures simples*

187. — Lorsque nous contemplons le monde idéal des êtres géométriques, nous sommes frappés tout d'abord par le spectacle harmonieux que nous offrent les figures, considérées dans leur forme et abstraction faite de leur grandeur. Nous observons en effet qu'une figure qui est remarquable soit par sa simplicité, soit par la symétrie qu'elle présente, soit par quelque autre circonstance, est toujours associée à d'autres figures remarquables. Il n'y a pas, autrement dit, de propriété qui ne traîne à sa suite d'autres propriétés. D'où une multitude de théorèmes, dont l'ensemble constitue la *géométrie qualitative* [1].

Nous allons rappeler brièvement quelques-uns de ces théorèmes.

[1] Nous entendons par là une géométrie où il n'est question que de la forme des figures et non des relations quantitatives entre grandeurs. Nous ferons toutefois rentrer dans cette géométrie la théorie des figures *égales* en ayant égard à ce fait que la notion d'égalité géométrique se confond avec la notion de superposition (cf. 53 et 55). — Il importe d'ailleurs de remarquer que la distinction de la géométrie qualitative et

Nombre d'entre eux étaient sans doute déjà connus des premiers géomètres grecs (1) et en particulier des Pythagoriciens ; mais ces savants n'ont laissé aucun traité écrit, et peut-être l'appareil de la démonstration n'était-il pas assez perfectionné chez eux pour leur permettre d'enchaîner leurs théorèmes d'une manière satisfaisante. Nous n'avons non plus aucune œuvre écrite des grands géomètres des ve et ive siècles, *Archytas de Tarente* (réputé le dernier pythagoricien d'importance), *Hippocrate de Chios*, professeur à Athènes au ve siècle, *Platon* (429-348), *Eudoxe de Cnide*. Mais le monument essentiel de la géométrie grecque nous est, en revanche, familier à tous ; c'est le traité (2) de l'Alexandrin Euclide (στοιχεῖα, *Eléments*, composés vers l'an 300 av. J.-C.), traité qui est demeuré jusqu'au dernier siècle la bible mathématique de tous les pays.

168. Propriétés d'angles remarquables (3). — Traçons deux droites parallèles X'X, Y'Y et coupons ces droites par une troi-

de la géométrie métrique dont il sera question au § 3 est toute relative, et que le mot « qualitatif » a des acceptions diverses. Une géométrie qui s'attache à la *forme* des figures ne fait point complètement abstraction de la grandeur et par conséquent de la qualité. Si donc on entendait par *qualitatif* ce qui n'est à aucun degré *quantitatif*, il n'y aurait de qualitatifs en géométrie que les théorèmes qui restent vrais lorsqu'on déforme les figures sans en altérer la disposition générale : ces théorèmes sont ceux de l'*Analysis situs* dont nous parlerons ultérieurement.

(1) Eudème (disciple d'Aristote), Geminus (1er siècle av. J.-C.) et Proclus (4e siècle ap. J.-C.), sources principales de nos connaissances sur les origines de la géométrie grecque (les deux premiers, d'ailleurs, ne nous sont connus qu'indirectement, leurs écrits étant perdus), attribuent à Thalès la découverte de plusieurs théorèmes que s'approprièrent ensuite des Pythagoriciens. Il semble cependant que Thalès n'ait guère eu que des connaissances pratiques qu'il tenait peut-être des Egyptiens.

(2) Il est impossible de déterminer exactement les sources de l'œuvre d'Euclide. Tout porte à croire cependant qu'il a largement puisé dans les traités de géométrie antérieurs au sien, et que les *Eléments* sont l'aboutissement d'un travail collectif de plusieurs siècles. Les éditions anciennes ou modernes des *Eléments* sont innombrables. La principale traduction française est celle de F. Peyrard, *Les Œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français*, 3 vol., Paris, 1814-1818.

(3) On trouvera dans tous les traités de géométrie élémentaire les démonstrations que nous laissons de côté. On pourra consulter, par exemple : Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire*, 2 vol., Colin, 1898 et 1901 ; Rouché et Comberousse, *Traité de géométrie*, 2 vol., Gauthier-Villars, 7e édit., 1900.

sième droite Z'Z qui les rencontre respectivement aux points A et B (fig. 82). La droite Z'Z (appelée *transversale*) forme avec chacune des droites X'X et Y'Y quatre angles que je numérote : 1, 2, 3, 4. D'où, en tout, huit angles (je les désigne respectivement par les lettres affectées d'indices A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4) entre les grandeurs desquels il y a des relations remarquables (¹).

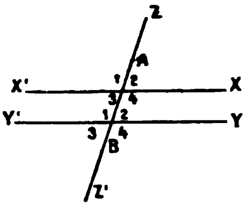


Fig. 82.

Les angles A_1, A_4 (égaux comme opposés par le sommet, n° **54**) *sont égaux* (*superposables*) *aux angles* B_1, B_4 (opposés par le sommet). *Les angles* A_2, A_3 *sont égaux aux angles* B_2, B_3. — D'ailleurs les angles A_1 et A_3, B_1 et B_3, etc. sont deux à deux supplémentaires (n° **54**). Il en résulte que *les angles* A_3 *et* B_1, *sont supplémentaires, de même les angles* A_1 *et* B_3, etc.

Lorsque l'on veut spécialement désigner deux des huit angles A_1,... B_4, l'un de sommet A et l'autre de sommet B, on emploie une terminologie spéciale : on appelle *alternes-internes* (²) les angles (égaux) A_3, B_2, ou A_4, B_1, *alternes-externes* les angles A_1. B_4, ou A_2,B_3, *correspondants* les angles A_1, B_1, ou A_2, B_2, ou A_3, B_3, ou A_4, B_4, *intérieurs* les angles A_3, B_1, ou A_4, B_2, etc.

Ces définitions sont naturellement valables lors même que les droites X'X et Y'Y ne sont pas parallèles. Mais on démontre que si, parmi les huit angles que forme avec ces droites la transversale Z'Z il y a un couple d'angles *alternes-internes*, *alternes-externes* ou *correspondants* égaux, *les deux droites* X'X *et* Y'Y *sont nécessairement parallèles.*

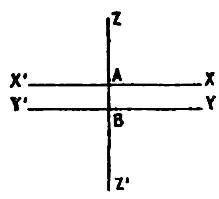


Fig. 83.

169. — Il résulte des propositions ci-dessus énoncées que lorsqu'un des huit angles est droit, tous les autres sont droits : ainsi, *lorsque la droite Z'Z est perpendiculaire sur l'une des parallèles elle est perpendiculaire sur l'autre*. Réciproquement, si *Z'Z est perpencluaire sur chacune des droites* X'X, Y'Y, *ces deux droites sont parallèles.*

(¹) Cf. Euclide, I, 27-30.
(²) *Alterni anguli*, d'après les traducteurs d'Euclide.

C'est également des propositions qui précèdent que l'on tire les importants théorèmes suivants :

Deux angles dont les sommets O *et* O′ *sont des points quelconques, mais dont les côtés sont parallèles chacun à chacun et dirigés dans le même sens sont égaux* ([1]).



Fig. 84.

Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires.

170. Triangles. Côtés. Somme des angles. — Un *triangle* a 6 « éléments », savoir ses trois côtés et ses trois angles.

Entre les trois côtés d'une part, les trois angles de l'autre, il y a des relations remarquables :

Dans un triangle quelconque un côté est plus petit que la somme des deux autres. Sur la fig. 85, par exemple, on a ;

$$\text{longueur BC} < \text{longueur AB} + \text{longueur AC}.$$

Cette proposition ne fait en somme qu'exprimer qu'entre les deux points B et C la ligne droite est le plus court chemin.

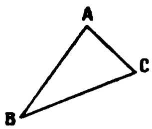


Fig. 85.

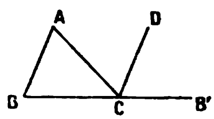


Fig. 86.

D'autre part, *la somme des angles d'un triangle quelconque a toujours pour somme deux angles droits* ([2]) [voir au n° **54** la définition de la somme de plusieurs angles].

En effet, menons (fig. 86) par le point C la droite CD parallèle à AB, et appelons CB′ le prolongement de BC : l'angle A du triangle est égal à l'angle ACD (*alterne-interne*, n° **168**) ; l'angle B du triangle est égal à l'angle DCB′ (*correspondant*). Donc la somme des trois angles du triangle est égale à la somme des

([1]) Le théorème est encore vrai si les deux angles sont situés dans des plans différents (ces plans sont alors, d'ailleurs, nécessairement parallèles).

([2]) Euclide, liv. I, prop. 32. Voir au sujet de ce théorème : *infra*, *Deuxième Liv.*, chap. v.

angles BCA, ACD et DCB′, donc à l'angle BCB′, plus grand angle possible, *égal à deux droits* (n° **54**).

La découverte de ce théorème capital est attribuée par Eudème (voir p. 183, note 1) aux Pythagoriciens.

L'angle (tel que ACB′) formé par un côté d'un triangle et le prolongement d'un autre côté est appelé *angle extérieur* (ἐκτὸς γωνία). Chaque angle extérieur est égal à la somme des deux angles du triangle qui ne lui sont pas adjacents [1].

Il résulte de ces propositions qu'un triangle quelconque ne peut avoir plus d'un angle *obtus*. Dans un triangle qui a un angle droit, les deux angles non-droits (nécessairement aigus) sont *complémentaires* (n° **54**).

171. — Signalons encore la propriété suivante concernant les grandeurs relatives des côtés et des angles d'un triangle.

A [2] *deux côtés inégaux d'un triangle correspondent des angles inégaux; au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

Ainsi sur la figure 85 le côté AB est plus grand que le côté BC. On démontre qu'en conséquence les angles ACB et ABC sont inégaux et que le premier est plus grand que le second.

172. Egalité des triangles. — Deux triangles sont dits égaux (*congruents*) lorsqu'ils sont superposables [3]. Deux triangles égaux (tels que les triangles ABC, A′B′C′ sur la figure 87) ont des angles et côtés correspondants qui sont égaux deux à deux : nous dirons donc que *leurs 6 éléments sont égaux chacun à chacun* [4]. Réciproquement, si deux triangles ont leurs six éléments égaux chacun à chacun, ils sont superposables.

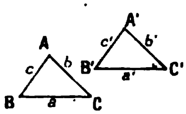


Fig. 87.

(1) car il a même *supplément* que la somme de ces angles, savoir l'angle ACB.

(2) EUCLIDE, liv. I, prop. 19.

(3) Cela revient à dire que le triangle A′B′C′ peut être *déplacé* de telle manière qu'il vienne coïncider avec le triangle ABC. Cf. *Deux. Liv.*, chap. IV, § 11; voir aussi n° 184

(4) Il en sera de même de tous les segments de droites associés aux triangles (tels que hauteurs, bissectrices, n° 177) qui se correspondent deux à deux.

Voilà — ou à peu près — tout ce que nous aurions à dire des triangles égaux si nous n'avions d'autre but que de décrire les propriétés des figures. Mais nous ne devons pas oublier (cf. **166** et **231**) que les théorèmes de la géométrie ne sont pas seulement tenus d'apporter des résultats intéressants, mais doivent aussi servir d'instruments de démonstration pour la découverte de nouvelles propositions. C'est à ce titre que s'imposait la détermination des « *cas d'égalité des triangles* », qui est sans doute l'une des questions les plus anciennement résolues par les géomètres [*Eudème* fait remonter la découverte de l'un d'eux jusqu'à *Thalès*.]

Il s'agissait de déterminer *des conditions suffisantes entraînant l'égalité de deux triangles*. En d'autres termes, — désignant les angles des deux triangles (fig. 87) par les noms de leurs sommets respectifs et les côtés opposés par les petites lettres correspondantes a, b, c, a', b', c', — écrivons les six égalités (¹)

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C', \quad a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

qui expriment que les triangles sont superposables. Si ces *six* conditions d'égalité sont satisfaites, les triangles sont sûrement égaux. Mais est-il nécessaire de *savoir déjà* qu'elles sont toutes six satisfaites pour affirmer l'égalité des deux triangles ? Ne peut-il arriver que, si *cinq*, ou *quatre*, ou *trois* des six conditions sont remplies, les dernières le soient nécessairement *ipso facto* ? S'il en était ainsi, nous dirions que les *cinq*, ou *quatre*, ou *trois* premières conditions sont des « conditions suffisantes » assurant l'égalité des deux triangles.

De telles conditions suffisantes sont données par les *trois cas d'égalité* des triangles que des démonstrations très simples permettent de déterminer.

1ᵉʳ *cas*. — *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun*, ce qui veut dire : *il suffit* que les deux triangles aient un angle égal (soit $A = A'$) et les deux côtés correspondants égaux (soit $b = b'$, $c = c'$ sur la figure 87) pour que les deux triangles soient égaux.

2ᵐᵉ *cas*. — *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal*

(¹) Il s'agit ici toujours d'égalités géométriques que nous exprimons *symboliquement* en empruntant le signe = aux arithméticiens.

adjacent (attenant) *à deux angles égaux chacun à chacun* [par exemple lorsque le côté a est égal au côté a', l'angle B à l'angle B', l'angle C à l'angle C'].

3me *cas. — Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.*

173. Remarque. — Aux trois cas énumérés ci-dessus on pourrait adjoindre le suivant : cas où les deux triangles ont deux côtés égaux et un angle égal non compris entre ces côtés. Mais ces conditions, nécessaires pour que les triangles soient égaux, ne sont pas suffisantes. Supposons en effet, qu'il soit su que les côtés AB, AC et l'angle B d'un premier triangle ABC (fig. 85) soient respectivement égaux aux côtés et à l'angle correspondant d'un second triangle : ce second triangle pourra être (fig. 88) le triangle A'B'C' égal à ABC ; mais il pourra être aussi le triangle A'B'C", qui a même côté A'B', même angle B' et où A'C" est égal à A'C' ; or ce triangle n'est pas superposable à ABC. Ainsi les conditions données par l'énoncé déterminent *deux* triangles différents, dont l'un seulement est égal au triangle ABC : pour conclure à l'égalité il faut s'être assuré que c'est bien à celui-ci que l'on a affaire.

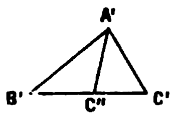


Fig. 88.

Remarquons, d'autre part, que l'on ne peut jamais, déduire l'égalité de deux triangles du fait qu'ils ont leurs trois angles égaux chacun à chacun [1]. Il est clair en effet qu'un triangle très petit et un triangle très grand peuvent avoir des angles égaux.

174. Triangles rectangles. — On appelle triangle rectangle un triangle dont un angle est droit. Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit (côté BC sur la figure 89 est appelé

[1] Les trois angles d'un triangle quelconque ayant toujours la même somme (n° 170) nous ne donnons rien de plus en déclarant égaux les trois angles des deux triangles qu'en supposant simplement l'égalité de deux angles : en d'autres termes, nous ne formulons que *deux* conditions auxquelles satisfont les deux triangles : les cas d'égalité supposent tous, au contraire, que *trois* conditions sont remplies [au sujet du nombre de conditions qui déterminent un triangle, voir *infra*, *Liv. Deux.*, chap. IV, § I].

hypoténuse (ὑποτείνουσα, qui sous-tend), les deux autres côtés sont appelés côtés de l'angle droit ou *cathètes* (κάθετος signifie : qui tombe verticalement).

Les triangles rectangles, jouissent de propriétés exceptionnelles remarquables. L'énoncé des cas d'égalité de deux triangles, en particulier, peut être simplifié lorsque les triangles sont rectangles (¹).

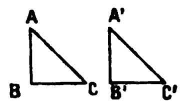


Fig. 89.

175. Applications diverses. — La considération de triangles égaux permet de reconnaître l'égalité de segments rectilignes ou d'angles remarquables associés à diverses figures.

Soient (fig. 90) X'X une droite indéfinie et Y'Y une autre droite, perpendiculaire sur X'X au point H. Tout segment rectiligne tel que AB, mené d'un point A de Y'Y à un point (quelconque) B de X'X est dit *oblique* par rapport à la droite X'X ; le point B est appelé « *pied de l'oblique* » (²). Cela posé, on démontre que *deux obliques, issues d'un même point* A *et dont les pieds sont également distants du pied* H *de la perpendiculaire* AH (*sur* X'X) *sont des segments égaux*. Réciproquement, *si ces segments sont égaux, leurs pieds sont également distants du point* H.

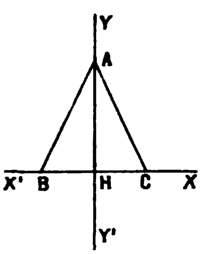


Fig. 90.

Remarque. — On démontre (³) que toute oblique est plus longue que la perpendiculaire. C'est pourquoi la *distance du point* A *à la droite* X'X *est définie comme étant la longueur de la perpendiculaire* AH. Le pied H de la perpendiculaire abaissée de A sur X'X est appelé *projection orthogonale* ou simplement *projection* du point A sur la droite X'X.

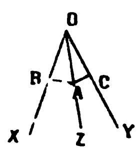


Fig. 91.

(¹) *Deux triangles rectangles sont égaux* — dit-on assez incorrectement — *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et une cathète égale*, — ou *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle* (*autre que l'angle droit*) *égal*.

(²) Le mot *oblique*, employé comme substantif, est féminin (*droite* étant sous-entendu).

(³) Nous verrons plus loin (215) que AH (c'est-à-dire la mesure de AH) est égale au produit de AC par un *nombre plus petit que* 1 (cosinus de l'angle HAC).

Considérons maintenant la bissectrice OZ (n° 54) d'un angle donné XOY (fig. 91). On démontre que les *perpendiculaires* AB *et* AC *abaissées d'un point quelconque* A *de la bissectrice sur les côtés de l'angle sont des segments égaux.*

176. Symétries. — Soit donnée une droite X'X. Deux points quelconques A et A' sont dits *symétriques* l'un de l'autre par rapport à cette droite s'ils sont situés sur une même perpendiculaire à X'X et équidistants de cette droite. — Deux lignes quelconques sont dites *symétriques* l'une de l'autre par rapport à X'X si tous leurs points sont deux à deux symétriques. — On démontre facilement que deux triangles — tels que ABC, A'B'C' (fig. 92) — symétriques par rapport à une droite X'X sont des triangles égaux. D'une manière générale, deux figures de forme quelconque symétriques par rapport à une droite sont congruentes (superposables [1]).

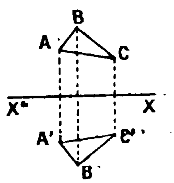


Fig. 92.

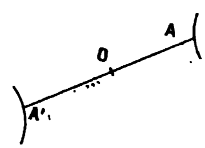


Fig. 93.

Soit donné, d'autre part, un point O. Deux points quelconques A et A' sont dits *symétriques* l'un de l'autre par rapport à O s'ils sont équidistants de ce point et en ligne droite avec lui (fig. 93). Deux figures quelconques sont dites *symétriques* par rapport à O si leurs points sont symétriques deux à deux. On démontre que deux telles figures sont toujours congruentes.

177. Droites remarquables associées à un triangle. — On peut associer à un triangle diverses droites qui jouissent de propriétés remarquables. Parmi ces droites, celles qui sont le plus fréquemment considérées sont les *hauteurs*, les *médianes* et les *bissectrices*.

[1] Voir à ce sujet *Deux. Liv.*, ch. IV, § 11.

La *hauteur* (du triangle ABC) relative au côté BC est la *perpendiculaire* AH *abaissée du sommet* A *sur le côté* BC (fig. 94) [le point H, *pied* de la hauteur, n'est d'ailleurs pas nécessairement situé entre B et C; il peut être sur le prolongement de ce côté, fig. 95].

La *médiane* relative au côté BC est la droite qui joint le sommet A, opposé à BC, au *milieu* M de BC.

La *bissectrice* relative à l'angle A est la bissectrice AP de cet angle (voir n° **54**).

Tout triangle a trois hauteurs, trois médianes, trois bissectrices, et l'on démontre que ces droites jouissent des propriétés suivantes :

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point. — *Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point* (appelé [1] *centre de gravité du triangle*). — *Les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un même point.*

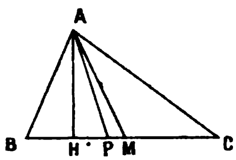


Fig. 94.

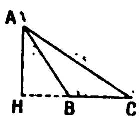


Fig. 95.

On peut également démontrer que *les perpendiculaires élevées en leurs milieux sur les trois côtés d'un triangle se coupent en un même point.*

Cette proposition et celle qui concerne les bissectrices [2] ont sans doute été connues des Pythagoriciens. Les propositions relatives aux hauteurs et aux médianes sont utilisées par *Archimède*.

178. Triangle isoscèle. — Un triangle isoscèle (ἰσοσκελής) est un triangle qui a *deux côtés égaux* (AB et AC sur la figure 96). Cette propriété en entraîne d'autres, en particulier les suivantes :

(1) Ce point se trouve être en effet pour un triangle homogène (c'est-à-dire uniformément pesant dans toute son étendue) le centre de gravité que l'on définit en mécanique.

(2) La démonstration de ces propositions résulte des remarques que nous ferons au n° 190 à propos du cercle circonscrit et du cercle inscrit.

Les angles opposés aux côtés égaux (angles B et C sur la figure) *sont égaux.*

La hauteur AH *relative au troisième côté* BC (appelé *base* du triangle), *est, en même temps, la médiane relative au même côté et la bissectrice de l'angle* A. Ainsi, lorsque AB est égal à BC, les trois droites AH, AM, AP de la figure 94 coïncident.

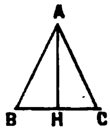


Fig. 96.

Un triangle isoscèle qui a ses trois côtés égaux est appelé *triangle équilatéral.*

179. Quadrilatères remarquables. — Nous avons déjà défini aux nos **75, 77**, les quadrilatères remarquables que l'on appelle *parallélogrammes, rectangles, losanges, trapèzes.* Ces quadrilatères jouissent de propriétés que connaissaient sans doute déjà les Pythagoriciens.

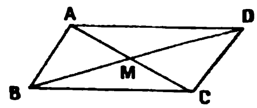


Fig. 97.

Ainsi, dans le *parallélogramme* AB, CD (fig. 97) *les côtés opposés* AD *et* BC, AB *et* CD *sont égaux, les angles opposés* A *et* C, D *et* B *sont égaux.* Les *diagonales* [droites AC, BD joignant deux à deux les sommets opposés [1]] se coupent en leurs milieux.

Dans un losange les diagonales sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

180. Géométrie dans l'espace (stéréométrie). — L'étude des figures tracées dans l'espace à trois dimensions (*figures solides*) est semblable, par son point de vue et par sa méthode, à l'étude des figures planes.

Nous avons rappelé au n° **78**, les définitions et propriétés des droites et plans parallèles ou perpendiculaires : ces propriétés — nous l'avons fait observer —, encore qu'elles soient intuitives, peuvent être rigoureusement démontrées moyennant l'admission préalable d'un petit nombre de définitions et de postulats ; c'est ainsi qu'elles se présentent au XIe livre des *Eléments* d'Euclide. Mais leur vérité a évidemment été reconnue aux temps les plus

[1] Dans un polygone quelconque, on appelle *diagonale* (du grec διὰ γώνιος, qui sectionne les angles) toute droite joignant deux sommets non reliés par un côté du polygone.

anciens et indépendamment de tout système de géométrie rationnelle.

On obtient d'autres propriétés — moins immédiates — des figures solides composées de droites et de plans, en suivant pas à pas les propositions de la géométrie plane et cherchant à les adapter à l'espace.

Ainsi, par exemple, nous avons au n° **175** signalé certaines propriétés remarquables de la perpendiculaire et des obliques abaissées d'un point sur une droite. Ces propriétés se transportent immédiatement à l'espace lorsqu'on remplace la droite par un plan :

Si d'un point A extérieur à un plan P on abaisse la perpendiculaire AH sur un plan P (fig. 98), on démontre :

1° Que deux obliques — telles que AB, AC — dont les pieds (sur le plan P) sont à la même distance du pied H de la perpendiculaire ont des longueurs égales.

2° Que réciproquement, si deux obliques — telles que AB, AC — ont des longueurs égales, leurs pieds sont à la même distance du pied de la perpendiculaire.

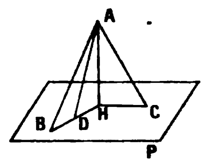


Fig. 98.

3° Que la perpendiculaire AH est plus courte que toutes les obliques abaissées du point A sur le plan.

4° Que de deux obliques — telles que AB, AD — la plus courte est celle dont le pied est le plus rapproché du point H.

La longueur de la perpendiculaire AH abaissée du point A sur le plan P est appelée *distance* du point A au plan P.

Le pied H de la perpendiculaire AH est appelé *projection* (orthogonale) du point A sur le plan P.

181. — Deux points A et A′ situés sur une même perpendiculaire à un plan P et équidistants de ce plan sont dits *symétriques par rapport au plan* P. — Deux figures quelconques sont dites symétriques par rapport au plan P si leurs points sont symétriques deux à deux.

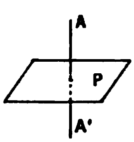


Fig. 99.

La symétrie par rapport à un point se définit dans l'espace comme dans le plan.

182. — A l'étude des figures planes limitées par des segments de droites (ou *polygones*) correspond l'étude des figures solides limitées par des faces planes (ou *polyèdres*, cf. **78**). Nous avons déjà défini au § **2** les plus simples de ces corps. Nous en signalerons tout à l'heure quelques autres ; mais nous allons, auparavant, fixer un instant notre attention sur une figure connexe dont les propriétés rappellent, à un certain point de vue tout au moins, celles des polygones : je veux parler de l'*angle polyèdre*.

183. — On appelle *angle polyèdre la figure formée par plusieurs demi-droites* (trois au moins) *issues d'un même point* S et telle que trois quelconques d'entre elles ne soient jamais situées dans un même plan.

Pour achever de caractériser un angle polyèdre, on établit entre les demi-droites qui le définissent un ordre de succession. Nous numéroterons, par exemple, ces demi-droites à partir de 1 et les désignons par SA_1, SA_2, ..., SA_n. Cela fait, nous appellerons *faces* du polyèdre chacun des angles (angles ordinaires ou *angles plans*)

$$A_1SA_2, \quad A_2SA_3, \quad A_3SA_4, \ldots, \quad A_{n-1}SA_n, \quad A_nSA_1.$$

Les angles dièdres formés par les plans de ces faces sont les *dièdres* de l'angle polyèdre. Les demi-droites elles-mêmes seront appelées *arêtes*, le point S *sommet* de l'angle polyèdre. — Un angle polyèdre a autant de faces et de dièdres que d'arêtes ([1]).

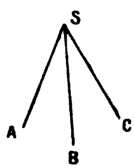


Fig. 100.

En particulier un *angle trièdre* ou *trièdre* est la figure formée par trois demi-droites SA, SB, SC (fig. 100) non situées dans un même plan. La figure a 3 *faces* et 3 *dièdres* (ce sont les *éléments* du trièdre).

184. — La considération des trièdres fournit l'exemple le plus simple d'une particularité caractéristique ([2]) des figures de l'espace qui ne se rencontrait pas en géométrie plane : c'est que deux

([1]) L'angle polyèdre sera dit *régulier* s'il a toutes ses faces égales et tous ses dièdres égaux (comparer la définition des polygones réguliers).

([2]) Nous y reviendrons avec plus de détail au *Deuxième Liv.*, chap. IV, lorsque nous étudierons la théorie des « *déplacements* » des figures ou corps solides.

trièdres peuvent avoir leurs six éléments correspondants égaux chacun à chacun sans être cependant congruents (superposables) [on a vu qu'au contraire deux triangles qui ont leur six éléments égaux sont nécessairement superposables].

Il y a là un fait qu'il est essentiel d'étudier si l'on veut approfondir l'étude de la congruence ou égalité géométrique.

Considérons par exemple le trièdre SABC [dont les faces seront supposées inégales] (fig. 101) et le trièdre SA'B'C' obtenu en menant les 3 prolongements SA', SB', SC' des trois demi-droites SA, SB, SC. Les faces du second trièdre sont égales chacune à chacune aux faces du premier, car les angles ASB et A'SB', ASC et A'SC', BSC et B'SC' sont égaux deux à deux comme opposés par le *sommet*. D'ailleurs les *dièdres* des deux trièdres dont les arêtes sont en prolongement l'une de l'autre sont évidemment égaux : car les dièdres d'arête SA et SA', par exemple, peuvent être considérés comme deux dièdres d'arête AA' opposés par l'*arête* (n° 59). — Et cependant, malgré l'égalité de leurs éléments, les deux trièdres ne sont pas superposables. On constate en effet que si, d'une manière quelconque, on place la face A'SB' sur la face ASB, l'arête SC' ne peut pas coïncider avec SC. Ainsi, dans les trièdres représentés par la figure 101, les arêtes SA, SA', SB, SB', sont supposées être dans le plan de la figure (tableau ou feuille de papier), l'arête SC est supposée être au-dessus ([1]), tandis que l'arête SC' est au-dessous. Imaginons que fichant une épingle en S, perpendiculairement au plan du tableau, nous fassions pivoter le trièdre SA'B'C' autour de cette épingle, sans que l'angle A'SB' quitte le plan du tableau. Nous pourrons ainsi amener l'angle A'SB' à coïncider avec ASB; mais alors SC' qui reste toujours au-dessous du plan du tableau ne coïncidera pas avec SC.

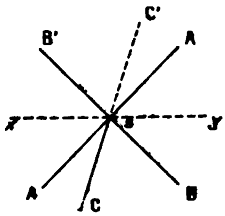


Fig. 101.

Les deux trièdres SABC, SA'B'C' *qui ont leurs éléments égaux*

([1]) Le plan de la figure (que nous appelons *plan du tableau* pour éviter les confusions auxquelles peut donner lieu l'emploi du mot « figure ») étant supposé horizontal.

chacun à chacun et ne sont pas superposables sont dits trièdres symétriques.

185. — Ces remarques faites, énonçons quelques propriétés des trièdres qui sont démontrées dans les traités de géométrie :

Dans un trièdre une face quelconque est moindre que la somme des deux autres.

Si dans un trièdre deux angles dièdres sont égaux, les faces opposées sont égales : à des dièdres inégaux sont opposées des faces inégales ; la plus grande face est opposée au plus grand dièdre.

Aux cas d'égalité des triangles correspond l'énoncé des conditions suffisantes sous lesquelles deux trièdres ont leurs six éléments égaux chacun à chacun, c'est-à-dire sont égaux ou symétriques.

Deux trièdres sont égaux ou symétriques : lorsqu'ils ont une face égale adjacente (attenante) *à deux dièdres égaux chacun à chacun ;*

ou, *lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune ;*

ou, *lorsqu'ils ont leurs trois faces égales chacune à chacune.*

186. Cercle. — Le cercle et la sphère sont les figures de prédilection des géomètres grecs : par leurs propriétés merveilleuses, en effet, ces figures sont belles entre toutes comme le nombre *dix* est beau entre tous les nombres. Ce sont elles, d'autre part, que l'on est conduit à étudier lorsque l'on considère le mouvement des astres ou que l'on cherche à pénétrer le secret de l'harmonie des mondes.

Les propriétés du cercle qui furent connues les premières sont celles qui se rapportent aux *arcs*, aux *cordes*, aux *tangentes*, aux *angles* et *polygones inscrits* ou *circonscrits*.

Un *arc* est une portion de la circonférence (1) limitée par deux points appelés *extrémités* de l'arc. Une *corde* est le segment de droite qui joint les deux extrémités d'un arc : la corde *sous-tend* l'arc : d'où le nom d'ὑποτείνουσα (*substensa*) que lui donnaient les Grecs.

Toute corde sous-tend deux arcs formant à eux deux la circonférence tout entière. Un *diamètre*, en particulier (*voir* n° **64**), est

(1) Voir les définitions données au n° 64, p. 77, note 1.

une corde qui passe par le centre et sous-tend deux arcs égaux à la moitié de la circonférence.

Deux cercles sont égaux (superposables) lorsqu'ils ont des diamètres ou des rayons égaux.

Dans un cercle (ou dans deux cercles égaux) des arcs égaux (superposables) sont sous-tendus par des cordes égales et réciproquement (*exemple* : les arcs et cordes AB et CD sur la figure 102).

La perpendiculaire OP abaissée du centre du cercle sur une corde quelconque AB coupe cette corde en son milieu (c'est la hauteur du triangle isoscèle OAB).

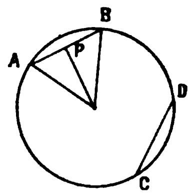


Fig. 102.

187. Angles au centre, angles inscrits. — On appelle *angle au centre* un angle qui a pour sommet le centre du cercle (tel l'angle AOB sur la figure 102). Si les arcs compris entre les côtés de deux angles au centre sont égaux, les deux angles sont égaux et réciproquement. C'est en raison de cette propriété que nous avons pu considérer les mesures d'angles comme tenant lieu de mesures d'arcs (n° **103**).

On appelle angle *inscrit* l'angle formé par deux cordes qui se coupent sur la circonférence (tel l'angle BAC sur la figure 103). *L'angle inscrit* BAC *est la moitié de l'angle au centre* BOC *qui comprend entre ses côtés le même arc* BC (en effet l'angle au centre BOC, somme [1] des angles *extérieurs* (**170**) des triangles isoscèles OAB, OAC, égale deux fois l'angle OAB, *plus* deux fois l'angle OAC). En conséquence *la mesure de l'angle inscrit sera la moitié de l'arc* BC. Deux angles inscrits qui comprennent entre leurs côtés le même arc seront égaux. L'angle BA'C (fig. 103) qui comprend entre ses côtés l'arc BAC est *supplémentaire* de l'angle BAC.

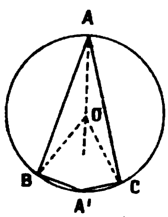


Fig. 103.

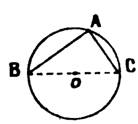


Fig. 104.

L'angle inscrit qui comprend entre ses côtés une demi-circon-

[1] Au sens du n° 54.

férence [c'est-à-dire dont les côtés coupent le cercle aux deux extrémités d'un diamètre] est un *angle droit* (fig. 104).

188. — On démontre qu'un angle tel que BAC (fig. 105), qui a son sommet à l'intérieur de la circonférence, est égal à la somme de deux angles inscrits comprenant entre leurs côtés les arcs BC et B'C' respectivement (il a pour mesure la demi-somme de ces arcs).

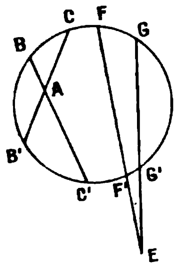


Fig. 105.

Un angle tel que FEG (fig. 105), qui a son sommet à l'extérieur de la circonférence est égal à la différence de deux arcs inscrits comprenant entre leurs côtés les arcs FG et F'G' respectivement.

189. Tangentes. — Une droite est dite *tangente* à un cercle si, indéfiniment prolongée dans les deux sens, elle touche le cercle en un point et un seul (*point de contact* de la tangente).

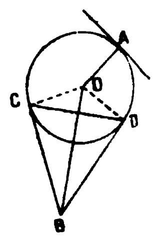


Fig. 106.

Par un point donné d'un cercle on ne peut mener qu'une tangente à ce cercle. *On démontre que la tangente qui touche le cercle de centre* O *en un point* A (fig. 106) *est perpendiculaire au rayon* OA *qui aboutit en ce point.*

D'un point B *extérieur* au cercle on peut mener deux tangentes au cercle (BC et BD sur la fig. 106) : *les segments de ces tangentes compris entre le point* B *et les points de contact* C *et* D *sont deux segments égaux* [1].

Par un point situé à l'intérieur du cercle on ne peut faire passer aucune tangente.

Toute droite qui rencontre un cercle sans lui être tangente est une *sécante* par rapport à ce cercle ; elle le coupe nécessairement en deux points.

190. Polygones inscrits ou circonscrits. — Un polygone est « *inscrit* » dans un cercle lorsque tous ses sommets sont sur la

[1] On démontre que la *corde* CD *qui joint les points de contact est perpendiculaire à la droite* BO.

circonférence ; il est « *circonscrit* » au cercle lorsque tous ses côtés lui sont tangents. Nous avons déjà eu l'occasion de considérer de tels polygones lorsque nous avons cherché à définir la longueur du cercle par rapport au rayon (n° **65**). Sur la fig. 103 (*vide supra*) le quadrilatère ABA'C est inscrit dans un cercle : il résulte, dès lors, des propositions énoncées plus haut que *dans un quadrilatère inscrit les angles opposés, tels que* A *et* A' *sont supplémentaires.* Nous voyons par là que tout quadrilatère n'est pas susceptible d'être inscrit dans un cercle.

Au contraire, un triangle quelconque peut être inscrit dans un cercle (appelé *cercle circonscrit* au triangle) et circonscrit à un autre cercle (appelé *cercle inscrit* dans le triangle). Le *cercle circonscrit* au triangle ABC (fig. 107) a pour centre le point de ren-

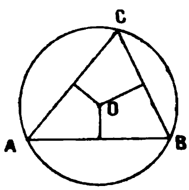


Fig. 107.

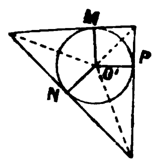


Fig. 108.

contre O des perpendiculaires élevées aux milieux des côtés (voir n° **177**) ; en effet les droites OA, OB, OC sont égales, deux à deux, comme obliques dont les pieds sont également distants des pieds des perpendiculaires abaissée de O sur les trois côtés AB, BC, CA. Le *cercle inscrit* (fig. 108) a pour centre le point de rencontre O' des bissectrices du triangle ; en effet (n° **175**) les distances O'M, O'N, O'P de ce point aux trois côtés du triangle sont deux à deux égales ; donc les trois points M, N, P sont sur un même cercle de centre O' auquel les côtés du triangle (perpendiculaires sur les rayons O'M, O'N, O'P) sont tangents.

Remarque. — Le cercle circonscrit à un triangle ABC rectangle en A (ayant son angle A droit) a pour diamètre l'hypoténuse BC. En effet l'angle inscrit BAC a pour mesure la moitié de la circonférence ; donc BC doit couper la circonférence en deux parties égales (fig. 104).

191. Cercles tangents. — Après les questions relatives à un cercle et à ses tangentes, une série de problèmes plus compliqués

se posent où l'on considère plusieurs cercles simultanément. et en particulier des cercles tangents entre eux.

Deux cercles qui se rencontrent se coupent en général en deux points ([1]). S'ils ne se touchent qu'en un seul point, A, ils sont dits *tangents* en ce point (fig. 109) : on démontre qu'ils ont alors la même *tangente* T'AT au point A (cette droite est perpendiculaire sur la « *ligne des centres* » qui joint les centres des deux cercles).

Les problèmes relatifs aux cercles tangents furent l'objet de nombreux travaux dans l'antiquité et aux temps modernes. *Apollonius de Perge* étudia ces problèmes dans un traité, aujourd'hui perdu, le Περὶ ἐπαφῶν (*Des contacts*). Viète les reprit au XVI[e] siècle dans un traité qu'il intitula *Apollonius Gallus* ([2]) : il résolut en particulier le problème suivant : Trois cercles étant donnés, trouver le centre et le rayon d'un quatrième cercle qui leur soit tangent à tous trois. Descartes, Fermat ([3]), Pascal traitèrent des problèmes analogues relatifs à des cercles et aussi à des sphères tangentes entre elles (se touchant en un seul point).

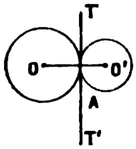


Fig. 109.

192. Géométrie sphérique. — La géométrie de la sphère a été cultivée de tous temps par les astronomes. Les Alexandrins en firent une étude approfondie ([4]) : les progrès des méthodes trigonométriques instituées par les Arabes lui donnèrent une impulsion nouvelle.

L'étude des *figures sphériques* en particulier, — ou figures formées de courbes tracées sur la surface d'une même sphère —

([1]) On constate facilement que pour que deux cercles se coupent il faut et il suffit que la distance de leurs centres soit inférieure à la somme et supérieure à la différence de leurs rayons.

([2]) *Apollonius Gallus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *geometria. Opera*, p. 326.

([3]) FERMAT résolut en particulier le problème suivant qui lui avait été proposé par DESCARTES : Déterminer la sphère qui est tangente à quatre sphères données.

([4]) La géométrie sphérique des Alexandrins nous est connue en particulier par l'ouvrage de MÉNÉLAS (en latin : *Sphaerica*, 1[er] siècle après J.-C.) dont nous avons des traductions hébraïques et arabes, et par la Grande Syntaxe (Μεγάλη σύνταξις) de PTOLÉMÉE (v. , p. 168, note 2). Nous trouvons déjà les origines de la théorie dans un traité d'AUTOLYCUS. contemporain d'Euclide.

est remarquable par l'analogie qu'elle présente avec la géométrie des figures planes.

Reportons-nous à la définition des grands cercles donnée au n° **87**. Nous voyons que *par deux points* A *et* B *d'une sphère donnée il passe un grand cercle, et il n'en passe qu'un seul, sauf si les deux points* A *et* B *sont les extrémités d'un même diamètre* ([1]). — En effet, par deux points A et B et le centre O de la sphère passe un plan qui est unique à moins que les trois points AOB ne soient sur une même droite; ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle qui passe par A et B (fig. 110).

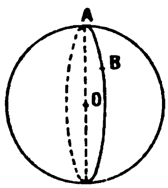


Fig. 110.

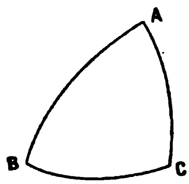


Fig. 111.

Il résulte de là que trois points A, B, C situés sur la surface d'une même sphère peuvent être joints deux à deux par trois arcs de grands cercles dont chacun est moindre qu'une demi-circonférence (exemple : la fig. 111). La figure formée par ces trois arcs est appelée *triangle sphérique*; les points A, B,C sont les *sommets* de ce triangle, les trois arcs en sont les *côtés*; l'angle formé par les deux droites respectivement tangentes en A aux arcs de cercles AB et AC est appelé *angle* du triangle sphérique au sommet A.

Les triangles sphériques jouent sur la surface d'une sphère le rôle que jouent dans un plan les triangles ordinaires, et possèdent des propriétés analogues.

De la définition du triangle sphérique on passe immédiatement à la définition d'un *polygone sphérique* ayant un nombre quelconque de sommets et de côtés.

193. Polyèdres réguliers. — Nous avons défini au n° **87** les polyèdres inscrits dans une sphère ou circonscrits à une sphère.

([1]) En ce cas les points A et B sont dits *diamétralement opposés*.

Parmi ces solides, les plus remarquables sont les *polyèdres réguliers*, dont toutes les faces sont des polygones réguliers, et dont tous les angles polyèdres sont réguliers (p. 194, note 1) et égaux entre eux. L'étude des polyèdres réguliers — objet du Livre XIII des *Eléments* d'Euclide — était sans doute le couronnement de la géométrie pythagoricienne et platonicienne. « Euclide, dit Proclus [1], était platonicien d'opinion ; aussi s'est-il proposé comme but final de ses Eléments la construction des figures appelées platoniciennes ».

Les polyèdres réguliers sont au nombre de cinq : le *cube*, le *tétraèdre*, l'*octaèdre*, le *dodécaèdre*, l'*icosaèdre*. Ils sont ainsi définis par Euclide [2] au début du Livre XI des *Eléments* (déf. 25-29) :

Un cube est un solide compris entre six carrés égaux.

Un tétraèdre régulier (τετραέδρον) est une figure solide comprise sous quatre triangles égaux et équilatéraux (**178**).

Un octaèdre régulier (ὀκτάεδρον) est une figure solide comprise sous huit triangles égaux et équilatéraux.

Un dodécaèdre [3] régulier (δωδεκάεδρον) est une figure solide comprise sous douze pentagones égaux équilatéraux (à côtés égaux) et équiangles.

Un icosaèdre régulier (εἰκοσάεδρον) est une figure solide comprise sous vingt triangles égaux et équilatéraux.

3. — Géométrie métrique

194. — La géométrie métrique est fondée sur le calcul des grandeurs et, plus particulièrement, sur le calcul des longueurs (ou des rapports de longueurs) dont nous avons exposé les principes au chapitre II (§§ *1-4*). Elle étudie des relations arithmétiques remarquables auxquelles satisfont certaines longueurs ou certains rapports de longueurs associées aux figures géométriques fondamentales : triangles, polygones, cercles, etc. Ces relations se traduisent par des égalités entre nombres du moment où l'on admet que

[1] D'après GEMINUS, trad. Paul Tannery, apud *La géom. grecque*, p. 67.

[2] La définition du tétraèdre ne figure pas dans le texte publié par l'édition HEIBERG.

[3] D'après une légende pythagoricienne, HIPPASOS aurait péri en mer pour avoir divulgué la construction du dodécaèdre régulier.

les rapports, et pareillement les longueurs (une fois l'unité choisie), équivalent à des nombres irrationnels ou rationnels ; on les obtient cependant, d'ordinaire, par des moyens (constructions) purement géométriques ; aussi nous sera-t-il commode de nous exprimer, dans nos énoncés et démonstrations comme si c'étaient les longueurs elles-mêmes, et, par conséquent, les segments rectilignes qui subissaient les opérations arithmétiques, indiquées par nos énoncés. Nous avons vu au n° **95** que nous avions parfaitement le droit de procéder ainsi et d'effectuer des calculs sur les puissances des longueurs ou segments sans faire intervenir aucune considération d'aire et de volume. Lorsqu'il sera nécessaire de spécifier que nous considérons la *mesure* d'un segment AB et non le segment lui-même, nous désignerons cette mesure par le symbole $\overline{AB}$, ses puissances par les symboles $\overline{AB}^2$, $\overline{AB}^3$,... ; en cas contraire, nous emploierons simplement les notations AB, AB^2, AB^3, etc.

195. Similitude des triangles. — Nous avons dit au n° **89** en quoi consiste la similitude. La définition des triangles semblables en particulier — si nous la réduisons au minimum indispensable et en éliminons tout ce qui peut être déduit des théorèmes déjà connus (cf. **172**) — la définition des triangles semblables peut être présentée comme il suit : *Deux triangles* ABC *et* A'B'C' *sont semblables lorsque leurs côtés sont proportionnels, c'est-à-dire lorsque les rapports* $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{A'C'}{AC}$, $\frac{B'C'}{BC}$ *sont des rapports égaux* (je désigne par A'B',... BC les longueurs des côtés des deux triangles). Les côtés, les angles ou les sommets des deux triangles qui se correspondent deux à deux sont dits *homologues* (cf. p. 103, note 2). Deux côtés homologues sont *opposés* à des angles homologues.

196. — Nous avons rappelé au n° **20** le théorème « dit théorème de Thalès ». On déduit de ce théorème que deux triangles semblables *peuvent toujours être disposés* (*comme les triangles* ABC *et* ADE *sur la figure* 112) *de façon que deux de leurs côtés coïncident, les troisièmes côtés étant parallèles.* Il en résulte en particulier que *deux triangles semblables ont leurs angles homologues égaux chacun à chacun.*

En effet les triangles, étant supposés placés comme ABC et ADE

sur la figure 112, ont même angle A ; les angles ADE et ABC, d'autre part, sont égaux comme correspondants formés par des parallèles et de même les angles AED et A'E'D'. Réciproquement, *si deux triangles ont leurs angles égaux* [il suffit pour cela qu'ils aient deux angles égaux chacun à chacun, les troisièmes angles étant alors égaux d'après le n° **170**] *ces deux triangles sont semblables* (¹). En effet on démontre qu'ils peuvent être en ce cas disposés comme les triangles ADE et ABC de la figure 112.

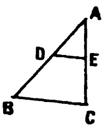


Fig. 112.

De la similitude des triangles, le géomètre passe facilement à celle des *polygones*. Un polygone, en effet, peut toujours être décomposé en triangles. Deux polygones seront, dès lors, dits semblables s'ils peuvent être décomposés en triangles semblables se correspondant deux à deux.

197. Figures semblables obtenues par projection ou perspective. — Pour obtenir des figures semblables *de formes quelconques* par un procédé régulier, on pourra opérer comme il suit : Donnons-nous deux plans parallèles que nous appellerons *plan* P et *plan* P′, et un point O hors de ces plans. A un point quelconque A du plan P, nous ferons correspondre le point A′ du plan P′ obtenu en menant la droite OA et la prolongeant jusqu'à sa rencontre avec le plan P′ [le point A′ est appelé *point homologue*, ou *image*, ou *projection de centre* O, du point A]. Opérant de même pour tous les points d'un segment du plan P, tel que AB ou CD, nous obtenons sur le

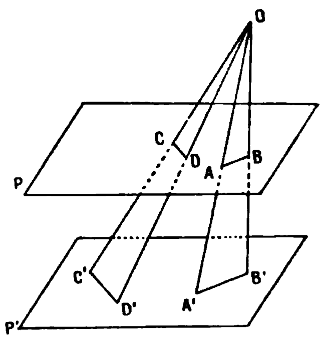


Fig. 113.

(¹) C'est là le « *premier cas de similitude* » des triangles. Le *second* et le *troisième cas de similitude* s'énoncent en ces termes : *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels.* — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs trois côtés proportionnels* [c'est la proposition que nous avons prise comme définition au début du présent numéro : si l'on adopte une autre définition (équivalente) de la similitude, cette proposition devient un théorème].

plan P', un segment [1] A'B' ou C'D' *image* (*homologue*) de AB ou CD. On démontre que deux figures correspondantes des plans P et P' formées de segments homologues sont des figures semblables. Nous avons ainsi un mode de construction de figures semblables [2] qui s'applique à des figures de toutes formes — car à une ligne brisée ou courbe quelconque du plan P correspond évidemment, point par point, suivant le procédé indiqué, une ligne « semblable » du plan P' — et qui se rattache immédiatement à la définition intuitive de la similitude qui nous a servi de point de départ au chapitre II, § *3*.

198. Remarque : divers modes de projection. — Le mode de projection que nous venons de définir est la *projection conique* [3] ou *centrale* appelée aussi *perspective* (de centre O). Il existe, nous le savons, d'autres sortes de projections.

La *projection orthogonale, en particulier*, ou *projection* tout court — d'une ligne sur un plan P est la figure formée par l'ensemble des projections orthogonales des points de cette ligne (voir n° **180**).

Plus généralement soit donnée une direction quelconque définie

[1] En effet, le théorème du n° 90 montre d'adord que tous les rapports $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OB'}{OB}$, $\frac{OC'}{OC}$, ... sont égaux entre eux, et, d'autre part, que les rapports $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{C'D'}{CD}$, ... sont égaux aux premiers.

[2] Les figures semblables ainsi obtenues sont dites figures *homothétiques* par rapport au centre O. D'une manière générale, soit O un point ou centre fixe, k un nombre positif rationnel ou non. On appelle point homothétique d'un point A par rapport au centre O dans le rapport k le point A' de la demi-droite OA (indéfiniment prolongée) qui est tel que l'on ait

$$\frac{\text{longueur OA}'}{\text{longueur OA}} = k.$$

On appelle figure homothétique d'une figure donnée la figure formée par les points homothétiques des points de la figure donnée. — Il résulte de cette définition que, si la figure proposée est tout entière située dans un plan contenant le centre O, la figure homothétique est également *plane* et située dans le même plan. On a alors affaire à une *homothétie dans le plan* [Exemple : Sur la figure 112 la droite DE est homothétique de BC].

[3] Voir *infra*, n° 239.

par une droite [1] (D) non parallèle au plan P. On appelle *projection* sur le plan P d'un point quelconque A *parallèlement à la direction* (D), le point de rencontre A' du plan P avec la parallèle à (D) menée par A. D'où un nouveau mode de projection d'une figure quelconque (fig. 114).

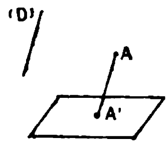


Fig. 114.

Le plan P sur lequel on projette est appelé dans tous les cas *plan de projection*.

199. Théorème de Pythagore et théorèmes connexes. — Soit ABC un triangle rectangle dont BC est l'hypoténuse (fig. 115) : *le carré de la longueur* BC *est égal à la somme des carrés des longueurs* AB *et* AC ; *autrement dit :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Ce théorème est communément appelé « théorème de Pythagore ». C'est après l'avoir démontré, — si l'on en croit la légende — que Pythagore, reconnaissant, aurait sacrifié un bœuf à Jupiter (voir p. 124, note 1).

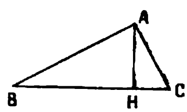


Fig. 115.

Le théorème de Pythagore peut être démontré de diverses manières. Si, conformément à la tradition ancienne [2], nous considérons le carré d'une longueur comme la surface d'un carré (**73**), la question reviendra à prouver [3] que les carrés numérotés 2 et 3 sur la figure 116 forment à eux deux une aire égale à celle du carré numéroté 1.

Nous suivrons ici, — pour établir le théorème de Pythagore et les théorèmes connexes, — une méthode plus simple [4] qui est fondée sur la théorie des proportions.

[1] On désigne souvent une droite ou une courbe par une lettre entre parenthèses afin d'indiquer clairement que cette lettre ne représente pas un point.

[2] La propriété qu'énonce le théorème de Pythagore fut certainement connue des arpenteurs égyptiens (dans des cas particuliers, tout au moins ; par exemple, lorsque l'hypoténuse est égale à 5, les cathètes à 3 et 4, voir p. 236, note 2) ; mais il est douteux qu'ils fussent capables de le démontrer.

[3] Cf. Euclide, liv. I, prop. 47. *Vide infra, Deux. liv.*, ch. III.

[4] Cf. Euclide, liv. VI, prop. 31.

Abaissons du sommet A de l'angle droit la hauteur relative à l'hypoténuse (fig. 115) et appelons H son pied. Le triangle HAC est semblable au grand triangle ABC; car il a même angle C, un angle (droit) H égal à l'angle A, un angle HAC qui est égal à l'angle B [puisqu'il est *complémentaire* (**54**) du même angle C]. Dans les deux triangles semblables, les côtés homologues sont ceux qui sont opposés aux angles égaux, et l'on a, par conséquent, en écrivant que ces côtés sont proportionnels :

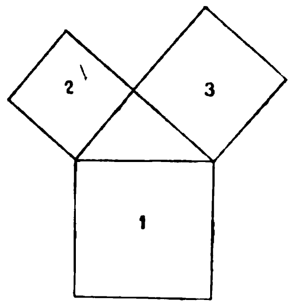


Fig. 116.

$$(1) \qquad \frac{AB}{AH} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CH}.$$

Les deux triangles ABC et HBA sont, pareillement semblables et nous donnent :

$$(2) \qquad \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH}.$$

Nous allons tirer de ces proportions plusieurs conséquences remarquables.

Egalant, dans les deux derniers rapports marqués (1) le produit des moyens au produit des extrêmes (cf. n° **99**), nous obtenons :

$$AC^2 = BC \times CH.$$

Opérant de même sur les rapports (2), nous avons :

$$AB^2 = BC \times BH.$$

Additionnant il vient :

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BH + BC \times HC = BC \times (BH + HC) = BC^2.$$

Le théorème de Pythagore est donc démontré [1].

[1] On peut démontrer que *réciproquement* si les trois côtés d'un triangle sont tels que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ce triangle est rectangle (l'angle A étant droit).

200. — Considérons maintenant le premier et le troisième rapport marqués (1). En égalant le produit des moyens au produit des extrêmes, nous avons :

$$AH \,.\, AC = AB \,.\, CH. \tag{3}$$

Opérant de même sur les rapports (2), nous obtenons :

$$AH \,.\, AB = AC \,.\, BH, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB}.$$

Multiplions membre à membre cette dernière égalité par l'égalité (3) ; il vient :

$$AH^2 = BH \,.\, CH,$$

résultat que l'on peut énoncer ainsi : *la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle* (voir n° **96**) *entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

Ce même théorème peut être présenté sous une autre forme. Considérons un cercle quelconque, un diamètre AB de ce cercle et la perpendiculaire MH abaissée d'un point quelconque du cercle sur ce diamètre (fig. 117) : la longueur MH est moyenne proportionnelle entre les deux segments HA et HB qu'elle détermine sur le diamètre : en effet, si l'on mène les droites AM et BM, le triangle AMB est rectangle [puisque son angle M a pour mesure une demi-circonférence (cf. n° **187**)] et MH en est la hauteur.

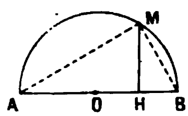


Fig. 117.

201. Calcul des côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle. — C'est en s'appuyant sur le théorème de Pythagore et les théorèmes connexes que les géomètres grecs ont déterminé la longueur des côtés des polygones réguliers inscrits dans un cercle (cf. n^{os} **65**, **190**) ou du moins de certains d'entre eux.

Soit donné un cercle dont le rayon a pour longueur R. On démontre que tout triangle équilatéral inscrit dans ce cercle a des côtés mesurant $\frac{R.\sqrt{3}}{2}$; que tout carré inscrit dans ce cercle a des côtés mesurant $\frac{R.\sqrt{2}}{2}$; que tout hexagone (polygone à 6 côtés) régulier inscrit a des côtés égaux au rayon R, etc.

202. Théorème relatif aux bissectrices d'un triangle. — Soit (fig. 118) un triangle ABC et AD la bissectrice relative à l'angle A. Je dis que *le rapport des côtés* AB *et* AC *est égal au rapport des segments déterminés par la bissectrice sur le troisième côté* [1]. En d'autre termes :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \qquad \text{ou, si l'on veut :} \qquad \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

Menons, en effet, par C la parallèle à AD et soit E l'intersection de cette parallèle avec BA prolongé. D'après les théorèmes du **n° 90** on a

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}.$$

Mais la longueur AE est égale à la longueur AC, car le triangle ACE est isoscèle [en effet l'angle ACE et l'angle CAD sont égaux comme alternes-internes formés par des parallèles, l'angle AEC et l'angle BAD sont égaux comme correspondants; or BAD = CAD puisque AD est bissectrice ; donc ACE = AEC, ce qui établit (n° **178**) que le triangle ACE est isoscèle]. Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré.

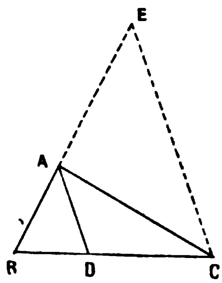


Fig. 118.

Nous parvenons à un théorème analogue si nous considérons, au lieu de la bissectrice AD. la bissectrice de l'angle CAB′ (fig. 119) qui est un *angle extérieur* du triangle ABC. Appelons D′ le point où cette « *bissectrice de l'angle extérieur* A » rencontre BC. On démontre que le rapport des segments D′B, D′C est, lui aussi, égal au rapport des côtés AB, AC. On a, en d'autres termes :

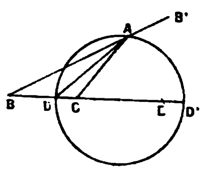


Fig. 119.

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}.$$

[1] Euclide, livre VI, propos. 3.

203. Division harmonique. — Les points B, C, D, D′ que nous avons considérés au *numéro* précédent (fig. 119) *divisent* le segment BC — c'est ainsi que s'expriment les géomètres — *dans le même rapport* $\left(\text{rapport } \frac{AB}{AC}\right)$ et forment une « *division harmonique* » sur la droite qui les joint ; ils sont dits « *conjugués harmoniques* » *par rapport aux points* B *et* C. Tout autre point E de BC ou de ses prolongements divise BC dans un autre rapport $\left(\text{le rapport } \frac{EB}{EC} \text{ ne peut être égal aux rapports égaux } \frac{DB}{DC}, \frac{D'B}{D'C}\right)$. Des deux points D et D′, l'un est toujours entre B et C, l'autre hors du segment BC, savoir du côté de C si le rapport donné est *plus grand* que 1 [c'est le cas de la fig. 119 : le rapport étant plus grand que 1, la distance D′B doit être supérieure à la distance D′C], du côté de B si ce rapport est plus petit que 1. — D'ailleurs il est clair que si l'on se donne le segment BC et l'*un* des deux points D, D′, l'autre est par là-même déterminé. Ainsi un point D′ est entièrement défini par la condition d'être *conjugué harmonique d'un point donné* D *par rapport à deux autres points donnés* B *et* C [1].

[1] D'ailleurs la proportion $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$ entraîne (voir n°s 96, 99) $\frac{CD}{CD'} = \frac{BD}{BD'}$, ce qui montre qu'aux termes de notre définition, les points B et C sont *conjugués harmoniques* par rapport aux points D et D′. Il est facile de vérifier que la longueur BC est au sens pythagoricien du mot (n° 20) *moyenne harmonique* entre les longueurs BD′ et BD. Je dis que les trois longueurs BD′ BD, BC satisfont à la relation

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{BD'} = \frac{2}{BC}$$

par laquelle on peut définir la moyenne harmonique (voir p. 24, note 2). En effet la proportion $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$ peut s'écrire $\frac{BD}{BC - BD} = \frac{BD'}{BD' - BC}$. Egalant le produit des moyens au produit des extrêmes, il vient BD . (BD′ — BC) = BD′ . (BC — BD), ou BD.BD′ — BD.BC = BD′.BC — BD′.BD. Ajoutant BD.BC + BD′.BD à chaque membre (ce qui ne détruit pas l'égalité), j'ai

$$2BD \,.\, BD' = BD' \,.\, BC + BD \,.\, BC;$$

divisant les deux membres par la même quantité BD . BD′ . BC, j'obtiens enfin

$$\frac{2BD \;\; BD'}{BD \,.\, BD' \,.\, BC} = \frac{BD' \,.\, BC}{BD \,.\, BD' \,.\, BC} + \frac{BD \,.\, BC}{BD \,.\, BD' \,.\, BC},$$

d'où on tire, en simplifiant les fractions, la relation écrite ci-dessus.

La qualification « *harmonique* » est empruntée au langage musical. Si la

204. — Je dis que la circonférence décrite sur DD′ comme diamètre jouit de cette propriété remarquable que *le rapport des distances de l'un quelconque de ses points aux points* B *et* C, *est égal aux rapports* $\frac{DB}{DC}$, $\frac{D'B}{D'C}$: d'où résulte que ce rapport est le même nombre pour tous les points de la circonférence.

En effet (fig. 119) le triangle ADD′ est rectangle puisque les deux bissectrices de l'angle BAC sont rectangulaires (p. 66, note 2). Donc (**187**) le point A est sur la circonférence de diamètre DD′. Réciproquement si nous joignons un point M — pris au hasard sur la circonférence — aux points D et D′, nous démontrons que les droites MD, MD′ sont respectivement bissectrice et bissectrice extérieure du triangle MBC.

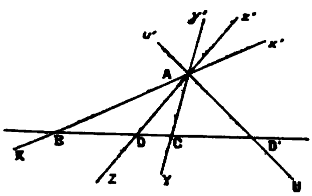


Fig. 119bis

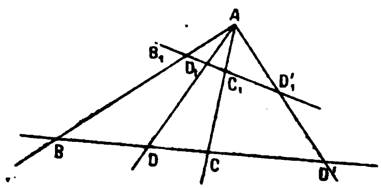


Fig. 120.

Il résulte également, du théorème du n° **202**, que si l'on considère deux droites indéfiniment prolongées $x'Ax$, $y'Ay$ et les deux bissectrices $z'Az$, $u'Au$ des angles qu'elles forment, une droite quelconque (Δ) les rencontre en quatre points qui forment une division harmonique. — On dit que les quatre droites $x'Ax$, $y'Ay$, $z'Az$, $u'Au$ forment un *faisceau harmonique* [1]. Dans ce faisceau les deux droites $z'Az$, $u'Au$ sont rectangulaires (forment un angle droit). On démontre [2] plus généralement que *si quatre droites* (*non rectangulaires*), *concourant en un point* A, *forment une* division harmonique sur une droite (BD′) les coupant, *elles forment des divisions harmoniques sur toutes les autres droites qui les coupent* (exemple : la droite $B_1D_1C_1D'_1$ sur la figure 120). En ce

tonique est donnée par une corde de longueur BD′ et la quinte par une corde de longueur BD, la tierce sera donnée par une corde de longueur BC.

[1] Ordonnance de droites, dit Desargues.

[2] La démonstration résulte immédiatement du théorème de Pappus appliqué à un rapport anharmonique égal à 1 (voir fin du n° 210).

cas, encore, on dit que les quatre droites issues de A forment un faisceau harmonique.

205. Pôles et polaires par rapport à un cercle. — A la notion de division harmonique se rattachent quelques-unes des propriétés les plus belles des courbes planes.

Si — dit Apollonius (1) — par le point de concours de deux tangentes à un cercle on tire une droite qui rencontre la courbe en deux points, et la corde qui joint les points de contact des deux tangentes en un troisième point, ce troisième point et le point de concours des deux tangentes seront conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers.

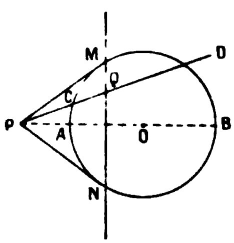


Fig. 121.

En d'autres termes (fig. 121) menons par un point extérieur à un cercle de centre O les deux tangentes PM, PN à ce cercle et une sécante arbitraire telle que PD qui coupe la circonférence aux points C et D et la droite MN au point Q. D'après le théorème d'Apollonius, les points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et D, quelle que soit la sécante considérée.

206. — Nous nous dispenserons de donner la démonstration de ce théorème qui sera établi plus loin par l'algèbre. Contentons-nous d'en généraliser l'énoncé et d'en indiquer quelques conséquences, qui furent le point de départ de la « *théorie des polaires* » (2). Cette féconde théorie, l'une des plus importantes de la géométrie, eut pour principal initiateur le mathématicien parisien *Philippe De la Hire* (3).

(1) Apollonius (IIIe siècle av. J.-C.), Κωνικά. livr. III, prop. 37 suiv., éd. Heiberg, p. 403 sqq. Apollonius démontre en réalité son théorème non seulement pour le cercle, mais pour une section conique (voir § 5) quelconque. — Cf. Heath. *Apollonius of Perga*. p. 106 suiv.

(2) Les propositions qui font l'objet de cette théorie valent pour une section conique quelconque (cf. note 1). Nous y reviendrons dans notre *Deux. Livr.*, chap. IV.

(3) *Sectiones conicae, in novem libros distributae*. Paris, 1688. Le premier livre, Ad sectiones conicas lemmaticus, contient la théorie de la division harmonique et des polaires relatives au cercle.

Remarquons d'abord que lorsque la sécante issue de P passe par le centre O et occupe la position PAB, elle est perpendiculaire sur la droite MN. Nous pouvons alors donner du théorème d'Apollonius l'énoncé suivant, qui est valable [1], non seulement quand le point P est extérieur au cercle (cas de la fig. 121) *mais aussi quand il est situé à l'intérieur* (cas de la fig. 122) :

Appelons AB le diamètre du cercle qui passe par le point donné P, R le conjugué harmonique du point P par rapport aux points A et B, TT′ la droite (indéfiniment prolongée) qui est menée par le point R perpendiculairement au diamètre AB (ou à son prolongement). Menons d'autre part, par le point P, une sécante *arbitraire* ; appelons C et D ses points de rencontre avec la circonférence, Q le point où elle coupe TT′ : *les points* P *et* Q *sont toujours conjugués harmoniques par rapport aux points* C *et* D.

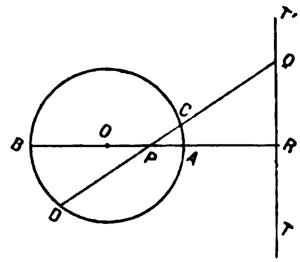


Fig. 122.

D'après une terminologie introduite au début du XIXe siècle la droite TT′ est dite « *polaire* » *du point* P ; le point P est dit « *pôle* » de la droite TT′.

Pour obtenir le pôle, quand la droite TT′ est donnée, il suffit de mener par le centre du cercle la perpendiculaire ABR sur TT′ et de déterminer le point P de cette droite qui est conjugué harmonique de R par rapport à A et à B.

207. — Je dis que *le pôle de toute droite passant par un point* P *est sur la polaire* TT′ *de ce point*. Soit, en effet, LL′ une droite quelconque menée par le point P (fig. 123) [la démonstration est la même si le point P est hors du cercle] et soit Q′ le pôle de LL′. D'après ce qui précède, le point Q′ est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points C et D où la droite PQ′ coupe le cercle. — D'autre part, le point de rencontre Q de la polaire TT′ du point P avec la droite PQ′ est aussi le point conjugué harmonique du

[1] Ceci résulte de la démonstration du théorème (*vide infra, Deux. liv.*, ch. IV).

point P par rapport à C et D ; donc les points Q et Q' coïncident. Par conséquent, le pôle de LL' est bien sur la polaire TT' de P.

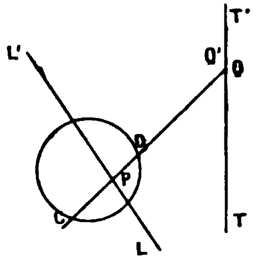


Fig. 123.

On démontre de même que, réciproquement, *la polaire de tout point de la droite* TT' *passe par le pôle* P *de cette droite.*

Il résulte de ces remarques que *si* 3, 4 ou 5, *etc. points sont sur une même droite, leurs polaires concourent* (*se rencontrent*) *en un même point* (qui est la polaire de la droite) ; *et réciproquement.*

208. — La proposition suivante, définit un procédé graphique simple (exigeant seulement l'emploi d'une règle) qui fournit la polaire d'un point donné quelconque.

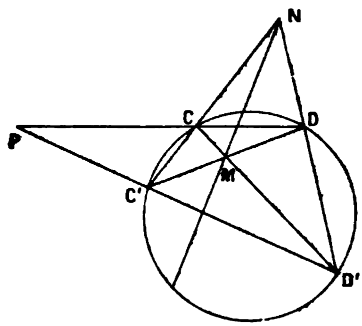


Fig. 124.

Si [1] *par un point* P *on mène à un cercle deux sécantes quelconques*, PCD, PC'D' *qui coupent le cercle aux points* C *et* D, C' *et* D', *le point de concours* M *des droites* CD', DC' *et le point de concours* N *des deux droites* CC', DD' *sont tous deux sur la polaire du point* P *par rapport au cercle.* (la figure 124 est faite dans l'hypothèse où le point P est à l'extérieur du cercle).

209. Relations entre segments déterminés par des droites qui se coupent. — Les propriétés si simples et remarquables des pôles et polaires devaient inciter les géomètres à étudier, dans

[1] En effet, soit Q le conjugué harmonique de P par rapport aux points C et D, Q' le conjugué de P par rapport aux points C'D'. Joignons P et Q à N ; les quatre droites NC, ND, NP, NQ forment un faisceau harmonique (fin du n° 204) ; donc elles forment une division harmonique sur la droite PC' D' ; donc NQ passe par le conjugé harmonique Q' de P par rapport à C' et D'. On démontre de même que la droite MQ passe par Q'. Donc les quatre points M, Q, N, Q' sont bien sur une même ligne droite.

des cas nouveaux, les relations numériques que l'on peut établir entre les segments déterminés par une droite ou sécante qui coupe une figure simple.

Considérons, par exemple, un triangle ABC et une droite (que l'on appellera *transversale*) qui coupe les trois côtés du triangle aux trois points a, b, c (fig. 125). Le géomètre et astronome alexandrin *Claude Ptolémée* (2e siècle ap. J.-C.) établit [1] la relation remarquable à laquelle satisfont les six segments aB, aC, bA, bC, cA, cB déterminés par la transversale sur les côtés du triangle. On a

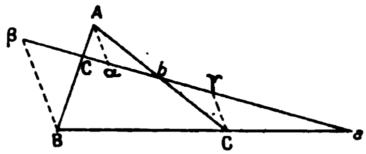


Fig. 125.

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1.$$

Pour démontrer ce théorème, menons par A, B, C trois parallèles à une même direction quelconque, et appelons α, β, γ leurs points de rencontre avec la transversale. La similitude des triangles $aB\beta$ et $aC\gamma$, $bA\alpha$ et $bC\gamma$, $cA\alpha$ et $cB\beta$ (voir théorème de Thalès, n° **90**) donne :

$$\frac{aB}{aC} = \frac{B\beta}{C\gamma}, \qquad \frac{bC}{bA} = \frac{C\gamma}{A\alpha}, \qquad \frac{cA}{cB} = \frac{A\alpha}{B\beta}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, j'obtiens :

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = \frac{B\beta \,.\, C\gamma \,.\, A\alpha}{C\gamma \,.\, A\alpha \,.\, B\beta} = 1.$$

La réciproque du théorème de Ptolémée (savoir que *si a, b, c sont, sur les trois côtés d'un triangle, trois points tels que* :

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1,$$

[1] La proposition énoncée par Ptolémée figure d'ailleurs explicitement dans les *Sphærica* (III, 1) de Menelas (voir *supra* p. 200, note 4) qui sont du 1er siècle. Nous considérons ici tous les segments comme des longueurs (nombres positifs). La géométrie moderne affecte ces longueurs des signes + ou — conformément à certaines conventions dont nous ne occuperons pas.

ces trois points sont en ligne droite) est appelée théorème de *Menelas* (ou *Menelaus*) [voir la note p. 215].

210. — Dans les *Collections mathématiques* (1) de Pappus d'Alexandrie (IVe siècle), nous trouvons une proposition dont l'importance a été soulignée par Chasles (2) : *Quand quatre droites d'un plan sont issues d'un même point, elles forment sur une droite transversale menée arbitrairement dans leur plan, quatre segments qui ont entre eux un certain rapport constant.*

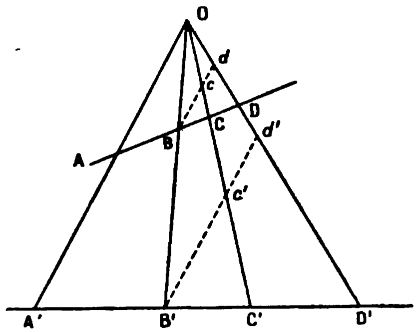


Fig. 126.

Ainsi, soient A, B, C, D les points où quatre droites sont rencontrées par une *transversale* quelconque (fig. 126), et AC, AD, BC, BD les quatre segments qu'ils déterminent : *le rapport* $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ *aura la même valeur quelle que soit la transversale* (3).

(1) En grec : Συναγωγή.
(2) Chasles, *Aperçu historique*, etc. 2e éd. 1875, p. 33.
(3) Considérons une seconde transversale qui coupe nos droites en A', B', C', D'. Menons par les points B, B' les parallèles Bcd, B'$c'd'$ à OA (voir fig. 126). Les triangles semblables COA, CBc et DOA, DBd donnent

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{cB} \quad \text{et} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{dB}.$$

Divisant membre à membre, j'obtiens :

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{cB} : \frac{OA}{dB} = \frac{dB}{cB}.$$

On démontrera de même que

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{d'B'}{c'B'};$$

Mais l'on a (*théorème de Thalès*) :

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{dB}{d'B'} = \frac{cB}{c'B'};$$

donc (interversion des moyens, 96) $\frac{dB}{cB} = \frac{d'B'}{c'B'}$; donc

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce rapport qui devait jouer un grand rôle dans la géométrie du XIXe siècle (*vide Deux. Livr.*, ch. IV) porte aujourd'hui le nom *rapport anharmonique* des quatre points a, b, c, d. Il est déjà sous une forme plus ou moins explicite, à la base des travaux de Girard Desargues (*vide infra*, p. 244, note 1) et de Blaise Pascal ; ces géomètres font graviter autour des propriétés des *transversales* une foule de propositions exprimant des propriétés métriques ou qualitatives des figures composées de droites, ou de droites et de cercles, ou, plus généralement, de droites et de sections coniques [*vide infra*, § **5**].

Dans le cas particulier où le rapport anharmonique est égal à 1. on a $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$. Les points C et D sont donc conjugués harmonique par rapport à A et B, et il résulte du théorème de Pappus que les quatre droites forment de même une division harmonique sur toutes les transversales. Les quatre droites constituent alors un *faisceau harmonique* (n° **204**).

221. Hexagone de Pappus. — Parmi les corollaires tirée par Pappus lui-même du théorème que nous avons énoncé nous signalerons la suivante (Συναγωγή, liv. II, prop. 139). *Quand un hexagone* [1] *a ses six sommets placés trois à trois sur deux droites, les trois points de concours de ses côtés opposés sont en ligne droite* (c'est-à-dire : sur une même droite).

212. Hexagone de Pascal. — C'est un résultat de même ordre, mais plus riche de conséquences, qu'apporte Blaise Pascal dans le fameux placard, *Essay pour les coniques*, qu'il fit imprimer en 1640, à l'âge de seize ans [2]. Il démontre que *quand un hexa-*

[1] polygone à 6 côtés ; il s'agit ici d'un hexagone quelconque, non d'un hexagone régulier.

[2] Ce placard, si suggestif et plein de promesses, ne pouvait manquer d'attirer l'attention, venant d'un si jeune homme. Descartes jugea que l'auteur avait « appris de M. Desargues ». C'était la vérité, mais le mérite de Pascal n'en est pas moins grand. « Je crois, — remarque fort justement Leibniz, — que M. Desargues a eu raison de dire que le jeune Pascal, âgé de 16 ans lorsqu'il fit son traité des coniques avait profité des pensées de M. Desargues ; il me semble que Pascal l'a reconnu lui-même. Cependant il faut avouer qu'il avait poussé les choses plus loin ». Ajoutons que Desargues, dont le génie créateur ne devait être reconnu que longtemps après sa mort, s'exprimait dans une langue étrange et peu

gone est inscrit dans un cercle [c'est-à-dire a ses six sommets sur une même circonférence] *les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.*

Ainsi, sur la fig. 127, les points de concours des côtés AB et ED, BC et FE, CD et AF de l'hexagone ABCDEF sont trois points L, M, N situés sur une même droite.

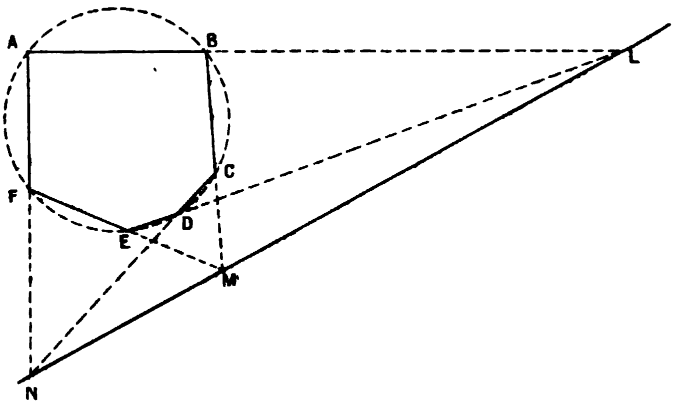


Fig. 127.

Pascal savait que le même théorème reste vrai si l'hexagone, au lieu d'être inscrit dans un cercle, est inscrit dans (²) une section conique (cf. *supra*, p. 212, note 1) quelconque. Il se proposait d'établir complètement cette proposition, — qui est de nature purement qualitative — et d'en déduire une théorie générale des sections coniques ; mais le grand traité qu'il préparait ne vit jamais le jour (³).

intelligible. Pascal se distingue au contraire par la clarté et la netteté de ses vues et de son exposé. *Voir*, sur Desargues, *infra*, p. 244, note 1.

Le théorème fondamental de Pascal est énoncé en ces termes dans l'*Essay pour les coniques* (*Œuv. de Pascal*, t. I, p. 233) : « Si dans le plan MSQ, du point M partent les deux droites MK, MV ; et du point S partent les deux droites SK, SV ; et que K soit le concours des droites MK, SK et V le concours des droites MV, SV, et A le concours des droites MA, SA, et μ le concours des droites MV, SK ; et que par deux des quatre points A, K, μ, V, qui ne soient pas en même droite avec les points M, S, comme par les points K, V, passe par la circonférence d'un cercle coupant les droites MV, MP, SV, SK ès point O, P, Q, N : je dis que les droites MS, NO, PQ sont de même ordre (*c'est-à-dire* : concourantes) ».

(²) *c'est-à-dire* : a ses six sommets sur le contour de

(³) Cf. *Œuv. de Pascal*. t. II, p. 225, sqq.

Dans l'*Essay pour les coniques* de 1640, cependant, Pascal énonce déjà plusieurs conséquences remarquables qu'il a déduites de son théoreme, entre autres le théorème de Ptolémée (n° 209) et une proposition équivalant au théorème suivant, qui est resté connu sous le nom de théorème de Desargues [1] :

Un cercle quelconque, les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère inscrit dans ce cercle déterminent sur une transversale quelconque 6 *points* M *et* M′, P *et* P′, Q *et* Q′ (voir fig. 128) *tels que les rapports anharmoniques des points* M, M′, P, Q, *d'une part et* M′, M, P′, Q′ *d'autre part, soient égaux* ; *autrement dit* :

$$\frac{PM}{PM'} : \frac{QM}{QM'} = \frac{P'M'}{P'M} : \frac{Q'M'}{Q'M}. \tag{4}$$

On exprime cette propriété en disant que les trois couples de points M et M′, Q et Q′, P et P′ sont en *involution* [2].

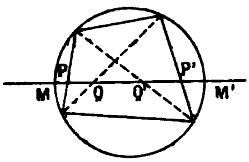


Fig. 128.

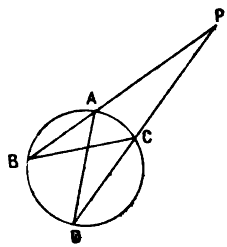


Fig. 129.

213. Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Soit donné un cercle quelconque et un point P dans le plan de ce cercle. Menons par le point P deux sécantes *quelconques* (fig. 129) qui coupent respectivement le cercle en A et B et en C et D. Je dis que l'on a l'égalité

$$PA \,.\, PB = PC \,.\, PD. \tag{5}$$

[1] « Propriété, dit PASCAL, dont le premier inventeur est M. Desargues, lyonnais, un des grands esprits de ce temps et des plus versés aux mathématiques » (cf. *Œuv. de Desargues*, éd. Poudra, t. II, p. 267) Le théorème reste vrai, ici encore, si l'on remplace le cercle par une section conique quelconque.

[2] D'une manière générale, supposons donnés deux couples de points P, P′ et Q, Q′ sur une même droite (Δ). On démontre que, si l'on désigne

Supposons, par exemple, que le point P soit extérieur au cercle et menons les droites AD et BC. Les triangles PAD et PCB sont semblables puisqu'ils ont même angle P, et que l'angle D égal l'angle B (ces angles ont même mesure d'après le n° **187**). On en déduit, en égalant les rapports des côtés homologues :

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

proportion équivalant à l'égalité (5).

Ainsi le produit PA . PB est une grandeur qui reste la même quelle que soit la sécante PAB (pourvu que le point P et le cercle ne changent pas). Cette grandeur, indépendante de la position de la sécante, est appelée *puissance* [1] *du point* P *par rapport au cercle* (nous le désignerons par p). Lorsque la sécante, tournant autour du point P, devient tangente au cercle, les deux points d'intersection A, B de la sécante et du cercle viennent se confondre en M ou en N ; d'ailleurs on a toujours PA . PB $= p$ et, par conséquent, pour la position-limite de la sécante, $PM^2 = p$. Donc la puissance du point P est égale au carré de la tangente PM ou PN (PM est égal à PN). Joignons, d'autre part, le centre O du cercle aux points P et M (fig. 130) :

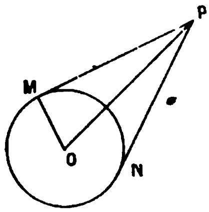


Fig. 130.

par M un point quelconque de la droite (Δ) il existe sur cette droite un point M' et un seul tel que l'on ait la relation (4),

$$\frac{PM}{PM'} : \frac{QM}{QM'} = \frac{P'M'}{P'M} : \frac{Q'M'}{Q'M}.$$

Cette relation définit donc une correspondance de point à point, laquelle est appelée *involution* : à un point quelconque M de (Δ) elle fait correspondre un autre point M' de la même droite. D'ailleurs cette correspondance est *réciproque* ; si l'on remplace M par M', on obtient comme correspondant de M' le point M, car, d'après les règles du calcul des fractions, l'égalité (4) entraîne comme conséquence l'égalité

$$\frac{PM'}{PM} : \frac{QM'}{QM} = \frac{P'M}{P'M'} : \frac{Q'M}{Q'M'}.$$

On a d'ailleurs le théorème suivant : Soit sur une droite (Δ) un ensemble de paires de points dont chacune forme avec une *même* paire de points O_1, O_2 de la droite (Δ) une division harmonique : ces paires de points sont en involution.

[1] L'expression est moderne, mais la propriété était connue d'ARCHYTAS DE TARENTE.

nous voyons que $OP^2 = OM^2 + PM^2$ (puisque le triangle MOP est rectangle). Donc la puissance (p ou PM^2) du point P *égale le carré* OP^2 *de la distance de* P *au centre du cercle moins le carré* OM^2 *du rayon.*

On démontre pareillement que, lorsque le point P est intérieur au cercle, le produit PA . PB (puissance du point P par rapport au cercle) reste invariable lorsque la sécante APB tourne autour du point B ; *ce produit est égal au carré du rayon moins le carré de la distance de* P *au centre du cercle.*

214. Figures inverses. — Bornons-nous à définir ces figures. Donnons-nous un point O (centre d'inversion) et un nombre k positif ou négatif ; puis considérons un point quelconque M du plan ; à ce point M nous ferons correspondre un point M' ainsi défini (fig. 131) : 1° le point M' est sur la droite OM ou son prolongement, savoir de même côté de O que M si $k > 0$, de l'autre côté si $k < 0$; 2° le produit des longueurs OM, OM' est égal à la valeur absolue de k ; donc la distance OM' est égale à $\frac{|k|}{OM}$ [1].

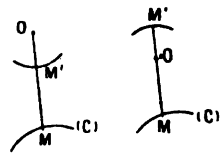


Fig. 131.

Aux termes de cette définition (si O et k sont donnés) il correspond à tout point M du plan un point M' et un seul. Cela posé, considérons la figure formée par l'ensemble des points M' correspondants à tous les points M d'une courbe ou ligne quelconque (C) : cette figure est appelée *figure inverse* de la ligne (C) ou *figure transformée de la ligne* (C) *par rayons vecteurs réciproques* [2]. Il résulte immédiatement de notre définition que si (C_1) est la figure inverse de (C), (C) est réciproquement la figure inverse de (C_1).

On démontre que la figure inverse d'une circonférence qui ne passe pas par le centre d'inversion O est un cercle. En particulier, au n° **213** le cercle de la figure est sa propre figure inverse par rapport au *centre d'inversion* P si l'on prend pour valeur de k le nombre positif $OP^2 - OM^2$.

[1] Nous désignons par $|k|$ la valeur absolue du nombre k.

[2] D'où le nom « rayons vecteurs réciproques ». On appelle *rayon vecteur* une droite telle que OM qui joint un point (ou centre fixe O) à un point variable : ainsi, dans la théorie de la lumière (à laquelle est empruntée l'expression *vecteur*) un rayon lumineux.

On démontre que la figure inverse d'une droite qui ne passe pas par le centre d'inversion O est un cercle qui passe par le centre d'inversion.

215. Relations trigonométriques entre les éléments d'un triangle rectangle. — Nous avons défini au n° **152** certaines longueurs remarquables (grandeurs trigonométriques) que l'on peut associer à un angle quelconque et que nous avons appelées *sinus*, *cosinus*, *tangente*,.., Entre les longueurs des côtés d'un triangle et les grandeurs trigonométriques relatives à ses angles, il y a des relations métriques qui sont fort souvent utilisées dans les calculs pratiques (astronomie, géodésie, arpentage) et qui jouent également un rôle important dans l'algèbre théorique.

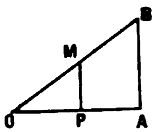


Fig. 132.

Considérons (fig. 132) le triangle rectangle AOB dont l'angle A est droit. Portons sur OB une longueur OM égale à l'unité de longueur [sur la figure, cette longueur est inférieure à OB ; il n'y aurait rien à changer à nos raisonnements si le point M tombait sur le prolongement de OB] et menons MP parallèle à BA. Par définition, la longueur du segment OP est le *cosinus* (positif) de l'angle O, la longueur PM en est le *sinus* (positif) [le cosinus et le sinus sont positifs, *vide* n° **156**, puisque l'angle O est aigu]. D'ailleurs les deux triangles OAB, OPM sont semblables, et l'on a :

$$\frac{OB}{OM} = \frac{AB}{PM} = \frac{OA}{OP} \quad \text{ou} \quad \frac{OB}{1} = \frac{AB}{\sin O} = \frac{OA}{\cos O},$$

d'où l'on tire :

$$AB = OB \, . \sin O; \quad OA = OB \, . \cos O; \quad \frac{AB}{OA} = \frac{\sin O}{\cos O} = \text{tang. } O.$$

D'ailleurs, puisque l'angle A est droit, les angles O et B du triangle rectangle sont complémentaires (n° **170**). Donc (n° **162**)

$$\sin O = \cos B, \qquad \cos O = \sin B.$$

Nous avons donc :

$$AB = OB \, . \cos B = OB \, . \sin O = OA \, . \text{tg } O,$$

résultats que nous énoncerons en ces termes :

Un côté de l'angle droit (cathète) d'un triangle rectangle quelconque est égal au produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'hypoténuse ou par le sinus de l'angle complémentaire ; il est aussi égal au produit de l'autre côté de l'angle droit par la tangente de l'angle opposé (à lui-même).

216. Démonstration de la formule donnant cos $(a + b)$. — Nous avons annoncé au n° **163** une démonstration de la formule qui fait connaître le cosinus d'une somme, cos $(a + b)$. Nous allons exposer ici cette démonstration ([2]) en nous plaçant dans l'hypothèse où les abscisses curvilignes a et b sont telles que $o < a < \frac{\pi}{2}$ et $o < a + b < \frac{\pi}{2}$ (fig. 133, où a désigne la mesure de l'angle MOA et b la meure de l'angle NOM). Appelant P la projection de N sur OA, Q celle de N sur OM, R et S les projections de Q sur OA et sur la parallèle à OA menée par le point N, nous voyons que l'on a (puisque le cercle trigonométrique a un *rayon*, ON, *égal* à 1) :

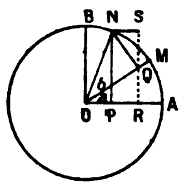


Fig. 133.

dans le triangle rectangle OQN,

$$OQ = ON.\cos b = \cos b,$$

et

$$NQ = ON.\sin b = \sin b$$
$$OP = \cos (a + b) \text{ par définition ;}$$

dans le triangle rectangle ROQ,

$$OR = OQ \, . \cos a \, ;$$

d'ailleurs l'angle NQS est égal à l'angle MOA — ou a — comme ayant ses côtés perpendiculaires à ceux de cet angle (**169**) ;

donc dans le triangle rectangle SNQ,

$$NS = QN.\sin SQN = ON.\sin a.$$

Cela posé,

$$OP = OR - PR = OR - NS \, ;$$

([1]) Dans cet énoncé nous écrivons, pour abréger, « côté » au lieu de « longueur d'*un côté* ». Le même énoncé s'applique aux deux côtés de l'angle droit.

([2]) Voir aussi *Deuxième Liv.*, chap. IV, § 9.

donc

$$\cos(a+b) = OQ \cdot \cos a - QN . \sin a = \cos b \cdot \cos a - \sin b \cdot \sin a.$$

La même méthode de démonstration permettra d'établir que quelles que soient les valeurs des abscisses curvilignes a et b (voir **163**) on a toujours la même égalité

$$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b,$$

les cosinus et sinus étant, dans cette égalité, positifs ou négatifs suivant les valeurs de a, b et $(a+b)$. On démontrera d'une manière analogue la formule qui donne l'expression de $\sin(a+b)$.

277. Relations entre les éléments d'un triangle quelconque. — Soit ABC un triangle non rectangle dont nous supposerons d'abord les angles A et C aigus (¹) (fig. 134). Menons la hauteur BH. On a, dans le triangle rectangle CBH

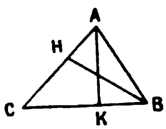


Fig. 134.

(6) $$BC^2 = BH^2 + CH^2,$$

dans le triangle rectangle ABH

$$BH^2 = AB^2 - AH^2;$$

d'autre part, CH est égal à la différence des longueurs AC et AH, et l'on a :

$$CH^2 = (AC - AH) \times (AC - AH) = AC^2 + AH^2 - 2AC \times AH.$$

Nous conclurons de ces égalités que

(7) $$BC^2 = AB^2 - AH^2 + AC^2 + AH^2 - 2AC \times AH = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AH$$

Remarquant ensuite que, dans le triangle rectangle HAB, on a $AH = AB . \cos A$, nous pouvons remplacer l'égalité par la suivante :

(8) $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

218. — Pour parvenir à ce résultat, nous avons supposé les angles A et C aigus. — Supposons maintenant que l'un de ces angles soit obtus, et d'abord l'angle C : la démonstration se fait

(¹) L'angle B est supposé aigu sur la figure 134; mais la démonstration serait la même si cet angle était obtus. Un seul angle peut être obtus puisque la somme des angles du triangle ne peut dépasser deux angles droits.

alors sur la figure 135 ; nous avons, cette fois, $CH = AH - AC$ (au lieu de $CH = AC - AH$), mais nous tirons encore de là

$$CH^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC \times AH,$$

et nous obtenons comme tout à l'heure l'égalité (7) que nous pouvons transformer en l'égalité équivalente (8). Soit enfin l'angle A obtus ; la démonstration se fait alors sur la figure 136 ; nous avons cette fois,

$$CH = AH + HC,$$

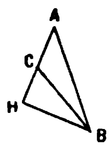


Fig. 135.

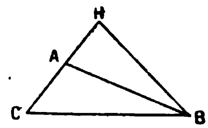


Fig. 136.

d'où nous tirons

$$CH^2 = (AH + AC) \times (AH + AC) = AH^2 + AC^2 + 2AC \times AH.$$

Portant cette valeur dans l'égalité (6) [où BH^2 est remplacé par $AB^2 - AH^2$], nous obtenons

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC.AH. \tag{9}$$

D'ailleurs le triangle ABH nous donne $AH = AB \,.\, \cos BAH$, et nous savons que le cosinus de BAH est égal au cosinus négatif (¹) de l'angle A du triangle ABC (angle obtus supplémentaire de BAH). Nous en concluons que l'égalité (8) a bien encore lieu.

Si au lieu de partir du côté BC du triangle ABC, nous considérons le côté AB ou le côté AC, nous obtiendrons évidemment une égalité ou *relation* semblable.

219. — *Les trois côtés d'un triangle quelconque sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Les triangles rectangles ABH, BHC nous donnent immédiatement, quel que soit celui des trois cas de figure auquel nous avons affaire :

$$BH = AB \,.\, \sin A \qquad \text{et} \qquad BH = BC \,.\, \sin C$$

(¹) *Vide* n° 156.

d'où résulte

$$AB \cdot \sin A = BC \cdot \sin C \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}.$$

Raisonnant semblablement sur la hauteur relative au sommet C, nous obtiendrons

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B};$$

donc [1]

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}. \quad (10)$$

220. — Soit maintenant AK la hauteur issue de A (voir fig. 134 où les angles A, B, C sont *aigus*). Les triangles rectangles KAB, KAC nous donnent

$$BK = AB \cdot \cos B, \qquad KC = AC \cdot \cos C;$$

d'où

$$BC = BK + KC = AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C.$$

On établira facilement la même égalité dans l'hypothèse où le triangle a un angle *obtus*.

Les côtés AB et AC du triangle donnent lieu chacun à une relation analogue.

221. Résumé des formules relatives aux triangles. — Désignons, pour simplifier l'écriture, par a, b, c les longueurs des côtés BC, AC, AB du triangle, respectivement *opposés* aux angles A, B, C.

Entre les 6 éléments a, b, c, A, B, C, nous avons les relations suivantes :

I. angle A + angle B + angle C = 2 angles droits (n° **170**)

II. $$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$ (n°s **217-8**)

III. $$\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ (n° **219**)

IV. $$\begin{cases} a = c \cos B + b \cos C \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = b \cos A + a \cos B \end{cases}$$ (n° **220**)

[1] On démontre que la valeur commune des trois rapports est la longueur du diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC (voir 190).

4. — *L'édifice géométrique et la démonstration*

222. — Nous avons dit (**166**) que, pour un entendement parfait et dont la puissance de compréhension serait infinie, la science ne se déroulerait pas, comme pour nous, en une longue file de théorèmes. Du point de vue de la raison, à qui le temps est indifférent, il n'est point vrai qu'une proposition en précède ou en justifie une autre ; toutes sont également primitives et évidentes par elles-mêmes. Mais la science humaine, imparfaite par nature, ne peut saisir que l'une après l'autre, et au prix de longs et laborieux détours, les propriétés des figures géométriques ; « on rapporte, écrit Proclus (¹), que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas pour la géométrie de route plus courte que celle des *Eléments* ; il eut cette réponse : Il n'y a pas en géométrie de chemin fait pour les rois ».

Le chemin frayé par les géomètres grecs, quelque roturier qu'il soit, n'en est pas moins une des plus belles créations de l'humanité.

Les Grecs ont eu de bonne heure le goût de la dialectique. Fortifié par les sophistes, ce goût se répandit chez les géomètres de l'Académie, contemporains ou continuateurs de Platon. Les diverses formes de raisonnements mathématiques furent subtilement distinguées, classées, disséquées, et d'interminables discussions s'engagèrent sur des questions de méthode ou de terminologie.

223. Théorèmes et problèmes. — « Déjà (²) parmi les anciens, dit Proclus, les uns, comme Speusippe et Amphinome, proposaient de tout appeler *théorème*, pensant que ce terme convient mieux que celui de problème aux sciences théorétiques (contemplatives) et surtout traitant des choses éternelles ; car, pour de telles choses, il n'y a pas de génération ; il n'y a donc pas de place pour le problème où il s'agit d'engendrer et de faire quelque chose comme si elle n'était pas auparavant : par exemple, construire un triangle équilatéral, décrire un carré sur une droite

(¹) Cf. P. TANNERY, *La géométrie grecque*, p. 69.
(²) Voir P. TANNERY, *loc. cit.*, p. 137. SPEUSIPPE était neveu de Platon. AMPHINOME n'est en tout cas pas antérieur à Aristote.

donnée... D'autres, au contraire, comme les mathématiciens de l'école de Ménechme, étaient d'avis de tout regarder comme des *problèmes*, tout en en distinguant deux formes : tantôt, en effet, il s'agit de fournir (πορίσασθαι) quelque chose de cherché, tantôt, au contraire, prenant quelque chose de déterminé, de voir ce que c'est, ou quelle en est la nature, ou ce qui lui arrive, ou quelle est sa relation à autre chose ». La discussion se poursuit pendant des siècles. Geminus (1er siècle av. J.-C.) soutient que le théorème est plus général que le problème. Au contraire, « Carpos [1] le mécanicien, dans son *Traité astrologique*,... dit que le genre des problèmes précède dans l'ordre celui des théorèmes, car c'est par les premiers que l'on trouve les sujets auxquels se rapportent les propriétés à étudier. L'énoncé du problème est simple et n'a pas besoin d'une intelligence exercée : ... construire un triangle équilatéral, ou bien, étant donné deux droites, retrancher de la plus grande une égale à la moindre; là, rien d'obscur, aucun besoin d'une attention minutieuse. L'énoncé du théorème est au contraire pénible; il réclame une grande exactitude et une critique savante, pour n'être ni trop étendu, ni insuffisant par rapport à la vérité ». Proclus défend, quant à lui, l'opinion de Geminus, et il conclut : « Il est donc frivole d'attaquer Geminus comme ayant dit que le théorème est plus parfait que le problème; car si c'est d'après l'ordre que Carpos donne la prééminence aux problèmes, c'est d'après le degré de perfection que Geminus l'accorde aux théorèmes ».

224. — Ces discussions ne sont pas aussi oiseuses qu'elles paraissent au premier abord. Elles ont permis de dégager les caractères auxquels se reconnaît la légitimité d'une définition ou la rigueur d'une démonstration, et si l'analyse de ces caractères est superflue dans les premiers chapitres de la science, où nous sommes guidés par le bon sens, il n'en est pas de même dans la suite.

Ainsi, en analysant la signification des problèmes, nous apprenons que toute définition doit être complétée par une discussion (problème) établissant l'*existence* de la chose définie (voir § *5*). Si, par exemple, je proposais d'appeler triangle birectangle un triangle dont deux angles sont droits, je donnerais une définition purement

[1] Fragment de Proclus, *apud.* P. Tannery, *loc. cit.*, p. 146.

verbale et sans valeur : en effet le problème « construire un triangle dont deux angles sont droits » n'a pas de solution, puisque la somme des *trois angles* du triangle ne peut être supérieure à deux droits.

Dans l'étude des théorèmes également (propositions énonçant les propriétés dont jouissent les figures géométriques), les problèmes jouent souvent un rôle capital. Supposons, par exemple, que nous énoncions le théorème suivant : *Tout angle inscrit dans un demi-cercle* [1] *est un angle droit*; cet énoncé ne sera satisfaisant que si, d'une part, il est exact en toutes circonstances et si d'autre part, il ne contient aucune restriction superflue [2], c'est-à-dire si la condition imposée à l'angle (d'être inscrit dans un demi-cercle) est bien une condition *nécessaire* de sa rectitude. Or, pour s'assurer qu'il en est bien ainsi, le procédé le plus sûr sera de résoudre le problème suivant : *inscrire dans un cercle de rayon donné quelconque un angle de grandeur donnée*; on constatera alors que l'arc compris entre les côtés de l'angle inscrit est inférieur, supérieur, ou égal à un demi-cercle suivant que cet angle est lui-même inférieur, supérieur ou égal à un angle droit (cf. **187**) ; et l'on conclura de là que le théorème donné plus haut est correctement énoncé.

225. Traitement d'un problème. — Ainsi l'étude complète d'une question de géométrie sera ramenée en général à l'étude d'un problème : étant *données* certaines figures, construire une nouvelle figure remplissant telles ou telles conditions déterminées. C'est ce que nous voyons nettement dans les *Eléments* d'Euclide (voir *supra*, p. 183, note 2 et *infra*, n° **228**).

Le traitement d'un problème comprend huit phases ou parties :

1° La *protase* (πρότασις) ou énoncé ;

2° L'*ecthèse* (ἔκθεσις) ou répétition de l'énoncé rapporté cette fois au tracé d'un schéma dont les différentes parties (points, droites, etc.) sont en général désignées par des lettres ;

3° L'*apagoge* (ἀπαγωγή), qui transforme le problème proposé en un autre problème plus simple : elle suppose, pour cela, le pro-

(1) c'est-à-dire comprenant entre ses côtés une demi-circonférence.

(2) Je me garderai par exemple d'énoncer comme un théorème la proposition suivante : *La somme des angles d'un triangle rectangle est égale à deux angles droits.* En effet l'égalité énoncée a lieu lors même que le triangle n'est pas rectangle.

blème résolu et, en s'appuyant sur des propositions connues, elle montre que les conditions requises (pour la construction de la figure inconnue) seront sûrement satisfaites si telles autres conditions (plus simples) le sont ;

4° La *résolution* (ἀνάλυσις) est la confrontation (1) des conditions requises avec celles qui sont données avec les (conditions auxquelles satisfont les *données*).

5° S'il y a équivalence entre ces conditions, le problème est résolu. Mais il se peut que l'équivalence ait lieu seulement lorsqu'on ajoute aux données quelques conditions restrictives supplémentaires. Nous reviendrons donc à la protase et la compléterons par le *diorisme* (διορισμός), énoncé des restrictions moyennant lesquelles le problème est possible ; cet énoncé formule des propriétés appartenant aux figures que l'on considère ; c'est donc un *théorème*.

Ces étapes franchies, il n'y a plus maintenant qu'à vérifier que, par l'intermédiaire de l'apagoge, on peut effectivement, à partir des figures *données* par la protase et le diorisme, construire la figure demandée. La vérification comprend les parties suivantes :

6° La *construction* (κατασκευή) qui complète l'ecthèse en traçant, ou du moins indiquant, les diverses lignes qu'il est nécessaire de considérer pour faire la démonstration ;

7° La *démonstration proprement dite* (ἀπόδειξις), qui déduit de la construction la figure demandée ;

8° La *conclusion* (συμπέρασμα), qui affirme que cette figure satisfait bien aux conditions requises.

226. — Eclairons cette théorie par un exemple.

Soit (*protase*) à construire un triangle isoscèle étant *données* la longueur de la base et la grandeur d'un angle adjacent à la base.

Il s'agit en d'autres termes (*ecthèse*) de construire un triangle isoscèle tel que ABC où le côté BC et l'angle B aient respectivement pour grandeurs celles du segment B'C' et de l'angle O représentés sur la figure 137.

Apagoge : Si ABC est le triangle demandé, l'angle ABC est égal à l'angle ACB (puisque le triangle est isoscèle) ; donc les angles B et C sont tous deux égaux à O, BC étant d'ailleurs égal à B'C'.

(1) Tel est du moins le sens donné du mot ἀνάλυσις par les géomètres Platon l'entendait autrement.

Donc (*résolution*), si l'on peut construire un triangle satisfaisant aux conditions requises, ce triangle sera formé par une base BC et deux demi-droites BX, CY situées du même côté de BC et *faisant* chacune avec BC un angle égal à O (fig. 137).

Un tel triangle n'existe effectivement que si les droites BX et CY se coupent; pour qu'il en soit ainsi il faut, manifestement, et il suffit (*diorisme*) que *les angles égaux* XBC *et* YCB *soient aigus*. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant: *Dans un triangle isoscèle, les angles adjacents à la base sont aigus.*

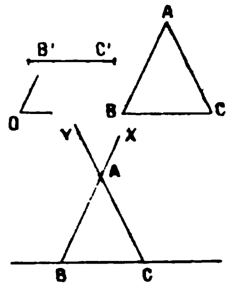


Fig 137.

Cela posé, nous pouvons construire le triangle ABC. Prenons (*construction*) un segment BC égal à B'C', et, à partir des points B et C menons, d'un même côté de BC, des droites BX et CY faisant avec BC des angles égaux à l'*angle aigu* O. Ces droites (*démonstration*) se coupent, et forment par conséquent, avec BC, un triangle ABC.

Ce triangle satisfait bien aux conditions requises (*conclusion*).

227. Analyse et synthèse. — Parmi les phases du raisonnement énumérées ci-dessus, la troisième et la quatrième (ἀπαγωγή et ἀνάλυσις) constituent l'*analyse*, la sixième et la septième (κατασκευή et ἀπόδειξις) constituent la *synthèse*. Il se peut que la synthèse ne fasse que répéter l'analyse en renversant l'ordre de l'exposition. En ce cas on a le droit (sans diminuer en rien la rigueur de la déduction) de se borner, soit à l'analyse, soit à la synthèse. Il se peut au contraire qu'analyse et synthèse soient toutes deux nécessaires, l'analyse donnant des solutions qui satisferaient aux conditions requises *si elles existaient*, mais qui peut-être n'existent pas, la synthèse, d'autre part, fournissant des solutions toujours possibles, mais ne donnant peut-être pas toutes celles que comporte le problème [1].

Un raisonnement qui se réduit à l'analyse ou à la synthèse est

[1] On sait, qu'en effet, un problème peut admettre plusieurs solutions différentes. Soit par exemple à construire un triangle dont on connaît deux côtés et un angle (non compris entre ces côtés) : nous avons vu au n° 173 que ce problème a 2 solutions.

appelé *raisonnement analytique* ou *raisonnement synthétique*. Le raisonnement analytique part du résultat à démontrer (c'est-à-dire suppose le problème résolu) ; le raisonnement synthétique (qui est la *démonstration* sous sa forme normale) part, au contraire, des données, pour aboutir au résultat requis.

Ainsi, parmi les huit parties dont se compose un raisonnement complet, toutes ne sont pas toujours explicitement formulées. La marche du raisonnement varie suivant la nature des problèmes et des théorèmes (la démonstration d'un théorème comprenant d'ordinaire moins de parties que la solution d'un problème). D'ailleurs l'apagoge et la construction se présentent, suivant les cas, sous des aspects très divers. D'où un grand nombre de types de déductions que le logicien s'applique à définir. C'est ainsi que Viète distingue entre l'*analyse zététique* qui fournit la solution d'un problème et l'*analyse poristique* qui fournit, non pas la solution, mais la démonstration d'une solution. Il y a lieu également de distinguer entre l'analyse directe et l'analyse indirecte telle qu'elle est pratiquée dans la *démonstration par l'absurde* : au lieu de supposer le problème résolu, imaginons au contraire que les conditions requises par l'énoncé ne soient pas remplies ; si nous déduisons de cette hypothèse (par une apagoge) des conséquences absurdes (contradictoires entre elles), nous en concluons que l'hypothèse est illégitime et que, par conséquent, les conditions requises sont sûrement remplies.

Mais nous ne pouvons prétendre approfondir ici l'étude logique de la démonstration. Il importe davantage de nous demander comment, par le moyen des démonstrations, nous pourrons dresser l'édifice de la géométrie rationnelle.

228. Les éléments. — « Le terme d'éléments (στοιχεῖα), dit Paul Tannery d'après Proclus, s'applique proprement à ces théorèmes qui, dans toute la géométrie, sont primordiaux et principes de conséquences, qui s'appliquent partout, et fournissent les démonstrations de relations en grand nombre ; on peut comparer leur rôle à celui des lettres (également appelées στοιχεῖα) dans le langage ».

De nombreux *Eléments* ont été composés en Grèce (ceux d'Hippocrate de Chios, aujourd'hui perdus, furent célèbres) :

cependant nous n'en connaissons point de plus anciens que ceux de l'Alexandrin Euclide.

Les *Eléments* d'Euclide jouent en même temps le rôle de fin et le rôle de moyen : fin, puisqu'ils sont destinés à faire connaître les théorèmes essentiels de la géométrie ; moyen, puisque les solutions toutes préparées qu'ils nous offrent sont les instruments dont on a besoin pour effectuer l'apagoge (ou l'ἀπόδειξις) des problèmes nouveaux. Euclide adjoignit d'ailleurs aux *Eléments* un second ouvrage, les *Data*, qui a pour objet direct de fournir des instruments à l'analyse et à la synthèse : « les propositions, dit Zeuthen (1), y ont pour but de prouver que, certaines quantités ou portions d'une figure étant *données*, certaines autres le sont aussi, c'est-à-dire qu'elles se déterminent à l'aide des premières ».

229. — Comment sont composés les *Eléments*? Partant de définitions et d'hypothèses, le géomètre en déduit progressivement, conformément aux règles de la logique, une série de propositions rigoureusement enchaînées les unes aux autres.

Les *définitions* (ὅροι) déterminent les concepts qui sont à la base de la science.

Les hypothèses sont (2), soit des *postulats* ou *demandes* (αἰτήματα), soit des *notions communes* ou *axiomes* (κοιναὶ ἔννοιαι, ἀξιώματα); les postulats affirment (sans démonstration) que certaines constructions (3) premières sont possibles ; les axiomes, que certaines propriétés essentielles appartiennent aux grandeurs ou aux figures les plus simples.

Il est clair — puisqu'aussi bien l'ordre logique n'est qu'un ordre introduit *après coup* (n° **166**) pour exposer des vérités simultanées — que le choix des définitions, postulats et axiomes reste à notre discrétion. Entre plusieurs constructions ou propositions qui s'impliquent mutuellement, nous avons le droit de choisir celles que nous prendrons comme point de départ et renoncerons à démontrer, et celles qu'au contraire nous considérerons comme déduites. C'est

(1) ZEUTHEN, *Hist. des math. d. l'antiq.*, trad. J. MASCART, pp. 87-88.

(2) La distinction que les Grecs établissaient entre les postulats et les axiomes n'a pas été maintenue par les modernes. Sur les postulats, voir *infra, Deux. liv.*, ch. v.

(3) Voir *infra* § 5.

pourquoi les savants modernes ont pu changer les bases de la géométrie euclidienne tout en continuant à la prendre pour un modèle. Ce qui importe, du point de vue de la logique, c'est l'enchaînement des propositions. Or à cet égard il n'y a rien à ajouter aux règles posées par Euclide.

230. Les propositions (*théorèmes*) sont rangées dans l'ordre suivant lequel elles se déduisent les unes des autres. Elles portent des numéros [1]) afin qu'il soit facile d'y renvoyer quand on les invoque dans la démonstration des propositions ultérieures.

Les propositions d'importance secondaire sont souvent appelées ([2]) *lemmes* lorsqu'elles sont destinées à faciliter la démonstration d'un théorème à venir — *corollaires* lorsqu'elles expriment des conséquences directes d'un théorème que l'on vient d'établir.

La démonstration des propositions se fait suivant les règles que nous avons indiquées aux nos **225-27**.

231. — Le système de géométrie que nous ont laissé les Alexandrins a traversé vingt-deux siècles sans être, pour ainsi dire, ébranlé. Couronnement de l'œuvre minutieuse poursuivie pendant trois cents ans par les dialecticiens grecs, il n'est pas loin d'atteindre la perfection. De la nécessité où est l'homme d'exposer l'une après l'autre les vérités géométriques au lieu de les embrasser toutes du même coup d'œil, il a tiré le principe d'une méthode de découverte et de déduction qui est l'une des plus précieuses possessions de l'esprit humain.

Cependant, si les « *Eléments* » ont conservé moyennant quelques retouches ([3]) toute leur valeur logique, ils ne jouent plus dans l'ensemble de la science mathématique le rôle unique qui parais-

([1]) L'usage s'est répandu aujourd'hui de désigner les propositions par les noms de leurs inventeurs (théorème de Pythagore, théorème de Desargues, etc.). Beaucoup de ces appellations sont cependant discutables au point de vue historique et il n'y faut voir qu'un substitut des numéros d'ordre.

([2]) Ces distinctions ont été systématiquement introduites par les commentateurs d'Euclide.

([3]) Sur le système euclidien comparé aux systèmes logiques de géométrie, récemment constitués, voir notre *Deux. liv., ch.* V ; on lira avec intérêt sur ce sujet : Klein, *Elementarmath. v. höh. Standp. aus*, II, 1909, p. 385 suiv.

sait jadis lui être assuré. Sans doute, le système euclidien — dont la marche a été réglée si sûrement — est susceptible d'une extension continue et indéfinie. Ce n'est point toutefois en le prolongeant que la science a le plus progressé ; la raison en tient à une faiblesse du système qui ne s'est fait sentir qu'à la longue, mais que nous pouvons dès maintenant apercevoir.

Nous avons dit que les *Eléments* sont en même temps une fin poursuivie pour elle-même et un instrument de démonstration. Il y a certes une grande élégance à satisfaire du même coup deux besoins différents : mais est-on bien sûr d'y réussir ? La géométrie, en tant que fin, est l'héritière de la science pythagoricienne : elle note les plus belles propriétés (les plus simples, les plus suggestives) des figures les plus parfaites. Sont-ce bien ces mêmes propriétés qui rendront le plus de services pour l'analyse et pour la synthèse ? Il serait surprenant qu'il en fût toujours ainsi. L'admirable unité que les Grecs avaient donnée à la science n'a donc pas pu être sauvegardée [1]. Pour passer des données d'un problème à la solution il faut souvent recourir à des intermédiaires qui ne sont point dignes d'occuper eux-mêmes une place dans l'édifice de la science : constructions artificielles, inharmonieuses, dépareillées, qui souvent même sont choquantes pour la raison et lui paraissent absurdes au premier abord. C'est ainsi qu'à côté de la science contemplative, une technique a dû se développer, dont le but est strictement utilitaire et qui vise seulement à accroître, par tous les moyens possibles, la puissance de la démonstration (voir *Deuxième Livre*, chap. I, § *1*, chap. V, § *1*). A ne vouloir jamais descendre des cimes splendides qu'elle prétend explorer, la science se condamnerait elle-même à l'impuissance.

[1] Il est à remarquer — nous reviendrons sur ce point lorsque nous étudierons la géométrie algébrique (*Deux. liv.*, chap. IV) — que, quelque savamment qu'elle ait été décomposée et codifiée, la méthode de résolution des problèmes employée par les géomètres anciens est extrêmement difficile à manier. Elle exige que l'on prenne des voies détournées où l'on ne peut s'orienter qu'à force d'ingéniosité.

5. — La construction en géométrie rationnelle. Sections planes du cône.

232. Rôle de la construction géométrique. — La « construction » des figures fut évidemment, pour les premiers géomètres, une opération technique qui se réglait sur des préceptes empiriques. C'est ainsi que la comprenaient les arpenteurs de l'Orient et les *Harpedonaptes* (¹) égyptiens en particulier (²). Tout autre est le sens du problème de la construction dans la géométrie rationnelle des Grecs et, plus spécialement, dans la κατασκευή.

La construction rationnelle a pour objet principal d'établir l'*existence* théorique des figures sur lesquelles on raisonne. — Expliquons, afin d'éviter tout malentendu, ce que nous entendons au juste par là.

233. — On a vu, au § *4*, que toute définition pose un *problème* d'existence. Il nous faut revenir un peu sur la signification et le rôle de ce problème pour ce qui a trait à la définition des figures.

Nous avons fait allusion à la discussion engagée par les écoles de Platon et d'Eudoxe au sujet des théorèmes et des problèmes. Au fond de ce débat, c'est la nature même des vérités mathématiques qui se trouve en cause. Celles-ci ont-elles une réalité objec-

(¹) Tireurs au cordeau, *Vide supra*, nº 52.

(²) Signalons une construction qui paraît avoir été connue dans tout l'Orient et jusqu'en Chine, et dont l'origine est sans doute empirique bien qu'elle soit une application du fameux théorème de Pythagore (cf. Milhaud, *Etudes sur la pensée scientifique*, pp. 62 et suiv.). Soit à mener au point A la perpendiculaire à la droite AX (fig. 138). Sur AX je mesure une longueur AB égale à 4 unités ; puis en A et B je fiche les extrémités d'une corde ACB longue de 8 unités sur laquelle est fixée (à 3 unités de l'extrémité A, 5 de l'extrémité B) un piquet C. Plaçons le piquet C de manière à tendre complètement les deux portions de corde AB et AC ; lorsque C est ainsi placé la figure ABC est un triangle, qui est rectangle en A [d'après la réciproque du théorème de Pythagore, car on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$]. Donc AC est perpendiculaire sur AB.

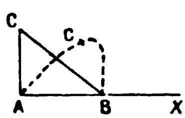


Fig. 138.

tive avant même d'être démontrées, comme le soutenaient les Platoniciens, ou n'existent-elles au contraire qu'en vertu des déductions et des constructions des géomètres? La question, ainsi posée, ne pouvait guère diviser sérieusement les penseurs de la Grèce, car il n'est pas douteux que les géomètres anciens n'aient tous vu dans les notions mathématiques des entités objectives. Mais l'art du logicien consiste précisément à feindre d'ignorer ce que fort bien il sait, afin de le retrouver par de subtiles et rigoureuses déductions. C'est ainsi que dans un système de géométrie digne de ce nom, aucune figure ne doit être introduite sans que son existence ait été constatée logiquement — je veux dire sans qu'il ait été reconnu qu'aucune contradiction n'est possible entre sa définition et les autres définitions et postulats préalablement posés. Or le moyen le plus simple de vérifier ce fait consiste à *construire* effectivement la figure, ou plutôt à *définir* un procédé théorique qui *permettrait* de la construire si l'on savait *parfaitement* dessiner.

Le problème logique que nous venons de formuler se pose, remarquons le bien, au sujet des figures géométriques les plus simples. Ainsi au début du Ier livre des *Eléments*, Euclide affirme (1) qu'il est possible de mener une ligne droite entre deux points, qu'il est possible de décrire un cercle de centre donné et de rayon donné. La possibilité de ces constructions résulte-t-elle logiquement des définitions de la droite et du cercle? Ou, tout au moins, peut-on prouver qu'elle n'est pas contradictoire à ces définitions? Euclide ne soulève pas cette question, qui n'a été approfondie que par les logiciens modernes. Admettons donc — puisqu'aussi bien nous pouvons en cela nous fier à notre intuition — que nous sachions, en toutes circonstances, tracer une droite indéfinie dont nous connaissons deux points, et une circonférence dont nous connaissons le centre et un point A (ou, si l'on veut, le centre et le rayon). Cela revient à dire, pour parler un langage matériel, que nous savons en tous cas faire usage de la *règle* et du *compas*. Pourrons-nous, cela admis, établir, par voie de démonstration logique, l'existence des diverses figures qu'étudient les géomètres?

(1) *Postulats* (αἰτήματα) 1, 2, 3.

234. — La méthode de démonstration qu'il convient de suivre ici paraît tout indiquée : l'existence de la figure sera prouvée si l'on établit qu'il serait possible de la construire en effectuant une série d'opérations qui toutes sont des tracés de droites ou de cercles dont deux points, ou le centre et un point, sont connus. — C'est pourquoi les traités de géométrie nous enseignent que « l'on réserve le nom de *constructions géométriques* aux constructions effectuées avec la règle et le compas ».

S'il fallait en croire Plutarque, cette conception [1] de la « construction » aurait déjà été expressément celle de Platon, et ce géomètre aurait fait grief à l'Ecole d'Eudoxe d'employer, pour la résolution des problèmes, des instruments et des dispositifs mécaniques [2].

Quoi qu'il en soit, toutes les constructions planes qui sont spécifiées dans les énoncés des propositions d'Euclide ou qui interviennent dans la démonstration de ces propositions sont des constructions s'effectuant « par la droite et le cercle ». — On trouvera, dans les traités de géométrie élémentaire les règles qui régissent ces constructions.

Soit, par exemple, *à élever une perpendiculaire à une droite AB en un point A de cette droite* [3]. Sur la droite AB et sur son prolon-

[1] Cf. P. Tannery, *La géom. grecque*, p. 79. Certains géomètres ont cherché à éviter systématiquement l'emploi du cercle et à effectuer toutes les constructions par la droite (par exemple Brianchon, *Les applications de la théorie des transversales*, Paris 1818). D'autres, au contraire, se sont proposé de construire avec le seul compas (Mascheroni, *La geometria del compasso*, Pavia, 1797).

[2] M. Zeuthen décrit en ces termes (*Hist. d. math. d. l'antiq.*, p. 66) un procédé de construction mécanique qui fut peut-être regardé, aux temps anciens, comme ayant une valeur démonstrative : il s'agit de l'*intercalation* ou construction d'un segment dont les extrémités sont sur deux droites données et qui appartient à une droite passant par un point donné : « on peut, dit M. Zeuthen, obtenir mécaniquement ce segment au moyen d'une règle (ou d'un morceau de papier plié) sur laquelle on a fait préalablement deux marques à une distance égale à la longueur du segment donné, puis en faisant tourner cette règle autour du point fixe et la déplaçant en même temps de sorte que l'une des marques suive exactement l'une des lignes données : l'on continue ce mouvement jusqu'à ce que la deuxième marque se trouve sur la deuxième ligne ».

[3] Dans la pratique, pour élever la perpendiculaire AD sur une droite AB, on se sert généralement d'une *équerre* ; mais l'équerre n'est pas un instrument rigoureusement précis.

gement (fig. 139) je porte de part et d'autre de A (avec le compas) deux longueurs égales, arbitraires AC, AC'; du point C comme centre, ensuite, avec un rayon arbitraire mais plus grand que CA décrivons un arc de cercle ; du point C' comme centre, avec le même rayon, décrivons un second arc de cercle qui coupe le premier en un point D ; enfin (avec la règle) joignons les points A et D. On voit immédiatement que DA est *perpendiculaire* sur DB : en effet, DC' = DC ; donc le triangle DCC' est isoscèle ; donc sa médiane DA se confond avec sa hauteur (n° **178**).

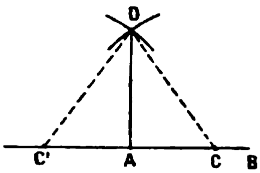


Fig. 139.

235. — Voici un autre exemple de construction.

Soit à construire la bissectrice d'un angle donné, AOB. — Du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, je décris un arc de cercle qui rencontre les côtés de l'angle aux points A et B. De ces points comme centres, avec un rayon plus grand que la moitié de la corde AB, je décris des arcs de cercle qui se coupent en D. Je joins OD. On démontre facilement que la droite OD partage l'arc AB en deux parties égales et est, en conséquence, la bissectrice de l'angle AOB (fig. 140).

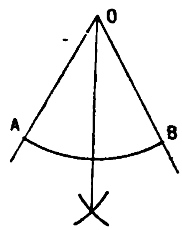


Fig 140.

Cette proposition prouve logiquement l'*existence* de la droite appelée « bissectrice » que nous avons définie au n° **54**.

236. Construction stéréométrique. — Les constructions dont nous venons de parler appartiennent à la géométrie plane. Quelles seront dans l'espace à trois dimensions les constructions équivalentes, susceptibles de jouer le même rôle démonstratif ? Ici apparaît une difficulté : en effet, que nous opérions sur le papier, au tableau noir, ou sur le sol comme les géomètres de plein air de l'antiquité, nous ne réalisons jamais, en fait, que des figures planes : sommes-nous alors en droit d'ériger une construction purement idéale, comme l'est une construction stéréométrique, en preuve de l'existence de la chose construite ? Pour lever cette diffi-

culté, le plus simple serait — puisqu'aussi bien tous les dessins sont des projections — de faire une étude systématique et rigoureuse de la *projection* (voir **198**) : on apprendrait ainsi à remplacer toute construction stéréométrique par une construction strictement équivalente effectuée dans le plan. Cependant la théorie des projections n'a été faite d'une manière complète qu'à une époque toute récente ; son initiateur fut Gaspard Monge, qui créa la *Géométrie descriptive* (1).

Les géomètres anciens, qui ne disposaient pas de cet instrument, en étaient réduits à admettre *a priori* la légimité des constructions qui correspondent dans l'espace aux constructions planes faites par la droite et le cercle : construction d'une droite, d'un cercle, d'un plan passant par trois points donnés, et aussi construction des corps ronds, *cylindre*, *cône*, *sphère*, qui sont engendrés respectivement par *rotation* d'un rectangle, d'un triangle,

(1) *La Géométrie descriptive, Leçons données aux Ecoles normales l'an III de la République par Gaspard Monge, de l'Institut National*, Paris, an VII.

Le principe de la géométrie descriptive est le suivant :

Appelons H et V deux plans perpendiculaires l'un sur l'autre et *xy* leur intersection indéfiniment prolongée dans les deux sens. Le plan H sera supposé placé horizontalement et dit *plan horizontal de projection*. Le plan V sera appelé *plan vertical*, la droite *xy ligne de terre*.

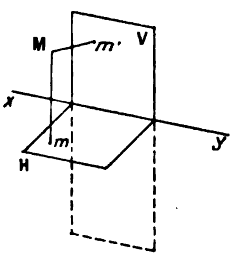


Fig. 141.

Un point quelconque M de l'espace a une projection orthogonale et une seule (180) sur chacun des plans H et V (*projection horizontale m* et *projection verticale m'*). Une ligne quelconque de l'espace a pareillement une et une seule projection horizontale, une et une seule projection verticale.

Supposons tracées les projections des points ou lignes que nous voulons étudier. Puis, laissant le plan horizontal fixe, faisons tourner le plan V de 90 degrés dans le sens de la flèche (fig. 141), autour de *xy* comme charnière, de manière à le *rabattre* sur le plan H. Après le rabattement, les projections verticales et horizontales des points et lignes que nous considérons se trouveront figurées sur le même plan (même feuille de papier ou même tableau). Leur ensemble constituera une figure plane, appelée *épure*, dont la disposition fait connaître exactement la structure de la figure de l'espace sur laquelle nous avons à raisonner. Toute construction relative à cette dernière figure *équivaut* à une construction faite sur l'épure, construction que l'on peut réaliser avec la règle et le compas.

La géométrie descriptive a surtout servi les besoins des architectes et des ingénieurs. Tel était en effet le rôle que lui destinait Monge.

d'un cercle autour d'un *axe* [1] [voir les définitions données aux nos **85, 86, 87**].

237. Sections planes du cône. — Cette manière de voir — si naturelle — a sur la géométrie plane, un contre-coup inattendu ; elle nous permet de regarder comme « construites » certaines courbes planes remarquables que nous n'aurions pas obtenues par la droite et le cercle si nous étions restés dans le plan. Ces courbes sont les « sections coniques » : elles sont définies par l'intersection d'un plan et de la surface d'un cône ou cylindre droit ; d'ailleurs, étant donnée l'une quelconque d'entre elles, on saura toujours [2] construire un *cône droit* dont elle soit *section plane* (intersection par un plan : d'où le nom de *section conique*) ; on pourra même toujours faire en sorte que le plan sécant soit perpendiculaire à une génératrice du cône.

Les premiers géomètres grecs [3], et Archimède [4] spécialement, n'ont étudié les sections planes du cône que dans cette hypothèse particulière. Ils distinguaient alors trois cas suivant que l'angle ASB au sommet du cône droit est *aigu*, *droit* ou *obtus* (fig. 143, 144, 145).

Pour se représenter ces trois cas, il suffit d'imaginer que sur les figures 143-45 les génératrices SA et SB soient dans le plan de la feuille de papier et que le plan sécant soit perpendiculaire (debout) sur cette feuille, qu'il coupe suivant la droite xy, elle-même perpendiculaire à SB. Traçons alor sur nos trois figures l'intersection (*trace*) du plan sécant avec le plan de la feuille de papier [droite xy perpendiculaire à SB] et prolongeons dans le troisième cas (cas de l'angle obtus, fig. 145) les génératrices du cône au-delà

(1) Les Grecs ont sans doute connu d'autres corps ronds engendrés par *révolution* autour d'un axe, le *tore* en particulier, corps en forme de couronne que l'on obtient en faisant tourner la surface d'un cercle autour d'un axe qui ne la coupe pas (fig. 142). [Cf. Zeuthen, *loc. cit.*, p. 199].

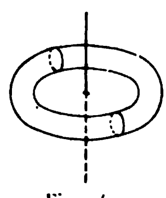


Fig. 142.

(2) lors même qu'elle est primitivement définie comme intersection de cylindre.

(3) On attribue à Menechme, disciple d'Eudoxe, la découverte des sections coniques (ive siècle av. J.-C.).

(4) Archimède, *Sur les conoïdes et sphéroïdes*, éd. Heiberg, I, p. 246.

du sommet S [nous remarquons en effet que, dans le troisième cas, la droite xy ne coupe la génératrice SA que sur son prolongement SA′; les prolongements des génératrices forment un second

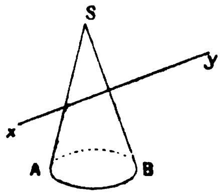


Fig. 143.

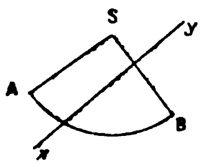


Fig. 144.

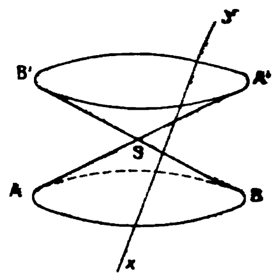


Fig. 145.

cône qui est en quelque sorte « opposé par le sommet » au premier]. Il est facile de se rendre compte que la *section plane* affectera les formes représentées ci-contre [fig. 146 : dans le troisième cas on a deux branches de courbe qui sont les sections planes respectives des deux cônes opposés par le sommet]. La première courbe est appelée *ellipse* ([1]), la seconde *parabole*; la troisième (j'entends : l'ensemble des deux « branches » de courbe ([2]) qui constitue la troisième) est appelée *hyperbole*.

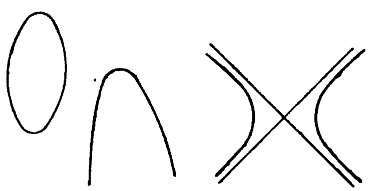


Fig 146.

238. — Les propositions d'Archimède furent complétées et

([1]) Nous expliquerons plus loin (*Deux. liv.*, ch. III) la signification étymologique de ces trois mots. Conformément à la construction que nous venons d'exposer, ARCHIMÈDE appelait les trois sections coniques : *sections du cône à angle aigu, à angle droit, ou à angle obtus* [ὀξυγωνίου *ou* ὀρθογωνίου, *ou* ἀμβλυγωνίου κώνου τομή].

([2]) Ce n'est qu'à condition de regarder les deux branches comme constituant une seule et même hyperbole que l'on pourra établir entre les propriétés de cette courbe et celles de l'ellipse et de la parabole un rapprochement précis. La possibilité de ce rapprochement apparaît déjà nettement à APOLLONIUS (quoique ce géomètre désigne les deux branches de l'hyperbole par un pluriel : *hyperboles conjuguées*). Elle s'affirme définitivement au XVIIe siècle avec DESARGUES.

généralisées par Apollonius de Perga, dont le *Traité des Coniques* (Κωνικά), — l'un des plus beaux monuments de la géométrie grecque, — fit autorité jusqu'à la fin du XVIIe siècle. Apollonius étudia en effet les intersections que détermine sur la surface d'un cône ou cylindre droit [1], et plus généralement d'un cône ou cylindre *oblique* quelconque (voir p. 97 et 99), un plan disposé d'une manière arbitraire. Il démontra que ces courbes ne diffèrent pas de celles qu'étudiait Archimède — ou, en d'autres termes, qu'étant donné l'une quelconque d'entre elles, il existe toujours un cône droit sur lequel elle peut être placée de telle sorte que son plan soit perpendiculaire à une génératrice (*vide supra*).

239. — Il ne nous est pas possible de reproduire ici les démonstrations d'Apollonius qui sont, pour nous modernes, fort difficiles à suivre, habitués que nous sommes aux voies rapides de la géométrie algébrique. La méthode de Descartes nous permet, en effet, d'étudier par le calcul toutes les propriétés des sections coniques sans sortir du plan, c'est-à-dire sans nous préoccuper du cône ou des cônes dont ces courbes sont sections. Desargues et Pascal, cependant, plus géomètres qu'algébristes, se référaient encore à la définition première des sections coniques. Ils surent en tirer un parti nouveau en approfondissant à cette occasion la théorie de la *projection* ou *perspective* (**197**).

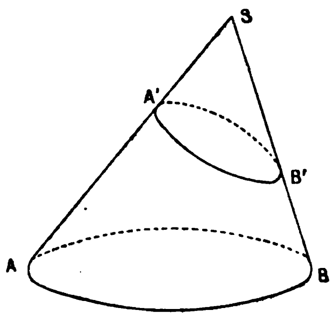


Fig. 147.

[1] On démontre en particulier que l'intersection d'un cône droit par un plan est : une ellipse si le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan sécant est extérieur au cône (dont on suppose la surface indéfiniment prolongée de part et d'autre du sommet) ; une hyperbole si le plan parallèle considéré coupe le cône (il le coupe alors suivant deux droites, génératrices du cône) ; une parabole si le plan considéré est tangent au cône (c'est-à-dire s'il ne le traverse pas, mais le touche, est en contact avec lui, le long d'une génératrice). Exceptionnellement si le plan sécant passe par le sommet du cône, l'intersection se réduit à deux droites (deux génératrices), ou à une droite, ou au seul sommet.

Considérons un cône circulaire droit ou oblique et une section de ce cône, — soit par exemple une ellipse (fig. 147). A chaque point de la section *correspond* un point du cercle de base, savoir le point qui est sur la même génératrice du cône : ainsi A′ correspond à A, B′ à B, M′ à M ; nous dirons que ces points sont les *projections coniques* de A, B, M, *le centre de projection étant* S, et que le cercle et l'ellipse sont *projections coniques* l'un de l'autre.

Ces définitions données, on peut demander s'il n'y a pas une certaine corrélation entre les propriétés de l'ellipse et celles de sa projection conique circulaire. Ne pourra-t-on pas, en d'autres termes, déduire certaines propriétés intéressantes de l'ellipse, hyperbole ou parabole, du fait qu'elle a pour projection conique un cercle, c'est-à-dire une courbe dont les propriétés sont connues ? — Tel fut le point de départ de la géométrie projective qu'inaugura Girard Desargues [1] et qui fut développée plus tard par les géomètres du XIXe siècle.

240. — S'il s'agit de l'ellipse, d'ailleurs, on peut à volonté la considérer comme projection conique ou comme projection orthogonale d'un cercle. On démontre en effet que la projection orthogonale d'un cercle dont le plan *n'est* pas parallèle au plan de projection est une ellipse (cette ellipse peut être considérée comme une section plane d'un cylindre oblique ayant pour base le cercle considéré). D'où un moyen de déduire des propriétés du cercle certaines propriétés correspondantes de l'ellipse.

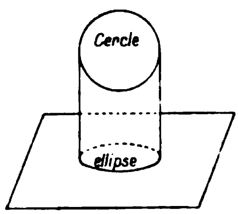


Fig. 148.

[1] Voir § 3. L'ouvrage principal de DESARGUES est le *Brouillon Project d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'un cone avec un plan*, 1639. Les œuvres de DESARGUES que nous possédons ont été réunies en deux volumes par POUDRA, Leiber, éd., 1864.

6. — *Lieux géométriques. — Etude des courbes*

241. Lieux géométriques. — Supposons qu'il soit demandé de construire un point jouissant d'une certaine propriété géométrique et que l'on reconnaisse la possibilité de construire, non pas *un* tel point, mais une *infinité* de points jouissant de la même propriété : si l'ensemble de ces points constitue une courbe, cette courbe est appelée *lieu géométrique* (τόπος) [ou, plus explicitement : lieu géométrique des points jouissant de telle ou telle propriété].

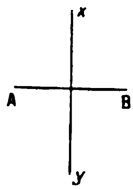


Fig. 149.

Les théorèmes des paragraphes précédents déterminent immédiatement un très grand nombre de lieux géométriques qui sont des droites ou des cercles : ainsi *le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés* A *et* B *est la perpendiculaire xy élevée sur la droite* AB *en son milieu* (fig. 149) ; d'après le théorème du n° **204**, *le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes* A *et* B *est dans un rapport donné k* [c'est-à-dire le lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$] *est un cercle dont le centre est sur* AB.

Ces lieux géométriques, et tous ceux qui, comme eux, se trouvent être des droites ou des cercles, sont appelés *lieux plans* (τόποι ἐπίπεδοι).

242. — Soit demandé, par contre, le lieu géométrique des points tels que le produit de leurs distances à deux droites fixes, d'une part, et le carré de leur distance à une troisième droite fixe, d'autre part, soient dans un rapport donné. Il s'agit, en d'autres termes, étant donnés les 3 droites D, E, F et le nombre k, de trouver le lieu des points M dont les distances x, y, z aux trois droites D, E, F (fig. 150) satisfont à la relation

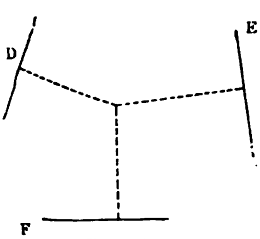


Fig. 150.

$$x \cdot z = k \cdot y^2.$$

C'est le *lieu à trois droites* (*locus ad tres lineas*), — souvent appelé lieu de Pappus — mais déjà étudié par Apollonius : ce lieu est une *section conique*.

Section conique [1] aussi est le lieu à *quatre droites* — lieu des points tels que leurs distances respectives x, y, z, u à quatre droites données satisfassent à la relation $x.z = k.y.u$ (k étant un nombre donné).

D'une manière générale, tous les lieux géométriques qui se trouvent être des sections coniques sont appelés *lieux solides* [2] [τόποι στερεοί].

243. Propriétés des lieux solides. — Nous avons vu que pour donner des sections coniques une définition rigoureuse les géomètres grecs croyaient devoir recourir à une construction stéréométrique. Il est probable cependant que c'est en étudiant certains problèmes de géométrie plane [3] que l'on fut amené en fait à

(1) Apollonius et Pappus traitent un problème plus général en supposant que les distances du point M aux droites données ne soient pas *comptées* sur les perpendiculaires à ces droites, mais sur des segments faisant avec les droites données des angles *donnés* (dont la valeur est fixée une fois pour toutes). Soit par exemple α un angle égal à l'angle donné (fig. 151), (D) l'une des droites données, M un point du lieu : la distance de M à la droite (D), dont il est question dans l'énoncé, ne sera pas MH, mais MK.

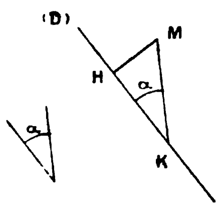


Fig. 151.

Pour certaines positions exceptionnelles des droites données, il peut arriver que le lieu géométrique soit un cercle ou une droite [lignes que les modernes regardent comme des cas particuliers de sections coniques].

(2) Primitivement on donnait également le nom de lieux solides à toutes les courbes définies comme intersections de corps solides telles que les courbes gauches dont nous parlerons au n° 252. Mais Pappus faisait rentrer ces courbes dans la classe des *lieux linéaires*, laquelle comprend tous les lieux qui ne sont ni droites, ni coniques (*vide infra*, 248, cf. Heath, *Apollonius of Perga*, p. XXXII). Nous verrons d'ailleurs plus loin (*Deux. liv.*, ch. III) quelle est la signification probable de l'expression « lieu solide » et pourquoi elle ne peut s'appliquer qu'aux sections coniques.

(3) Heath suppose (*Apollonius of Perga*, p. XVII. sqq.) que c'est à l'occasion du problème de la duplication du cube (voir *Deux. liv.*, ch. IV) que Ménechme, le premier (*vide* p. 241, note 3) s'occupa des sections coniques.

s'occuper de ces courbes. C'est à titre de *lieux géométriques*, en tout cas, qu'elles interviennent le plus souvent dans la géométrie grecque.

Un contemporain d'Euclide, l'athénien Aristée ([1]), avait composé sur les *lieux solides* un traité, malheureusement perdu, qui semble avoir exercé une grande influence. Archimède et Apollonius allèrent plus loin dans la même voie. Ainsi fut constituée une théorie générale des sections coniques qui occupa rapidement une place d'honneur dans l'édifice de la géométrie. Parvenue déjà à un haut degré de perfection dans l'antiquité, elle devait devenir, avec les découvertes de Kepler sur le mouvement des astres, la base de l'astronomie et de la mécanique céleste ; et c'est aussi par l'étude des coniques que s'essaya et s'affirma au XVIIe siècle la nouvelle méthode de géométrie instituée par Fermat et Descartes.

Sans chercher à reproduire les démonstrations difficiles des géomètres grecs, signalons quelques propriétés fondamentales des coniques qui étaient connues d'eux et que nous retrouverons et établirons plus loin par la géométrie algébrique.

244. Foyers de l'ellipse. — Voici tout d'abord une propriété de l'ellipse qui sert souvent aujourd'hui à définir cette courbe ([2]) : A l'intérieur de l'ellipse (c'est-à-dire d'une ellipse quelconque) il y a deux points appelés *foyers* ([3]), jouissant de cette propriété que la somme de leurs distances à un point quelconque de la courbe est constante ([4]) (c'est-à-dire égale pour tous les points de la courbe).

Appelons F, F' les foyers et A, A' les points où la droite FF' prolongée rencontre l'ellipse ; le segment AA' est dit *grand axe* de l'ellipse ; on a, par hypothèse :

$$AF + AF' = A'F + A'F'$$

([1]) Il publia, à la fin du IVe siècle, cinq livres sur les *lieux solides*. Les Κωνικά d'EUCLIDE — qui ne paraissent pas avoir apporté beaucoup de connaissances nouvelles, — sont également perdues. — ARCHIMÈDE n'écrivit pas de traité d'ensemble sur les sections coniques, mais ses ouvrages montrent qu'il en avait fait une étude approfondie.

([2]) Depuis DE LA HIRE, *Nouveaux élémens des sections coniques*, Paris, 1679, p. 36.

([3]) Le mot *foyer* est emprunté à la théorie de la réflexion et des miroirs courbes.

([4]) APOLLONIUS, Κωνικά, liv. III, prop. 52.

ou (puisque $AF' = AF' + FF' \quad A'F = A'F' + FF'$) :

$$2AF + FF' = 2A'F' + FF',$$

donc $A'F' = AF$, et par suite

$$AF + AF' = AF + A'F = AA'.$$

J'en conclus, que d'après la propriété énoncée ci-dessus, on a, quel que soit le point M de la courbe que l'on considère (fig. 152) :

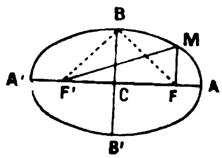


Fig. 152.

$$MF + MF' = AF + AF' = AA'.$$

Le milieu C du grand axe est dit *centre* de l'ellipse, et le segment B'B de la perpendiculaire à AA' menée par C (limité à l'ellipse) est dit *petit axe*. Le point C étant milieu de FF', on voit immédiatement que le triangle BFF' est isoscèle ; donc que $BF = BF'$; or $BF + BF' = AA'$; donc $BF = \frac{AA'}{2} = AC$.

Le théorème de Pythagore donne alors :

$$BC = \sqrt{BF^2 - CF^2} = \sqrt{AC^2 - CF^2}.$$

La longueur FF' est appelée *distance focale*. Les points A, A', B, B', sont dits *sommets* de l'ellipse. Les quatre morceaux (arcs) AB, BA', A'B', B'A de l'ellipse sont manifestement *symétriques* (**176**) les uns des autres par rapport aux axes A'A, B'B et au centre C.

De la propriété fondamentale des foyers de l'ellipse nos traités de géométrie déduisent la règle de construction suivante : « Pour tracer une ellipse d'un mouvement continu on prend un fil dont la longueur est égale au grand axe, et l'on fixe les extrémités de ce fil aux deux foyers F et F' ; puis avec la pointe d'un crayon, on tend le fil, et l'on fait glisser la pointe du crayon sur le papier en maintenant le fil tendu. Dans chaque position la somme des distances de la pointe du crayon aux points fixes F et F' est égale à la longueur du fil ; donc la courbe obtenue est bien une ellipse ».

Pour les raisons que nous avons exposées plus haut, cette construction mécanique ne pouvait avoir une valeur théorique aux

yeux des géomètres grecs ; elle est attribuée par un auteur arabe à trois frères [1], les fils de Mousa Ben Châgir (ixe siècle).

Dans le cas particulier où les deux foyers de l'ellipse sont confondus (la distance focale étant nulle), ces points coïncident avec le centre et il résulte immédiatement de leur propriété que l'*ellipse se réduit à un cercle*.

245. Foyers et asymptotes de l'hyperbole. — L'hyperbole jouit d'une propriété analogue à celle de l'ellipse. Il y a dans son plan deux points (foyers) tels que la différence des distances d'un point quelconque de la courbe à ces deux foyers soit constante [2] (égale pour tous les points de la courbe qui est, on l'a vu, composée de deux branches).

Soit A′ et A les points (sommets) où la droite F′F rencontre la courbe (fig. 153); le segment A′A est dit *axe transverse* de l'hyperbole ; la longueur FF′ en est la *distance focale*, le point C milieu de AA′ et de FF′ en est le *centre*. Par raison de symétrie, il est commode d'attribuer à l'hyperbole comme à l'ellipse un second axe : cet axe est un segment B′B porté sur la perpendiculaire en C à FF′, ayant le point C pour milieu, et dont la demi-longueur CF est par définition égale à $\sqrt{CF^2 - CA^2}$.

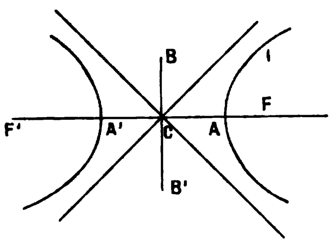


Fig. 153.

L'hyperbole a comme nous l'avons vu quatre demi-branches [3], qui s'éloignent indéfiniment (branches infinies). En étudiant ces branches, on démontre qu'elles sont respectivement *asymptotes* à des demi-droites passant par le centre C et se prolongeant deux à deux. Voici ce qu'il faut entendre par là. Il existe deux droites HH′, $H_1'H_1$, se coupant au point C (fig. 153) qui jouissent de la propriété suivante : les demi-droites CH, CH_1, CH′, CH'_1 se rap-

(1) Cf. Wœpcke, *Rech. s. les sc. math. chez les Orientaux*, *Journal asiatique*, 1855, p. 223.

(2) Apollonius, *Conica*, III. 51.

(3) Ces demi-branches sont manifestement *symétriques* les unes des autres par rapport aux axes AA′, BB′ et au centre C.

prochent de plus en plus, lorsqu'on les prolonge indéfiniment, des quatre demi-branches d'hyperbole; plus précisément, on peut toujours trouver sur chaque demi-branche un point assez éloigné pour que sa distance (1) à la demi-droite correspondante soit *arbitrairement* petite (c'est-à-dire inférieure à tout nombre que l'on se sera donné à l'avance aussi petit que l'on voudra). Les droites $H'H$ et H'_1H_1 sont appelées *asymptotes* (ἀσύμπτωτοι) de l'hyperbole (2).

246. Directrices et excentricité. — Les trois sections coniques, ellipse, hyperbole et parabole jouissent d'une propriété commune remarquable (3). On démontre en effet :

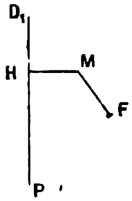


Fig. 154.

1° Qu'étant donnés (fig. 154) une droite indéfinie DD_1 et un point F, *le lieu géométrique des points M tels que le rapport des distances* MH *et* MF *de* M *au point* F *et à la droite soit constant et égal à un nombre donné est une section conique ;*

2° Que, réciproquement, étant donnée une section conique quelconque, *on peut toujours trouver dans son plan une droite* DD_1 *et un point* F *tel que le rapport des distances d'un point* M *de la courbe à* F *et à* DD_1 *soit constant (égal à un même nombre pour tous les points de la courbe).*

On établit de plus que :

3° Si le nombre constant auquel est égal le rapport $\frac{MF}{MH}$ est *inférieur* à 1, la section conique est une *ellipse* et réciproquement.

Si ce nombre est *supérieur* à 1, la section conique est une *hyperbole* et réciproquement.

Si ce nombre est *égal* à 1, la section conique est une *parabole* et réciproquement.

4° Dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole le point F se trouve être l'un des points que nous avons définis plus haut et appelés *foyers*. La droite DD_1 est appelée *directrice* (4).

A chacun des deux foyers F, F′ correspond une directrice, en sorte que la section conique peut être définie à volonté comme lieu

(1) La distance d'un point à une droite a été définie au n° 175.

(2) Apollonius, *Conica* II, prop. 2.

(3) Pappus, Συναγωγή, liv. VII, prop. 238.

(4) *Recta Directrix*, (De La Hire, *Sectiones Conicæ*, Paris, 1685, liv. II, déf. 11, p. 15)

géométrique des points dont les distances à F et DD_1 ou comme lieu géométrique des points dont les distances à F′ et $D'D_1'$, sont dans un rapport constant (fig. 155).

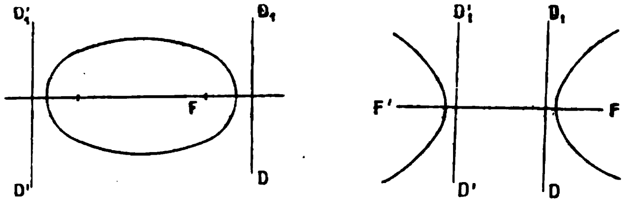


Fig. 155.

Le rapport constant est le même quel que soit celui des deux foyers auquel on rapporte la courbe. On démontre que *ce rapport est toujours égal au rapport de la distance focale de la section conique à la longueur de son grand axe* (cas de l'ellipse) ou *de son axe transverse* (cas de l'hyperbole). On appelle ce rapport (depuis Kepler) *excentricité* de l'ellipse ou de l'hyperbole (¹).

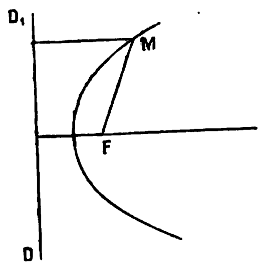


Fig. 156.

Dans le cas de la *parabole*, le point F est encore appelé *foyer* et la droite D_1D *directrice*. Il n'y a plus en ce cas qu'un foyer et qu'une directrice, et la propriété énoncée ci-dessus équivaut

(¹) Nous avons vu que le cercle est un cas particulier de l'ellipse. Il résulte de la définition de l'excentricité que l'excentricité d'un cercle est nulle, puisque pour le cercle la distance focale est nulle (n° 244), les deux foyers étant confondus au centre du cercle. Que devient alors la *directrice* ? Pour donner un sens à cette question, considérons d'abord une ellipse dont la forme se rapproche beaucoup de celle d'un cercle (fig. 157); la distance focale étant très petite, il en est de même de l'excentricité, donc du rapport $\frac{MF}{MH}$ défini ci-dessus pour un point quelconque M de la courbe. Mais MF n'est pas nécessairement petit; il faut donc que MH soit très grand, et cela quel que soit le point M de la *courbe que l'on considère*. J'en conclus que la directrice est une droite très éloignée. Plus l'ellipse se rapproche de la figure circulaire, plus la directrice est éloignée, Nous exprimerons ce fait en disant que quand l'ellipse devient un cercle. *la directrice est rejetée à l'infini.*

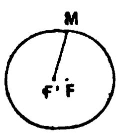


Fig. 157.

à la définition que nos traités de géométrie donnent habituellement de la parabole : La parabole (fig. 156) est le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe appelé foyer et d'une droite fixe appelée directrice. La parabole a une *excentricité* égale à 1.

Le point de rencontre A de la courbe avec la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice est le *sommet* de la courbe ; la droite AF prolongée est l'*axe*. Les deux parties de la courbe sont symétriques par rapport à l'axe.

247. Diamètres. — Coupons une section conique, une ellipse, par exemple — mais les définitions et énoncés qui suivent s'appliquent à une conique quelconque — par une série de droites toutes parallèles les unes aux autres (fig. 158). Ces droites coupent la conique suivant des segments tels que LM, L'M', ... que nous appellerons *cordes* de la conique (cf. n° **186**). — On démontre que le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes (d'une même conique) parallèles à une même direction est une portion de droite (que l'on dit *conjuguée* à la direction considérée, ou aux cordes qui ont cette direction). En particulier, si la conique est une ellipse ou une hyperbole, le lieu est une corde EE' qui passe par le centre C de la conique. Cette corde, et d'une manière générale toute corde passant par le centre C, est appelée *diamètre* de la conique.

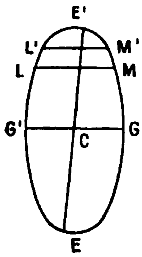


Fig. 158.

Appelons, d'autre part, G'G la corde (diamètre) parallèle à LM, L'M' et passant par le centre. On démontre que ce diamètre est le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes de la conique qui sont parallèles au diamètre E'E (lequel est entièrement déterminé par la direction de LM, L'M', ... et par conséquent de G'G). — Ainsi le diamètre G'G joue par rapport au diamètre E'E le même rôle que E'E par rapport à G'G. Les *deux* diamètres sont *dits conjugués* (συζυγεῖς διάμετροι) [1].

A tout diamètre de la conique correspond un diamètre conjugué. Le diamètre conjugué d'un axe est le second axe de la conique.

Dans le cas de la parabole le lieu géométrique des milieux des

[1] Apollonius, *Conica* I, prop. 16.

cordes parallèles à une même direction est encore appelé *diamètre* (conjugué à la direction des cordes correspondantes). On démontre que tous les diamètres de la parabole sont parallèles entre eux et parallèles à l'axe de la courbe.

Nous aurons l'occasion d'exposer plus loin une remarquable propriété des sections coniques qui joue un grand rôle dans le traité d'Apollonius et où interviennent les diamètres conjugués (*Deux. Liv.*, ch. III).

248. Lieux géométriques définissant des courbes nouvelles. — Les lieux plans et solides sont-ils les seuls lieux que puissent considérer les géomètres? N'est-il pas possible, en d'autres termes, de définir des lieux géométriques qui ne soient ni des droites, ni des cercles, ni des sections coniques. mais bien des courbes nouvelles (non encore reçues en géométrie) auxquelles leur qualité de lieu géométrique servirait précisément de définition?

Les géomètres grecs avaient été amenés de bonne heure, par l'étude de divers problèmes, à considérer de telles courbes.

Telle est la *quadratrice*, dont l'invention est attribuée au sophiste Hippias (v[e] siècle av. J.-C.) — lieu géométrique des points jouissant de la propriété suivante : OX et OY étant deux droites rectangulaires, B un point fixe sur OY, M un point quelconque du lieu et P sa projection sur OB, on doit avoir

$$\frac{PB}{OB} = \frac{\text{angle } XOM}{\text{angle } XOY};$$

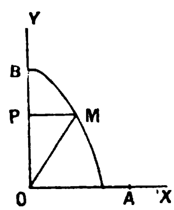


Fig 159.

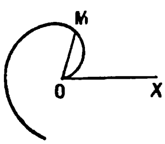


Fig. 160.

[la fig. 159 représente la portion de la courbe située dans l'angle XOY ; elle coupe OY en B]. — Telle est aussi la *spirale d'Archimède* (1) (fig. 160) lieu géométrique des points jouissant de la propriété suivante : OX étant un axe fixe, k un nombre donné, M un point du lieu, menons la droite OM : on doit avoir (pour *tout* point M du lieu) :

$$\frac{\text{longueur } OM}{\text{angle } MOX} = k,$$

l'unité d'angle étant par exemple le degré.

(1) ARCHIMÈDE, περὶ ἑλίκων. Cf. HEATH, *Archimedes*, p. 151.

Au IIᵉ siècle (av. J.-C.), deux nouvelles courbes furent définies, la *conchoïde* par Nicomède, la *cissoïde* par Dioclès.

Soit donné un axe OX et une perpendiculaire ZBY à cet axe (fig. 161). Appelant M un point quelconque à droite de ZY, menons la droite OM qui coupe ZY en P. La *conchoïde* est le lieu géométrique des points M tels que la distance PM soit constante (et égale à une longueur donnée). La figure ci-contre indique la forme de la courbe qui a deux branches indéfiniment prolongeables.

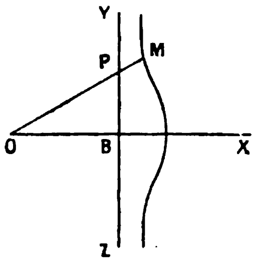


Fig. 161.

Soit donné un cercle de centre C, un diamètre OA de ce cercle. Menons en A la tangente au cercle, puis par le point O une sécante arbitraire qui rencontre le cercle en B et la tangente en D, et prenons enfin sur cette sécante (fig. 162) une longueur OM égale à BD. On appelle *cissoïde* [1] le lieu géométrique des points M obtenus en faisant occuper à la sécante OD toutes les positions possibles.

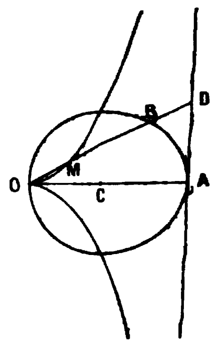


Fig. 162.

249. — Les diverses courbes dont il vient d'être question sont, d'après la terminologie de Pappus, des τόποι γραμμικοί (*lieux linéaires* ou *mécaniques*, traduit Descartes). La forme générale de ces courbes était facile à déterminer, mais pouvait-on cependant regarder leur définition comme complète ? Leur *existence* était-elle suffisamment prouvée ? Il y avait là une difficulté logique qui dut pendant longtemps gêner les géomètres. Pour expliquer et discuter leur point de vue nous ne saurions mieux faire que de citer *in-extenso* le magistral début du second livre de la *Géométrie* de Descartes : *De la nature des lignes courbes* :

« Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les problèmes de la géométrie, les uns sont plans, les autres solides, et les autres linéaires : c'est-à-dire que les uns peuvent être construits en ne

(1) Nicomède avait, paraît-il, imaginé un appareil permettant de décrire la cissoïde mécaniquement.

traçant que des lignes droites et des cercles ; au lieu que les autres ne le peuvent être qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique ; ni enfin les autres qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point, outre cela, distingué divers degrés entre ces lignes plus composées (¹), et je ne saurais comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques. Car de dire que ç'ait été à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudrait rejeter par même raison les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause que les instruments qui servent à les tracer, étant plus composés que la règle et le compas, ne peuvent être si justes ; car il faudrait pour cette raison les rejeter des mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la Géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, et qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes que touchant les autres. Je ne dirai pas aussi que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, et qu'ils se sont contentés qu'on leur accordât qu'ils pussent joindre deux points donnés par une ligne droite et décrire un cercle, d'un centre donné, qui passât par un point donné : car ils n'ont point fait de scrupule de supposer outre cela, pour traiter des sections coniques, qu'on pût couper tout cône donné par un plan donné. Et il n'est point besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres.... Mais peut-être que ce qui a empêché les anciens géomètres de recevoir celles [les lignes] qui étaient plus composées que les sections coniques, c'est que les premières qu'ils ont considérées ayant par hasard été la spirale, la quadratrice et semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux mécaniques et ne sont pas du nombre de celles que je pense devoir ici être reçues, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés et qui n'ont entre eux aucun rap-

(¹) Plus composées : c'est-à-dire d'un degré plus élevé, voir *Deux. livr.*, ch. IV.

port qu'on puisse mesurer exactement, bien qu'ils aient après examiné la conchoïde, la cissoïde et quelque peu d'autres qui en sont, toutefois, à cause qu'ils n'ont peut-être pas assez remarqué leurs propriétés, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premières [1] ».

250. — Nous aurons occasion de souligner au chapitre II l'importance de la révolution qui, avec la *Géométrie* de 1637, achève de s'accomplir. Remarquons seulement pour l'instant, que si un dernier scrupule empêche Descartes d'étendre à la quadratrice [2] et à la spirale ce qu'il dit de la conchoïde et de la cissoïde [3], nous sommes aujourd'hui plus audacieux. Sans nous préoccuper de savoir par quel mécanisme une courbe géométrique peut être tracée sur le papier, nous convenons de donner ce nom à *tout* ensemble de points formant une ligne continue et jouissant d'une même propriété géométrique [3]. Toutefois, en nous plaçant au point de vue de l'algèbre, nous serons amenés à établir une distinction capitale entre la spirale et la quadratrice d'une part, la conchoïde et la cissoïde d'autre part : les secondes sont des courbes algébriques, les premières sont transcendantes [*vide Deux. liv.*, ch. IV].

251. Courbes enveloppes. — A la conception générale de la ligne courbe que nous venons d'indiquer les géomètres ne devaient pas même se tenir ; ils allèrent plus loin dans la voie ouverte par Descartes, et c'est ainsi qu'ils en vinrent à regarder comme parfaitement et rigoureusement définies des courbes qui sont déterminées, non plus par une propriété de leurs points, mais par un ensemble (une infinité) de droites jouissant d'une propriété commune.

(1) Après ces déclarations, Descartes introduit incontinent un grand nombre de courbes nouvelles qui sont des lieux géométriques se rattachant au problème général de Pappus (lieu à 5, ou 6, ou, plus généralement, à un nombre quelconque de droites) dont nous avons considéré plus haut des cas particuliers.

(2) Les définitions de la quadratrice et de la spirale, telles que nous les avons données, ne soulèvent pas, remarquons-le, la question que pose ici Descartes, savoir par quelles combinaisons de mouvements ces courbes pourraient être engendrées ; ce ne sont pas des *définitions génétiques*.

(3) En fait cependant on n'étudiera que les courbes dites *analytiques* (voir *Deux. liv.*, ch. IV).

Considérons, par exemple, un ensemble de droites telles que AB, A′B′, A″B″ (fig. 163) dont la longueur est la même et dont les extrémités sont sur deux droites rectangulaires données X′OX, Y′OY. On démontre que toutes ces droites sont *tangentes* à une même courbe qui a la forme représentée par la figure 164 (chacune d'elles *touche* la courbe en un point et un seul) : cette courbe se trouve entièrement définie par le caractère que nous en indiquons, à savoir qu'elle est tangente à toutes les droites jouissant de la propriété ci-dessus énoncée : elle est appelée *hypocycloïde à quatre rebroussements*, et l'on dit qu'elle est l'*enveloppe* de l'ensemble des droites considérées.

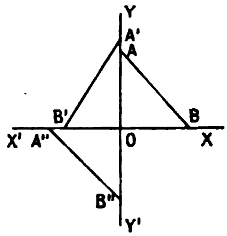


Fig. 163.

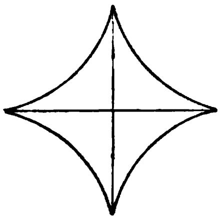


Fig. 164.

D'une manière générale toute courbe définie par ce fait qu'elle est tangente (en ses divers points) aux droites jouissant d'une certaine propriété commune est appelée *courbe enveloppe* ou *enveloppe* de ces droites. Nous reviendrons ultérieurement sur la théorie des enveloppes, et nous nous rendrons mieux compte alors de l'évolution considérable qu'a dû subir la notion de courbe pour que cette théorie devienne possible.

252. Courbes gauches. — Toutes les courbes que nous avons considérées jusqu'ici sont des courbes planes (situées dans un plan). Il est clair cependant qu'il est facile de concevoir des lignes continues (courbes) dont tous les points n'appartiennent pas à un même plan. En effet, il est manifeste que les surfaces de deux corps solides se coupent en général suivant une telle ligne : or nous avons vu que la définition d'une ligne comme intersection de surfaces est considérée comme excellente par les géomètres grecs.

Ne nous étonnons donc pas de voir ces géomètres étudier de bonne heure certaines courbes de l'espace, — courbes que nous appelons aujourd'hui *courbes gauches* ou à *double courbure*.

Ainsi Archytas de Tarente étudie [1] des intersections formées

[1] Cette étude était restée naturellement fort incomplète. Elle fut reprise au XVIIe siècle, par P. COURCIER.

par les surfaces de corps connus tels que *cylindres*, *cônes*, *tores* (*vide* p. 241, note 1). Vers la même époque, Eudoxe de Cnide s'occupe d'une courbe appelée *hippopède*, qui est vraisemblablement l'intersection d'un cylindre et d'une sphère.

Une courbe plus simple et qui nous est plus familière est l'*hélice* cylindrique (ἕλιξ) étudiée par Archimède. Cette courbe en forme de vis est tout entière située sur la surface d'un cylindre droit et peut être définie comme il suit :

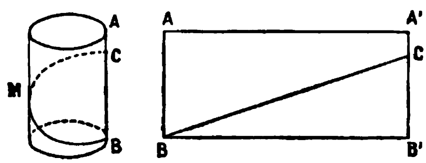
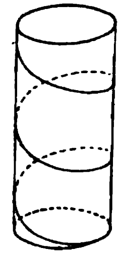


Fig. 165.


Fig. 166.

Imaginons un cylindre creux ayant seulement une surface latérale, en papier par exemple. Fendant le cylindre suivant une génératrice AB, nous pouvons le dérouler et appliquer sa surface sur un plan; la surface déroulée a la forme d'un rectangle AA'BB'. Dans ce rectangle, traçons une droite quelconque, par exemple la droite BC, puis redonnons au cylindre sa forme primitive : la droite BC enroulée sur la surface du cylindre devient une ligne courbe BMC qui est est une *spire d'hélice*. L'hélice proprement dite se compose d'une infinité de spires toutes égales entre elles et se faisant suite (fig. 166).

L'étude systématique des courbes gauches fut inaugurée au XVIIIe siècle par le géomètre Clairaut.

CHAPITRE IV

—

LE CALCUL COMBINATOIRE

253. — Le calcul combinatoire, bien qu'il ait pour objet certaines propriétés relatives aux nombres, ou plus exactement à des assemblages de nombres, ne fait point partie intégrante de l'Arithmétique classique. C'est au XVIe siècle seulement qu'il prit figure, et il fallait être déjà familiarisé avec les notations algébriques pour avoir l'idée d'en exprimer les règles par des formules symboliques comme nous le faisons aujourd'hui. Cette idée fut celle des savants de la Renaissance Paciuolo (1), Tartaglia (2), Cardan (3). Elle fut reprise au XVIIe siècle par Fermat (4), Pascal (5), Frénicle (6), Huygens (7), qui établirent sur des bases solides les principes du nouveau calcul.

254. — Les questions qui relèvent du calcul combinatoire sont de celles que nous avons journellement l'occasion de nous poser.

(1) *Summa de arithmetice*, 1492, *Part. I, dist.* 2, *tract.* 5.
(2) *General Trattato*, 1552, II, liv. I, p. 17.
(3) *Exaereton mathematicorum*, 1572, prop. 170. *Opera*, t. IV, p. 557. — On trouve également les premières formules du calcul combinatoire dans un ouvrage français publié à Lyon en 1559, la *Logistica quae et arithmetice vulgo dicitur* de BUTEO (de son vrai nom : BORREL), p. 305-329 (*Bibl. N.*, V. 19182).
(4) Correspondance avec PASCAL, 1654. (*Œuv. de Pascal*, t. III, p. 367 sqq.).
(5) *Ibid.* et dans le *Traité du Triangle Arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière*, écrit par Pascal en 1654 (*Œuv.* III, p. 433 sqq.).
(6) *Abrégé des combinaisons* imprimé en 1693, ap. *Divers ouvr. de Math. et de Phys. par Messieurs de l'Ac. Royale des Sciences.*
(7) *De ratiociniis in ludo aleæ*, 1657, imprimé à la fin de *Exercitationes mathematicae* de FRANÇOIS SCHOOTEN (*Bibl. N.*, V. 6239).

Déjà, s'il faut en croire Plutarque, le philosophe Xénocrate se demandait, au IVe siècle av. J.-C., combien de syllabes on peut composer avec les lettres de l'alphabet. Plus précisément, cherchons combien il peut exister de mots composés de trois ou de quatre lettres (étant admis ou n'étant pas admis que la même lettre peut figurer plusieurs fois dans le même mot) ; demandons-nous de combien de manières différentes peuvent être placés douze convives autour d'une table ; proposons-nous de trouver les diverses combinaisons de chiffres que peut amener un joueur avec deux, ou trois, ou quatre dés ; cherchons le nombre de boulets sphériques que l'on peut placer dans une pile de forme pyramidale. Ce sont là des problèmes qui se résolvent tous au moyen des mêmes formules, — formules simples, claires, et dont l'application se fait pour ainsi dire mécaniquement.

Etant donné ces qualités, il n'est point surprenant que le calcul combinatoire ait été considéré, dès son origine, comme l'un des plus précieux instruments de la science mathématique. Quelles ne furent pas les espérances suscitées par lui ! N'est-ce point le calcul combinatoire qui inspire au Père Mersenne ce rêve insensé de déterminer mathématiquement les plus belles des mélodies ?

Mersenne est frappé de ce fait que toute mélodie est une combinaison de sons ou d'intervalles, de même qu'un discours est une combinaison de mots composés eux-mêmes avec les vingt-quatre lettres de l'alphabet. Ne pourrait-on, dès lors, former à l'avance toutes les combinaisons fournies par les notes de la gamme ? On construirait ainsi mécaniquement la totalité des mélodies possibles, et parmi ces mélodies on recueillerait les plus belles. C'est ainsi que Mersenne est conduit à écrire un chapitre intitulé : *Dans lequel il est traité des beaux airs et des beaux chants et montré s'il est possible de faire un chant sur un sujet donné qui soit le plus beau de tous ceux qui puissent être faits sur le même sujet* (1).

255. — Passant du domaine de l'utopie à celui de la fantaisie, nous trouvons le calcul combinatoire à la base des problèmes de société auxquels on donne souvent le nom de *récréations mathé-*

(1) *La Vérité des Sciences contre les sceptiques et pyrrhoniens*, 1625, chap. x (*Bibl. N.*, R. 9668).

matiques. Un recueil en fut fait au XVIIe siècle, qui fut complété par Mydorge et Henrion [1]. Des recueils plus étendus, tels que celui d'Ozanam, parurent au XVIIIe et XIXe siècle [le dernier en date est celui de Rouse-Ball et Fitz-Patrick [2]].

Ozanam nous propose par exemple les problèmes suivants [3] : *Six personnes devant dîner ensemble, il s'élève entre elles un combat de politesse* [4] ; *enfin, quelqu'un, voulant terminer la contestation, propose de se mettre à table comme l'on se trouve sauf à dîner ensemble le lendemain et les jours suivants jusqu'à ce que l'on ait épuisé tous les arrangements* [5] *possibles. On demande combien de dîners devront être donnés pour cet effet.* — Et plus loin : *De combien de manières peut-on, en conservant la mesure, varier ce vers : Tot tibi sunt dotes virgo quot sidera cœlo ?*

256. — Mais ce ne sont là qu'amusements et curiosités. L'intérêt véritable du calcul combinatoire tient aux services éminents qu'il a rendus à l'algèbre et au calcul des probabilités. Il sera question des premiers dans notre *Deuxième livre*, et des seconds nous dirons un mot à la fin du présent paragraphe. Il nous faut auparavant faire connaître et démontrer les formules combinatoires fondamentales.

257. Permutations. — Considérons trois objets distincts que nous pouvons désigner par une même lettre a affectée des indices 1, 2, 3 — c'est-à-dire par les symboles

$$a_1, \; a_2, \; a_3.$$

Ecrivons ces 3 symboles (je les appellerai « *lettres* » pour simplifier le langage) à côté les uns des autres dans des ordres divers : je puis écrire :

$$a_1a_2a_3 \quad \text{ou} \quad a_1a_3a_2 \quad \text{ou} \quad a_2a_1a_3 \quad \text{ou} \quad a_2a_3a_1 \quad \text{ou} \quad a_3a_1a_2 \quad \text{ou} \quad a_3a_2a_1.$$

[1] 5e et dernière éd. en 1670 (*Bibl. N.*, V. 18496).

[2] *Récréat. mathém.* (trad. franç., chez Hermann, 3 vol., 2e édit., 1907-09).

[3] *Récréat. mathém.*, 2e éd., t. I, Paris, 1778, p. 901 et suiv. (*Bibl. N.*, V. 18316).

[4] « C'est probablement — remarque OZANAM en note — dans quelque ville de province éloignée de la capitale ».

[5] Le mot « arrangement ». est pris par OZANAM dans le sens de « combinaison ».

Ces divers groupements des trois lettres a_1, a_2, a_3 écrites dans des ordres différents sont appelés *permutations* [1] des trois lettres ; ce qui veut dire qu'on passe d'un groupement à un autre en permutant, ou échangeant entre elles, les lettres a_1, a_2, a_3 : ainsi, pour passer du groupement $a_1a_2a_3$ au groupement $a_1a_3a_2$, je fais passer la lettre a_3 à la place qu'occupait a_2 et inversement.

Il est facile de vérifier qu'il n'existe point d'autre ordre possible pour les lettres a_1, a_2, a_3 que les six ordres indiqués ci-dessus ; d'où je conclus que les trois lettres a_1, a_2, a_3 comportent *six permutations*.

On peut démontrer ce fait *a priori* en déterminant plus généralement le nombre des *permutations* de lettres en nombre quelconque.

Considérons m objets désignés par des lettres affectées d'indices

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_m.$$

Nous appellerons *permutations* de ces m lettres tous les groupements que l'on peut former en plaçant ces m lettres à la suite les unes des autres *dans des ordres différents*. Ainsi les groupements

$$a_1a_2 \ldots a_{m-1}a_m,\quad a_2a_1a_3 \ldots a_{m-1}a_m, \text{ etc.}$$

sont des permutations des m lettres. — Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

258. Théorème. — *Le nombre des permutations de m lettres est égal au produit des m premiers nombres, c'est-à-dire au produit* $1 \times 2 \times 3 \ldots \times m$.

Pour démontrer ce théorème, nous emploierons la méthode dite *récurrente* [2], qui est devenue depuis Pascal l'une des plus importantes méthodes mathématiques : nous montrerons que *si le théorème est vrai pour une certaine valeur de m*, il est vrai pour la suivante (or il est vrai pour $m = 1$; donc il est vrai quel que soit m).

[1] Le mot *permutatio* a été employé pour la première fois par Jacques Bernouilli, *Ars Conjectandi op. posthumum*, Bâle, 1713, 2e part., ch. I (p. 74).

[2] Le mathématicien sicilien Maurolyco (1494-1575) avait déjà employé cette méthode.

259. — Supposons donc qu'il ait été déjà démontré que le nombre des permutations de $m - 1$ lettres est $1 \times 2 \ldots \times (m-1)$ et désignons, pour abréger, ce nombre par P_{m-1}. Nous avons à établir que le nombre — soit P_m — des permutations de m lettres est égal à $m . P_{m-1}$.

Or on obtiendra évidemment toutes les permutations des lettres $a_1, \ldots, a_m$ en procédant de la manière suivante :

Plaçons la lettre a_1 en tête, et à la suite les $(m-1)$ lettres $a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ dans tous les ordres possibles. Nous obtiendrons ainsi autant de permutations (de nos m lettres) qu'il y a de manières de disposer les $m - 1$ lettres $a_2, \ldots, a_m$, c'est-à-dire P_{m-1}. Ce sont là toutes les permutations des m lettres données où a_1 occupe la première place.

Considérons encore toutes les permutations des $m - 1$ lettres $a_2, \ldots, a_m$, et dans chacune intercalons a_1 à la seconde place (après la première lettre à gauche). Nous obtenons ainsi P_{m-1} nouvelles permutations des m lettres : ce sont toutes les permutations où a_1 occupe la seconde place.

Nous aurons de même P_{m-1} permutations des m lettres, où a_1 occupe la troisième place, et ainsi de suite ; finalement P_{m-1} permutations où a_1 occupe la $m^{ième}$ (dernière place).

Les diverses permutations ainsi obtenues sont au nombre de m *fois* P_{m-1} : elles constituent la totalité des permutations des m lettres. Donc

$$P_m = m . P_{m-1}, \tag{1}$$

comme nous l'avions annoncé. Cette formule est valable pour toutes les valeurs de l'entier m.

Mais *une* lettre n'a évidemment qu'*une* permutation, donc $P_1 = 1$. La formule (1) nous donne alors

$$P_2 = 2 . P_1, \quad \text{d'où} \quad P_2 = 2$$
$$P_3 = 3 . P_2, \quad \text{d'où} \quad P_3 = 2 . 3$$

et ainsi de suite ; finalement :

$$P_m = 1 . 2 \ldots (m-1) . m.$$

260. Remarque. — Le produit $1 . 2 \ldots m$ (*produit des m pre-*

miers nombres entiers) est souvent désigné (pour abréger l'écriture) par le symbole $m!$ qui se lit : « *factorielle m* ».

261. Arrangements. — Etant données m lettres distinctes

$$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m,$$

on appelle *arrangements de ces m lettres p à p* tous les groupements que l'on peut former en plaçant p de ces m lettres à la suite les unes des autres dans des ordres différents (cette définition suppose que [1] $p \leqslant m$). — Deux arrangements seront regardés comme distincts s'ils diffèrent soit par l'*ordre*, soit par la *nature* des lettres qui y figurent. Dans le cas où $p = m$, les arrangements ne sont autres que les permutations des m lettres considérées (d'après la définition du n° **257**).

Exemple. — Soient données quatre lettres a_1, a_2, a_3, a_4. Les arrangements de ces quatre lettres deux à deux sont

$$\begin{array}{llllll} a_1a_2 \text{ et } a_2a_1; & a_1a_3 \text{ et } a_3a_1; & a_1a_4 \text{ et } a_4a_1; \\ a_2a_3 \text{ et } a_3a_2; & a_2a_4 \text{ et } a_4a_2; & a_3a_4 \text{ et } a_4a_3; \end{array}$$

ces arrangements sont au nombre de 12.

On démontre, d'une manière générale, le théorème suivant :

262. Théorème. — *Le nombre des arrangements de m lettres p à p est égal au produit de p nombres entiers consécutifs décroissant à partir de m.* En d'autres termes, ce nombre d'arrangements, que je désignerai (suivant une notation consacrée) *par le symbole* A_m^p, est :

$$(2) \qquad A_m^p = m \,.\, (m-1) \ldots (m-p+1).$$

Pour démontrer ce théorème nous emploierons de nouveau la méthode récurrente.

Supposons formés tous les arrangements des m lettres $p-1$ à $p-1$, dont le nombre est désigné par A_m^{p-1}. Prenons l'un de ces arrangements et écrivons à la suite l'une quelconque des $m-(p-1)$ c'est-à-dire $m-p+1$ lettres qui n'y figurent pas [2] : en opérant

[1] Voir sur ce signe, p. 47, note 1.

[2] L'arrangement dont nous parlons ayant $p-1$ lettres, il y a $m-(p-1)$, c'est-à-dire $m-p+1$ de nos lettres qui n'y figurent pas.

ainsi avec cès $m - p + 1$ lettres successivement, nous obtenons $m - p + 1$ arrangements de nos m lettres p à p. Faisant la même série d'opérations à partir de l'un quelconque des arrangements des m lettres $p-1$ à $p-1$, nous obtiendrons A_m^{p-1} *fois* $(m-p+1)$ arrangements de nos lettres p à p, donc en tout $A_m^{p-1}.(m-p+1)$ arrangements.

Je dis que les arrangements ainsi obtenus sont tous *distincts* et constituent la totalité des arrangements des m lettres p à p.

En effet : 1° Deux quelconques des arrangements obtenus comme il vient d'être dit sont *distincts*, car, ou ils sont déduits d'arrangements des m lettres $p-1$ à $p-1$ qui sont distincts (et alors ils diffèrent par l'ordre ou la nature de leurs $p-1$ premières lettres), ou ils diffèrent par leur dernière lettre. — 2° Tout arrangement des m lettres p à p est formé d'un arrangement des m lettres $p-1$ à $p-1$ suivi d'une dernière lettre différente ; donc cet arrangement est l'un de ceux que nous avons construits tout à l heure.

Ainsi le nombre $A_m^{p-1}.(m-p+1)$ obtenu ci-dessus est le nombre total A_m^p des arrangements de m lettres p à p, et nous avons la formule

$$A_m^p = A_m^{p-1}.(m-p+1), \tag{3}$$

qui est valable pour toutes les valeurs du nombre entier m.

Or le nombre des arrangements de m lettres 1 à 1 se réduit évidemment à m. Donc $A_m = m$. La formule (3) nous donne par conséquent

$$A_m^2 = A_m^1.(m-2+1) = m \times (m-1)$$
$$A_m^3 = A_m^2(m-3+1) = A_m^2.(m-2) = m \times (m-1) \times (m-2)$$

et ainsi de suite ; finalement

$$A_m^p = m \times (m-1) \times (m-2) \dots (m-p+2) \times (m-p+1).$$

263. Remarque. — D'après la définition du n° **261**, les lettres qui figurent dans un même arrangement sont toutes distinctes. On a quelquefois l'occasion de considérer des groupements de lettres qui ne satisfont pas à cette condition : on comptera ces nouveaux grou-

pements par des procédés analogues à ceux que nous venons d'employer. Ainsi l'on appelle *arrangements avec répétition de m lettres p à p* tous les groupements que l'on peut former en plaçant p lettres *au plus* à la suite les unes des autres dans des ordres différents, une même lettre pouvant figurer plusieurs fois dans le même groupement. On démontre que le nombre des arrangements ainsi définis est égal *au produit de p nombres entiers consécutifs croissants à partir de m, c'est-à-dire à* $m \times (m+1) \ldots \times (m+p-1)$.

Ainsi, par exemple, les arrangements avec répétition de trois lettres a, b, c deux à deux sont aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb, aa, bb, cc; leur nombre est $3 \times 4 = 12$.

264. Combinaisons. — Etant données m lettres distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_m$, et un nombre entier p, on appelle *combinaisons de m lettres p à p* tous les groupements que l'on peut former en prenant p de ces m lettres (sans qu'il soit tenu compte de l'ordre dans lequel on les range). Ainsi deux combinaisons ne sont regardées comme distinctes que si elles diffèrent par la *nature* des lettres qui y figurent. Une même lettre ne figure qu'une fois dans chaque combinaison [1].

Pour évaluer le nombre des combinaisons de m lettres p à p — nombre que nous désignons par C_m^p — nous raisonnerons comme il suit :

On obtient tous les *arrangements* de m lettres p à p en considérant successivement toutes les *combinaisons* de ces m lettres p à p et formant pour chacune d'elles toutes les *permutations* des p lettres qui y figurent.

Il résulte de là que le nombre A_m^p est égal à C_m^p fois le nombre des permutations de p lettres, c'est-à-dire (voir n° **259**) à

$$C_m^p \times 1 \times 2 \times \ldots \times p.$$

[1] Si l'on écarte cette condition, on obtient les combinaisons de m lettres p à p *avec répétition* (comparer n° 263). On démontre que le nombre de ces combinaisons est égal à

$$\frac{m.(m+1) \ldots (m+p-1)}{1.2 \ldots p}.$$

Tenant compte alors de la valeur de A_m^p (n° **262**) on voit que (1)

$$(4) \qquad C_m^p = \frac{m \times (m-1) \dots (m-p+1)}{1 . 2 \dots p}.$$

Pour $m = p$, la formule donne

$$C_m^m = \frac{m(m-1) \dots 1}{1 . 2 \dots m} = 1.$$

Remarque. — On déduit aisément de la formule (4) que l'on a, *quel que soit m*,

$$C_m^2 = C_m^{m-2}, \qquad C_m^3 = C_m^{m-3}, \text{ etc.}$$

En effet, on a, par exemple :

$$C_m^2 = \frac{m.(m-1)}{1 . 2} \text{ et } C_m^{m-2} = \frac{m.(m-1) \dots [m-(m-2)+1 \dots]}{1 . 2 \dots (m-2)} = \frac{m.(m-1) \dots 3}{1 . 2 \dots (m-2)}.$$

Divisant les deux termes de cette dernière fraction par le produit $3 . 4 \dots (m-3)(m-2)$, il reste un numérateur $m.(m-1)$ et un dénominateur $1 . 2$.

265. — La règle qui fournit le nombre des combinaisons de m objets p à p paraît avoir été connue du mathématicien hindou *Bhaskara* (XIIe siècle), du moins pour les petites valeurs de m et de p. Elle est très explicitement formulée dans un petit memento en vers latins (2) qui fut composé par *William Buckley* (King's College, Cambridge vers 1550).

Entrant dans plus de détails, Pascal déduit le nombre C_m^p des propriétés de son triangle arithmétique (n° **19**). Il nous fait connaître, d'autre part, à la fin de son traité des *Combinaisons* (3), la for-

(1) Voir *Lilavati* (cf. p. 116, note 1), ch. IV, trad. COLEBROOKE, p. 49-50 Bhaskara se demande par exemple de combien de manières on peut combiner différents goûts, tels que les goûts sucré, piquant, amer, salé, âcre, acide. — Il cherche également comment on peut déterminer les permutations des diverses variétés de mètres usités en prosodie depuis l'*uctó* (vers monosyllabique) jusqu'à l'*uteriti* (vers de 36 syllabes).

(2) Ce memento (*Arithmetica memorativa*) a été imprimé à la suite de la *Dialectice* de SETON, Londres, 1639. (*Bibl. N.*, B. 10863).

(3) Composé en 1654, *Œuvr.*, t. III, p. 556 sqq.

mule de C_m^p qui fut trouvée par l'un de ses amis M. de Gagnières [1]. Cette formule est exactement, celle que nous avons donnée plus haut.

Datis numeris — dit Pascal (*Œuv. de Pascal*, t. III, p. 591 — *v. g.*, 2, 6, *invenire quot modis* 2 *combinatur in* 6. — *Assumatur inquit* (Gagnières), *progressio duorum terminorum, quia minor numerus est* 2, *inchoando a majore* 6, *ac retrogrediendo, seu detrahendo, unitatem ex unoquoque termino hoc modo :* 6, 5 ; *deinde assumatur altera progressio inchoando ab ipso minore* 2, *ac similiter retrogrediendo hoc modo :* 2, 1. *Multiplicentur invicem numeri primæ progressionis* 6, 5, *sitque productus* 30. *Multiplicentur et numeri secundæ progressionis* 2, 1, *sitque productus* 2. *Dividatur major productus per minorem : quotiens est quæsitus.*

266. Probabilité mathématique. — Le calcul des probabilités est contemporain du calcul combinatoire : il a été créé de toutes pièces, ou peu s'en faut, de 1654 à 1656, par Fermat, Pascal et Huygens (voir les références données au n° **252**). Nous n'aborderons pas ici l'étude de ce calcul ; nous voulons seulement indiquer et éclairer par un exemple élémentaire la définition sur laquelle il repose.

Soit une variété de cas possibles, dont certains sont favorables à un événement, certains défavorables ; on entend par *probabilité de l'événement* le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles.

Supposons, par exemple, que nous jetions deux dés. Quelle est la probabilité pour que nous amènions un 6 ?

Pour avoir le nombre total des cas possibles, appelons A et B nos deux dés, et écrivons tous les couples de chiffres que peuvent donner les deux dés, en plaçant toujours le prémier le chiffre donné par le dé A et le second le chiffre donné par le dé B : nous obtenons ainsi 6 couples commençant par 1 (le second chiffre pouvant être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6) et de même 6 couples commençant par 2 ou par 3, etc., donc en tout 6×6 ou 36 cas possibles.

Parmi ces cas, combien sont favorables à l'événement dont nous

(1) Voir sur GAGNIÈRES, au t. III des *Œuv. de Pascal*, l'Appendice II, p. 597.

nous occupons? Nous avons d'abord 5 cas favorables pour lesquels le chiffre 6 est donné par le dé A, le dé B marquant un autre chiffre (1, 2, 3, 4 ou 5) — de même, 5 cas favorables, pour lesquels le chiffre 6 est donné par le dé B, le dé A marquant un autre chiffre — enfin un dernier cas favorable est le cas où nous amenons le double 6. Le nombre total des cas favorables est donc $5 + 5 + 1$ ou 11. J'en conclus que la probabilité cherchée est $\frac{11}{36}$.

Ce seul exemple suffit à faire pressentir la connexion qu'il y a entre le calcul combinatoire et la théorie des probabilités. Le lecteur qui désirerait poursuivre l'étude de cette théorie pourra consulter l'excellent ouvrage de M. E. Borel : *Eléments de la théorie des probabilités* (2e éd. 1910).

LIVRE DEUXIÈME

CONSTRUCTION

CHAPITRE PREMIER

LE CALCUL ALGÉBRIQUE

1. — Objet et ambitions de l'algèbre.

267. — Un savant de Bagdad, Mohammad ibn Mousa Al Khwarizmi, composa au IXe siècle un traité qui eut une fortune remarquable : l'*Al'djabr w'al moqabalah* (1). Ce titre est le nom d'une technique, ou méthode de calcul, que les Arabes avaient tirée de sources grecques et indiennes. Deux opérations fondamentales, effectuées l'une et l'autre sur les sommes de nombres relatifs, le caractérisent : la *djebr*, qui fait passer d'un membre d'une égalité dans l'autre tous les termes affectés (précédés) du signe —, de manière à ne laisser subsister dans chaque membre que des termes affectés du signe +; la *moqabalah*, ou réduction des termes semblables (*vide infra* n° **281**).

L'al'djebr ou'al moukabalah est devenue l'algèbre moderne, et le nom d'Al-Khwarizmi, transformé en *algorithme* (2) s'est perpétué comme nom commun. Ainsi, à défaut même d'autres témoignages — et nous en avons un grand nombre — les mots suffiraient à attester l'origine orientale de notre calcul algébrique.

(1) Ce traité a été publié avec une traduction anglaise par ROSEN : Londres, 1831. Voir sur KHWARIZMI, *supra*, p. 6, note 3.
(2) On désigne aujourd'hui par le mot *algorithme* un système de notation symbolique quelconque.

268. — L'algèbre est, disons-nous, une technique ayant pour objet le calcul; cette technique nous promet plusieurs avantages appréciables : grâce à la simplicité et à la fixité de ses procédés, elle prétend opérer rapidement, sûrement, mécaniquement, pertinemment.

En premier lieu, l'Algèbre sera rapide. Elle se servira donc d'abréviations dans le langage et dans l'écriture. C'est ainsi que déjà Diophante d'Alexandrie employait des signes abrégés pour désigner les puisssances ([1]) et que certains géomètres grecs représentaient par des lettres de l'alphabet les grandeurs ([2]) ou nombres qui reviennent plusieurs fois dans un même calcul. — Quant aux opérations — effectuées ou à effectuer — elles seront indiquées par des signes conventionnels ([3]) (*signes opératoires*) : tels les signes =, +, etc., dont nous nous sommes servis dès le début de cet ouvrage, et qui sont d'ailleurs — notons-le en passant — d'origine assez récente [XVIe ou XVIIe siècle, pour la plupart ([4])].

En second lieu, l'algèbre opérera à coup sûr, parce qu'elle réduit les calculs à l'application de règles fixes et de formules données une fois pour toutes.

D'où viennent ces règles et ces formules? Ce sont les définitions mêmes des opérations fondamentales qui vont nous les fournir.

Le calcul arithmétique n'est autre chose, nous l'avons dit, que la combinaison de certains nombres suivant des lois déterminées. Cependant lorsque pratiquement nous avons à faire un calcul, nous oublions dans notre hâte d'arriver au résultat, les nombres com-

([1]) *Vide supra*, p. 11, note 1.

([2]) Les Grecs faisaient usage de ce langage abrégé dans les démonstrations géométriques du type euclidien. Les modernes — JORDANUS NEMORARIUS en particulier (XIIIe siècle, voir p. 115, *note* 1) — l'introduisirent dans le calcul proprement dit.

([3]) Dans l'écriture égyptienne, une patte d'oiseau, orientée dans un sens ou dans l'autre, jouait le rôle de nos signes + et —.

([4]) On trouve les signes +, — dans l'ouvrage de WIDMAN signalé plus bas p. 280, note 1. Cependant la plupart des auteurs du XVIe siècle se servaient des lettres p̃ et m̃ pour signifier *plus* ou *moins*. Le signe × apparaît dans le *Clavis mathematica* d'OUGHTRED (Oxford, 1631). — Le signe = fut employé en Angleterre au XVIIe siècle; cependant les mathématiciens français du XVIIe siècle exprimaient d'ordinaire l'égalité par le signe ∞) (peut-être un *æ*, première lettre du mot *æqualis*).

binés et la façon dont ils sont associés : l'édifice n'est pas plus tôt construit que nous perdons de vue l'agencement des matériaux qui nous ont permis de l'obtenir; et, ainsi, la résolution d'un problème ne nous est d'aucun profit pour celle des problèmes suivants. En analysant cette faiblesse de l'arithmétique nous voyons comment il convient d'y remédier. Pourquoi ne ferions-nous pas, avant même de donner aux nombres sur lesquels nous opérons des valeurs déterminées, une étude formelle et *a priori* des différentes combinaisons qu'engendrent nos opérations? Nous savons que ces combinaisons sont susceptibles d'être obtenues de plusieurs manières (l'ordre des opérations effectuées pouvant être modifié). Il serait dès lors fort utile de savoir *à l'avance* quelle est, parmi les différentes formes d'une même combinaison, celle qui sera le plus facile à calculer. D'ailleurs telle forme avantageuse dans un problème le sera moins dans un autre. D'où l'intérêt d'une étude systématique déterminant les diverses *transformations* auxquelles se prêtent les combinaisons d'opérations. Il conviendra, en outre, de nous mettre en mesure d'effectuer à première demande les transformations utiles, en en définissant le mécanisme par des *formules* immédiatement applicables.

269. — Nous connaissons déjà, remarquons-le, de telles formules de transformation : celles, par exemple, qui expriment les premières propriétés des opérations fondamentales (associativité, commutativité, distributivité). Ainsi les égalités

$$a+b=b+a, \quad a\times b=b\times a, \quad a\times(b+c)=a\times b+a\times c, \text{ etc.}$$

définissent des transformations qui restent légitimes *quelles que soient les valeurs numériques figurées par les lettres a, b, c* [la combinaison $a+b$ est toujours équivalente à la combinaison $b+a$, la combinaison $a\times b$ à la combinaison $b\times a$, etc.]. En associant ces égalités nous obtiendrons de nouvelles transformations s'exprimant par autant de formules que l'on appelle « *formules algébriques* ».

Ces premières « formules » — j'entends premières en simplicité, non en date, car on n'éprouva point tout de suite le besoin de les écrire explicitement — ces premières formules mettent en

évidence les caractères fondamentaux que nous retrouvons dans toutes les autres.

Premier caractère : les formules de l'algèbre, depuis François Viète [1], portent d'ordinaire sur des lettres, et c'est ainsi qu'elles fournissent à l'avance des règles invariables, applicables à une infinité de questions : autant de valeurs différentes on donne aux lettres, autant l'on a de problèmes pour lesquels vaut la même règle.

Second caractère fondamental : l'analogie que l'algèbre établit entre les nombres fournis par des problèmes différents est une analogie de structure. Imaginons, par exemple, que deux questions fassent intervenir, chacune, une quantité [2] définie comme produit d'une somme de deux nombres par le carré d'un troisième : l'algèbre notera cette ressemblance en écrivant les deux quantités sous la même forme : $(a + b) \times c^2$ ou [3] $(a + b) . c^2$, et elle ne se préoccupera pas de savoir si les *valeurs* des nombres a, b, c diffèrent d'une quantité à l'autre.

Nous découvrons ainsi l'un des principaux secrets de l'algèbre, secret bien simple, mais dont encore il fallait s'aviser : l'*algèbre, en principe, n'effectue pas les opérations* : supposons, par exemple, qu'elle ait à parler de la somme de a et de b : au lieu de calculer cette somme ou de la désigner par une lettre α, elle écrit $a + b$ ou $(a + b)$ et ne cherche pas plus loin. Dès lors, dans une formule algébrique, *la structure ou composition des nombres apparaît toujours*. Cela permet de voir du premier coup d'œil la connexion qu'il y a entre une formule et tels ou tels problèmes, différents par les nombres qui y figurent, mais semblables par les opérations qui y interviennent. D'autre part, la formule est toujours prête à subir immédiatement de nouvelles transformations.

[1] En établissant une distinction systématique entre la *logistica numerosa* (calcul numérique) et la *logistica speciosa* (calcul portant sur des lettres), VIÈTE constitue l'algèbre moderne en science autonome. [Cf le *Cours mathématique* d'HERIGONE, t. II, 1635 où les deux algèbres sont appelées : *algèbre nombreuse* et *algèbre spécieuse*]. Sur les symboles littéraux en algèbre, voir aussi p. 281, note 1 et n° 280.

[2] J'entends ici par le mot « quantité » : « *résultat d'une opération* », ou : « *mesure d'une grandeur, affectée du signe + ou —* », par conséquent : « *nombre relatif* ». Voir aussi *infra*, n° 307.

[3] Voir sur ces signes, le *Prem. liv.*, ch. 1, § 2.

270. — En définitive, l'algèbre est une *Règle* (*Regula*, disaient les algébristes de la Renaissance; *Ars certis legibus et præceptis contenta*, disait un commentateur de Descartes [1])) : c'est la règle, ou, plus exactement, l'ensemble des règles d'après lesquelles on effectue certaines transformations ou combinaisons dites algébriques ; en général, ces combinaisons sont celles que définissent les opérations fondamentales de l'arithmétique : mais rien ne nous interdirait d'en imaginer d'autres (*vide infra*, chap. v, § *I*).

Ajoutons que, comme nous l'avons dit plus haut (**268**) les règles de l'algèbre visent à devenir *mécaniques*, c'est-à-dire applicables par tous et toujours, sans intervention de l'intelligence. C'est pourquoi Descartes se croit autorisé à nous donner les préceptes de son algèbre sous forme de commandements, sans les expliquer, sans nous demander de refaire l'effort intellectuel qu'il a lui-même accompli une fois pour toutes et pour tous les hommes : « L'addition, dit-il [2], se fait par le signe + ... Comme pour ajouter a à b, j'écris $a + b$. La soustraction se fait par le signe —. Comme pour soustraire a de b, j'écris $b - a$. S'il est question de multiplier des lettres l'une par l'autre, il les faut joindre ensemble, etc. ».

Il ne faut toutefois pas conclure de là que l'algèbre soit une règle aveugle : c'est un art qui exige, chez celui qui l'exerce, de l adresse et du savoir faire. En effet, parmi toutes les transformations possibles d'une formule, l'algébriste doit choisir celle qui est appropriée au calcul qu'il entreprend [3], et il peut faire ce choix plus au moins pertinemment. Pour résoudre une équation, dit l'Indien Bhaskara, « on *prépare adroitement* deux membres en équilibre, en ajoutant, retranchant, multipliant ou divisant » [4] : la règle n'en dit pas plus long : à l'algébriste de voir par lui-même comment il apprêtera son équation [5].

[1] Erasmius Bartholinus dans son Epître Dédicatoire de l'édition latine de la *Géométrie* (*vide infra*, p. 284, note 1).

[2] *Calcul de Monsieur Descartes*, *Œuv. de Descartes*, t. X (*vide infra*, ch. III). — Cf. le *Cours mathémathique* d'Herigone cité ci-dessus.

[3] *Excogitanda ab artifice* — dit Viète (*De recognitione æquationum* ap. *Opera Mathem.*. Leyde, 1646, p. 92) — et *tendanda, quae suo fini magis inservire conjiciet figmenta.*

[4] Cité par Rodet, *Journal asiatique*, t. XI, 1878, p. 17.

[5] L'apprêt de l'équation *(De emendatione aequationum)* joue un grand rôle dans l'algèbre de Viète. Cet apprêt se fait au moyen de « *transforma-*

271. — Nous comprenons maintenant quelles sont les conditions auxquelles il faut satisfaire pour être un habile algébriste. Il faut savoir oublier la signification des éléments combinés pour ne plus faire attention qu'au mécanisme de la combinaison. Il faut considérer les formules comme des assemblages, que l'on retourne en tous sens, que l'on compose et décompose de toutes les manières — par la *djebr*, par la *moukabalah* ou d'autres procédés — afin de faire apparaître de nouvelles combinaisons intéressantes. L'algébriste jongle avec les formules ; il les triture, il les *pulvérise*, suivant l'heureuse expression employée par Brahmagoupta pour désigner une méthode fondamentale de son algèbre : « celui qui con« naîtra l'usage de la méthode pulvérisatrice, des chiffres, des « quantités négatives et positives, de l'élimination du terme moyen « [*transformation utilisée dans la théorie des équations*], des sym« boles et expressions [algébriques], celui là, dit Brahmagoupta, « deviendra un maître parmi les savants (1) ».

272. — Ces remarques nous expliquent l'histoire de l'algèbre. Les savants grecs ne pouvaient pas être de bons algébristes : ils prétendaient, en effet, saisir par l'intuition, voir d'une vue intellectuelle directe, des êtres mathématiques aussi réels ou plus réels que les objets sensibles (n° **1**) ; comment, dès lors, auraient ils pu négliger ces êtres parfaits, et faire table rase de la réalité pour y substituer des symboles? Les promoteurs de l'algèbre furent, en Grèce, ces logisticiens ou calculateurs, que Platon mettait au ban de la science (*supra*, n° **1** et p. 121, note 1), et l'une des principales innovations de l'Alexandrin Diophante — en qui l'on veut voir le premier algèbriste — consista simplement à appeler *arithmétique* ce que l'on prenait avant lui pour de la logistique (2).

tions » telle que l'*expurgatio*, la *transmutatio*, l'*anastrophe*, l'*antithesis*, etc. Mais les transformations de VIÈTE sont en général fondées sur des considérations géométriques qui devraient rester étrangères à l'algébriste (*vide infra*, 272).

(1) COLEBROOKE (*Algebra from the sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara*, 1817, p. 325),

(2) « Il a, dit PAUL TANNERY (*La Géométrie grecque*, 1888, p. 50), intitulé son ouvrage Ἀριθμητικά, alors que la matière en avait été jusqu'à lui considérée comme appartenant à la logistique. Cette innovation est plus qu'une simple affaire de mots ; elle revèle le sentiment très juste que la matière dont il s'agit appartient à la science abstraite et primor-

Au rebours des savants grecs, les Hindous furent avant tout des calculateurs [1]. Esprits pratiques, ils ne se préoccupaient point de rendre leurs théories rigoureuses et belles. Il n'y a pas même chez eux de théorie scientifique à proprement parler, mais seulement des règles, formulées en vers, le plus souvent, et sans démonstration. « Dis-moi [2], chère et belle Lilavati — ainsi s'exprime Bhaskara — toi qui as les yeux comme ceux du faon, dis-moi quel est le résultat de la multiplication, etc. ». Et la réponse suit. Bhaskara nous donne, sur ce ton, un ensemble de règles, qui constituent « une facile méthode de calcul, charmante par son élégance, claire, concise, douce, correcte, agréable à apprendre ». — Un recueil de recettes et de formules, voilà donc ce qu'est la science pour les Hindous ; c'est pourquoi ils furent de grands algébristes [3].

diale et non pas à une science appliquée et concrète ». — Selon une remarque de HANKEL (*Zur Gesch. d. Mathem. in Altertum u. Mittelalter*, Leipzig, 1874), le but de DIOPHANTE était moins d'enseigner des méthodes que d'obtenir une collection de résultats. Par là, le point de vue du savant alexandrin se trouvait fort éloigné du point de vue de l'algèbre moderne que nous venons de chercher à définir. — Il y a pareillement (quoique pour d'autres raisons) divergence absolue de tendances entre l'algèbre moderne et cette partie de la géométrie grecque que l'on a souvent appelée *algèbre géométrique* (*vide infra*, le chapitre III de ce *Deuxième Livre*).

(1) La science hindoue subit-elle indirectement des influences grecques ? C'est là une question obscure que nous ne saurions trancher ; il est fort possible que l'on ait eu aux Indes quelques échos des travaux de DIOPHANTE.

(2) COLEBROOKE, *op. cit.* (*supra* p. 276, note 1), p. 6. Le traité intitulé *Lilavati (La charmante)* est dédié à une femme à laquelle BHASKARA s'adresse.

(3) C'est ici le lieu de faire une remarque importante. L'algèbre des Hindous et de leurs continuateurs, les Arabes, n'est point une algèbre spécieuse au sens de Viète : je veux dire que dans cette algèbre les nombres ne sont point systématiquement remplacés par des lettres. Ce caractère de la science hindoue, est souligné par les historiens des mathématiques qui veulent voir dans l'emploi des symboles littéraux une condition essentielle de l'algèbre [cf. NESSELMANN, *Gesch. d. Algebra d. Griechen*, *passim* : voir aussi HEATH, *Diophantus of Alexandria*, Cambridge, 1910, p. 49]. Nous croyons cependant que l'absence des formules littérales n'empêche pas la science hindoue de manifester à un haut degré les tendances par lesquelles nous avons défini plus haut l'esprit algébriste. Aussi bien ne faudrait-il pas exagérer l'importance des services rendus par les lettres dans le calcul. On peut fort bien établir les formules générales de l'algèbre lors même qu'on remplace les lettres

Lorsqu'au début de la Renaissance, les tendances pratiques et utilitaires s'allièrent à de solides études théoriques, l'algèbre prit définitivement son essor [nous reviendrons longuement sur cette époque au chapitre III]. Cependant bien des algébristes du XVIe et du XVIIe siècle se trouvent encore gênés par les habitudes d'esprit qu'ils tiennent de la tradition grecque. C'est le cas du grand mathématicien vendéen, François Viète (1540-1603), à qui l'algèbre doit tant par ailleurs, et qui opéra, dans la technique même de cette science, les plus heureuses réformes [1]. Les tours de passe-passe des algébristes hindous eussent été pour Viète des non-sens, car il ne pouvait pas raisonner sur les grandeurs sans se les représenter [2]. Il ne combine que des objets de même espèce (des *homogènes*) et, suivant la tradition diophantine, il s'interdit de voir dans les quantités négatives autre chose que des grandeurs *retranchées* (*vide* **127**). Il se croit donc obligé de distinguer, et de traiter l'un après l'autre, une longue suite de problèmes qui ne diffèrent que par leur interprétation concrète et ne feraient qu'un pour un algébriste moderne.

273. — En somme, aux premiers temps de l'algèbre, ceux qui ont réussi dans cette science sont ceux qui n'avaient pas de scrupules théoriques. Il fallait en être dépourvu, par exemple, pour se permettre d'opérer sur des quantités inconnues exactement comme si elles étaient connues. Or c'est là l'une des caractéristiques et, pour beaucoup de savants, la caractéristique principale de l'algèbre.

Avec l'assistance de Dieu — ainsi débute l'algèbre d'Omar al-Khayyam [3] — et avec son concours précieux, je dis : « L'al« gèbre est un art scientifique. Son objet, ce sont le nombre « absolu et les grandeurs mesurables, étant inconnus mais rap« portés à quelque chose de connu, de manière à pouvoir être « déterminés ; les choses connues sont des quantités ou des

par des nombres ordinaires, à condition que l'on ne fasse ét t, à aucun moment de la démonstration, des valeurs particulières de ces nombres. C'est ainsi que procède encore Pascal au XVIIe siècle.

[1] *Vide supra*, n° 269.

[2] Les symboles sont pour Viète les formes de choses réelles (*rerum formae*).

[3] L *Algèbre d'Omar Alkhayyami*, traduct. Wœpcke, Berlin, 1851, p. 5. Khayyam mourut à Bagdad en 1121 — Cf. n° 49.

« rapports individuellement déterminés (*voir* n° **97**) ainsi qu'on « le reconnaît en les examinant attentivement ; ce qu'on cherche « dans cet art, ce sont les relations qui joignent les données du « problème à l'[inconnue], qui de la manière susdite forme l'objet « de l'algèbre ([1]) ».

Supposons, par exemple, que l'on sache que le nombre 2, moins le triple d'une quantité inconnue, égale cette même quantité, plus le nombre $\frac{3}{4}$: nous désignerons la quantité inconnue par la lettre x, et nous écrirons l'égalité (*équation*)

$$2 - 3.x = x + \frac{3}{4}.$$

Ajoutons, de part et d'autre du signe $=$, une même quantité $3.x - \frac{3}{4}$: nous obtenons

$$4.x = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4},$$

d'où, en divisant par 4, la valeur de x ; $x = \frac{5}{16}$.

Pour atteindre ce résultat, qui paraît aujourd'hui si élémentaire, le géomètre ou le pur arithméticien prend des voies détournées ; comment pourrait-il, en effet, introduire de but en blanc dans ses raisonnements la soustraction, ou la division par 4, d'une quantité qui n'est pas connue ? Au regard de l'intuition une semblable opération n'a pas de sens. L'algébriste, lui, ne s'embarrasse pas pour si peu ([2]), et il parvient instantanément à la solution du problème.

([1]) L'algèbre — dit plus rapidement HÉRIGONE (*Cours mathématique*, t. II, 1634) — est l'art de trouver la grandeur inconnue en la prenant comme si elle était connue et trouvant l'égalité entre elle et les longueurs données.

([2]) Ainsi JOHANNES WIDMANN (*voir la note suivante*) ne se gène pas pour additionner des œufs avec des deniers, violant ainsi le premier principe de l'Arithmétique. Voici comment il s'exprime (CANTOR, *Vorles*, t. II, p. 230) : *Eyner hat kaufft* 6 *Eyer* — 2 ℨ *pro* 4 ℨ + 1 *ey. Nu ist die frag wie kupt ein ey. — Addir die geminderte Zal der* ℨ *zu der furgelegten Zal der* ℨ. *Und subtrahir die zal des dingess* [*inconnue* ; *res*, *Ding*] *von der andern zal yrss gleychen. Und dividir die überige zal der* ℨ *mit der übrige zal der gekaufften war, und der selbige teylung quocient bericht die frag.*

274. — « Il est d'habitude, chez les algébristes, — ainsi poursuit « l'algèbre de Khayyam — de nommer dans leur art l'inconnue qu'on « se propose de déterminer : *chose* ». — Cette habitude se conserva longtemps. L'algèbre fut la *Règle de la chose* (*Regola della cosa*, en italien), et il y eut en Allemagne une école d'algébristes que l'on appella *Cossistes* (1). En latin, l'inconnue était souvent désignée par le mot « *radix* » et son carré par le mot « *census* » (2). Ainsi, dans les relations où figurent l'inconnue et son carré (*équations du second degré, vide infra*, § ***6*** ; les premiers algébristes ne dépassèrent pas ce degré), on distingue trois sortes de nombres : *radix*, *census*, *numeri simplices* (nombres ordinaires, connus). Quelle différence d'espèce y a-t-il entre ces nombres? C'est là une question que l'algébriste conséquent avec lui-même ne se posera pas.

275. — L'algèbre ne raisonne pas seulement sur des quantités connues et des quantités inconnues; elle opère également sur des quantités *variables* ou *indéterminées* (3). Et, en effet, les combinaisons ou transformations (vide § **3**) que l'algèbre fait subir à une formule où entre la lettre x (telle que $3.a.x + 2$), sont évidemment indépendantes de la valeur donnée à x, et restent par conséquent valables *quelle que soit la valeur* (*variable indéterminée*) de la quantité x (cf. n° **269**).

D'ailleurs, dans une formule telle que $3.a.x + 2$, il est toujours permis de supposer que la lettre a tient la place d'une quantité *déterminée* (4) par exemple une longueur physique que l'on est à chaque instant en état de mesurer) tandis que x est une *variable* (par exemple, la distance de la terre au soleil qui n'est ni mesurable, ni fixe). Pour les opposer aux variables, on dit que les quantités déterminées sont *fixes* ou *constantes*.

276. — La distinction des connues et des inconnues, des déter-

(1) Le premier Cossiste qui ait laissé un nom est JOHANNES WIDMANN D'EGER (magister de l'université de Leipzig, 1485), auteur d'un ouvrage intitulé : *Behende und hubsche Rechnung auf allen Kauffmannschaft*, Leipzig, 1489).

(2) Ces locutions sont employées dans les traductions latines de l'algèbre de KHWARIZMI (*Vide supra*, n° 267). Voir en particulier la traduction publiée par LIBRI (*Hist. des sc. math. en Italie*, t. I, 1838, pp. 253-54).

(3) πλῆθος μονάδων ἀόριστον, dit DIOPHANTE.

(4) πλῆθος ὡρισμένον.

minées et des indéterminées, des fixes et des variables, est essentielle à qui se préoccupe d'interpréter, par la géométrie ou d'une autre manière, les résultats de l'algèbre. Mais à l'algébriste proprement dit, nous ne saurions trop le répéter, la nature des symboles qu'il manie doit rester indifférente [1]. Plus le mécanisme combinatoire qu'est l'algèbre saura s'abstraire de la réalité, plus il étendra sa portée et son champ d'application. Une méthode universelle, une clef de toutes les sciences, voilà ce que, depuis le moine espagnol Raimond Lulle (XIII[e] siècle), toute une génération de philosophes rêvait de constituer. Et, si ces philosophes ont été pour la plupart de médiocres mathématiciens, ils n'en sont pas moins guidés par le principe même d'où procède l'algèbre. Cette dernière

[1] C'est faute d'avoir adopté franchement cette attitude que les algébristes furent longtemps retardés dans leur marche en avant. L'histoire du symbolisme algébrique nous en fournit la preuve. On s'habitua facilement à représenter les indéterminées ou les variables par des lettres (les lettres tenant ainsi la place de nombres dont on ne connaît pas la valeur). Mais n'était-ce pas pécher contre le bon-sens que de figurer par des lettres les quantités dont on pouvait écrire directement la valeur numérique ? Viète eut le grand mérite de comprendre le grand avantage que présente, en ce cas encore, l'usage des signes littéraux (voir cependant, p. 284, note 1) : en ne déterminant pas tout de suite les valeurs des *quantités connues*, on obtient des *formules* qui sont applicables quelles que soient les valeurs (déterminées) que l'on donne ultérieurement à ces quantités dans tel ou tel problème particulier. On appréciera l'importance de ces formules où entre une pluralité d'*indéterminées*, si l'on songe qu'avant Viète c'est à peine si l'on pouvait considérer simultanément, dans un calcul, plusieurs quantités inconnues : pour y parvenir, STEVIN devait adjoindre aux signes figurant les puissances successives de l'inconnue [*signes* **1**, **2**, **3**, ... ou ①, ②, ③, ...] les mots *secunda*, *tertia*, ... (ou, en abrégé, *sec.*, *ter.*, ...) indiquant qu'il est question des puissances d'une *seconde* ou d'une *troisième* inconnue. Il écrivait par exemple (cf. ZEUTHEN, *Gesch. des Math. i.* XVI[e] *u.* XVII[e] *Jahrh.*, p. 95) : *quelques sec.* ① *sont égales à* 1 ① M *sec.* ① + *quelques* ②, ce qui signifie : *quelques premières puissances de la première inconnue* [c'est-à-dire : *un multiple déterminé de la première puissance d'une inconnue y*, ou, si nous adoptons le symbolisme de Viète : le *produit a.y*, dans lequel *a* désigne un nombre déterminé quelconque] *égalent la première inconnue* (soit *x*) *multipliée par la seconde inconnue* (*y*), *plus quelques* x^2 [ou $b.x^2$, *b* étant un nombre déterminé] : nous écririons aujourd'hui tout simplement :

$$a.y = x.y + b.x^2.$$

Lorsqu'ils considéraient plusieurs inconnues simultanément, les Hindous les distinguaient parfois en figurant leurs puissances avec des couleurs différentes.

n'a-t-elle pas été appelée *Ars magna* comme l'Art de Raimond Lulle (art par excellence, *artium ars*)? L'idée d'une langue algébrique universelle [1] hante les esprits jusqu'à la fin du xviie siècle (elle n'a point disparu de nos jours), et le grand algébriste Leibniz s'en est continuellement inspiré : l'Algèbre — qu'il préférait appeler *Art* ou *Synthèse combinatoire* — est selon lui une *caractéristique* universelle (« *quæ agit de calculo in universum* »), c'est-à-dire un langage symbolique permettant de réduire tous les raisonnements à des combinaisons de formules (dans lesquelles pourront d'ailleurs intervenir d'autres opérations que celles de l'Arithmétique). « On n'a plus, dit M. Couturat [2], à faire attention au contenu réel des idées et des propositions ; il suffit de les combiner et de les transformer suivant des règles algébriques ». Ce serait — si ce pouvait être — le triomphe du mécanisme intellectuel.

277. — Mais bornons notre ambition, et contentons-nous de faire connaître, dans l'esprit que nous avons cherché à définir, les règles et les formules de l'algèbre élémentaire. Pour bien mettre en évidence le mécanisme et la souplesse de ces formules tout en respectant les exigences de la rigueur logique dont nous ne saurions faire, nous modernes, aussi bon marché que les Hindous, nous présenterons tout de suite les règles de l'algèbre sous la forme qu'on a coutume de leur donner aujourd'hui. Cependant nous ne devrons pas oublier que, comme nous l'avons dit plus haut, l'algèbre ne parvint qu'après une longue élaboration à cette simplicité, et surtout à ce degré d'abstraction, qui frappent tant le lecteur des ouvrages modernes. La conception géométrique de l'algèbre en particulier, fut un intermédiaire nécessaire (voir n° **272** et chap. III, § 1) entre les règles de calcul des Hindous et le symbolisme abstrait de notre époque. Nous reviendrons longuement au chapitre iii sur cette conception et sur le travail de mise au point qu'elle permit d'accomplir en algèbre au xviie siècle.

[1] « *Polygraphia nova et universalis ex combinatoria arte detecta* », « *Ars signorum, vulgo character universalis et lingua philosophica* » disent les titres de deux ouvrages (de Kircher et Dalgarno) parus en 1665 et 1661.

[2] *La logique de Leibniz*, p. 101.

2. — Symboles et expressions algébriques.

278. — L'algébriste, avons-nous dit, étudie les assemblages que l'on peut former avec des nombres relatifs, ces nombres étant connus ou inconnus, fixes ou variables, représentés par des lettres ou par des chiffres, et reliés par des signes opératoires *convenus*. — Les assemblages de l'algèbre étant construits de toutes pièces, rien ne nous empêche *a priori* d'en imaginer autant qu'il nous plaira en créant de nouveaux signes opératoires (cf. **270**) ; cependant nous n'userons pas, pour le moment, de cette liberté ; nous nous contenterons d'étudier les combinaisons formées par le moyen des opérations arithmétiques fondamentales, combinaisons que nous conviendrons de nommer « *expressions algébriques* ».

279. — Nous appellerons plus particulièrement « *expression algébrique rationnelle* » tout assemblage de symboles algébriques dans la composition duquel n'entrent que des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, ou élévations à des puissances entières. Nous avons vu que moyennant certaines conventions les cinq opérations énumérées ci-dessus peuvent être effectuées sur des nombres relatifs quelconques ; donc *toute expression algébrique rationnelle, composée avec des nombres relatifs, représente un nombre relatif.*

Il n'en est pas nécessairement de même des expressions algébriques non rationnelles (irrationnelles).

Considérons, par exemple, l'expression $\sqrt{-a}$ dans laquelle a est un nombre positif ; cette expression ne représente aucun nombre, car il n'existe pas de nombre dont le carré soit un nombre négatif (n° **135**).

Cette circonstance — notons-le tout de suite — a été pour les premiers algébristes une grande source de difficultés. Nous avons dit en effet que l'algébriste de profession ne craint pas de raisonner sur des nombres inconnus, ou, en tout cas, sur des nombres dont il oublie momentanément la valeur. Or, s'il fait abstraction de la valeur de a, il *ignore* si le symbole $\sqrt{-a}$ présente ou non un sens, et il n'a point de raison d'écarter d'avance ce symbole. Ainsi, si l'on n'y prend pas garde, l'algèbre se trouvera déborder hors du

domaine des nombres relatifs : on y rencontrera des expressions qui cesseront occasionnellement d'être nombres ou le redeviendront sans que rien soit changé pour cela à leur mécanisme. Le mathématicien soucieux de rigueur logique ne peut raisonner sur de semblables expressions sans faire à leur sujet des réserves formelles. Aussi longtemps, du moins, que la théorie des nombres imaginaires n'est point constituée (voir chap. v, § 4), il lui faut exercer un contrôle sur les calculs où entrent des *racines* afin de reconnaître et de rejeter les formules qui ne représentent pas des nombres. A cette restriction près, cependant, les expressions irrationnelles se prêteront aussi bien que les rationnelles à la combinaison algébrique.

280. Notations. — Nous n'entreprendrons point de faire ici l'histoire des notations algébriques ; car il n'y a aucun lien direct entre le progrès de ces notations et les principes théoriques de l'algèbre. Parmi les nombreux systèmes de notations qui furent essayés, l'un peu à peu se dégagea et se fixa insensiblement sous la forme que nous lui connaissons aujourd'hui. C'est de ce système seul qu'à quelques exceptions près nous nous occuperons.

Suivant la notation moderne, une expression algébrique se compose de lettres et de nombres arithmétiques, reliés par les signes +, —, × (*ou* .), : (*ou* barre de fraction), et parfois affectés d'exposants entiers ou fractionnaires (comme dans a^m). Les lettres sont prises arbitrairement dans l'alphabet grec ou latin. Cependant, même pour le choix des lettres, nous pouvons adopter certaines conventions simples qui nous aideront à nous retrouver dans nos formules. C'est ainsi que, depuis Descartes [1], on a coutume de représenter par les dernières lettres de l'alphabet x, y, z, u, v, w les nombres inconnus ou variables et par les premières lettres a, b, c, etc., les nombres connus ou déterminés.

[1] Sur l'*algèbre spécieuse*, voir p. 274, note 1 et 281, note 1. Pendant longtemps on n'osa figurer par des lettres que les nombres positifs qui seuls représentent de véritables grandeurs. Les Cartésiens (Hudde, *De reductione æquationum*, 1657, traité inséré dans l'édition latine de la *Géométrie : Geometria à Renato Descartes*, 2e éd., t. I, Amsterdam, 1659) furent les premiers à désigner indifféremment par des symboles littéraux non affectés de signes (tels que a, b, c, ..., x, ...) des nombres pouvant être à volonté positifs ou négatifs. (Cf. *Deux Liv.*, ch. iv, § 3).

Etant donnée une combinaison d'opérations, les propriétés de celles-ci (commutativité, associativité, etc.) permettent d'en modifier l'ordre sans altérer la valeur de l'expression qu'elles définissent. Aussi une expression algébrique peut-elle être écrite de plusieurs manières. L'algébriste, dont le rôle consiste à retourner les formules en tous sens, devra dès lors se demander quelle est, pour telle ou telle expression, la forme la plus avantageuse et comment on passera rapidement d'une forme à une autre. Voici, à ce sujet, quelques règles universellement adoptées en raison de leur commodité.

281. Monômes (¹). — On appelle *monôme* un produit de nombres relatifs dont certains, tout au moins, sont représentés par des lettres. Comme on a le droit d'intervertir les facteurs, on convient de placer en tête du monôme tous les *facteurs numériques* (facteurs qui sont donnés sous forme de nombres ordinaires) et en queue tous les facteurs représentés par des lettres. Ainsi le monôme $5 . a . (-7) . b . a$ s'écrira : $5 . (-7) . a . b . a$. D'ailleurs, on a l'habitude de réunir en une seule puissance les facteurs égaux (*ainsi a, dans notre exemple*) et d'effectuer la multiplication des facteurs numériques ; en sorte que le monôme défini ci dessus s'écrira $(-35) . a^2 . b$. — Ces conventions faites nous remarquons que nous ne donnons lieu à aucune confusion si entre deux facteurs littéraux quelconques (facteurs représentés par des lettres), ou entre un facteur numérique et un facteur littéral, nous omettons le signe . ou $\times$. Ainsi nous pouvons convenir d'écrire $(-35)a^2b$, ou tout simplement, $-35a^2b$ (voir, sur la parenthèse, p. 146, note 2) au lieu de $(-35) . a^2 . b$.

En définitive, donc, tout monôme sera composé de trois parties juxtaposées : 1° un signe (+ ou —, le signe + pouvant être sous-entendu) ; 2° un nombre arithmétique ordinaire (nombre positif, rationnel ou irrationnel) ; 3° un groupe de lettres juxtaposées, qui peuvent être affectées d'exposants entiers, et dont chacune représente un nombre (*élevé* éventuellement à une puissance entière) lequel nombre est facteur du monôme (c'est-à dire facteur du produit qui constitue le monôme). Par exemple, les symboles

$$27ax^2, \quad -3a^2bc^3$$

(¹) Contraction pour mononome (de μόνος, unique et ὄνομα, nom).

représentent des monômes. Si le nombre arithmétique est égal à l'unité, on omet de l'écrire (*une fois* $a = a$). S'il est nul, le monôme est nul (o *fois* $a = 0$).

L'ensemble du signe et du nombre arithmétique constituent un nombre relatif (positif ou négatif) qui est appelé *coefficient* [1] du monôme. Le groupe de lettres est la *partie littérale*. Le signe (signe du coefficient) est le *signe* dont est *affecté* le monôme.

Deux monômes sont dit *semblables* lorsqu'ils ne diffèrent que par leurs coefficients. Leur somme ou leur différence est alors un monôme semblable à chacun d'eux ayant pour coefficient la somme ou la différence des deux coefficients. Chaque fois que, dans une expression, se trouvent plusieurs monômes semblables pouvant être ainsi réunis en un par addition ou soustraction, on ne manquera pas de les réunir en effet; cette simplification s'appelle « *réduction des termes semblables* ».

Un monôme qui n'aurait pas de partie littérale serait un nombre relatif ordinaire. Ainsi, par extension, on pourra regarder les nombres relatifs eux-mêmes comme des monômes.

282. — Ces conventions et règles posées, nous sommes en droit de considérer toute expression algébrique comme le résultat d'opérations effectuées sur des monômes L'algébriste, afin de rendre les formules facilement lisibles, mettra toujours ces monômes en évidence en en réduisant d'ailleurs le nombre le plus possible : ainsi, par exemple, il n'écrira pas $\frac{2(ax + bc) + ax - bc}{2 + 7x^2 + 5 - x^2}$, mais bien (ce qui est la même chose) : $\frac{3ax + bc}{6x^2 + 7}$.

283. **Polynomes. Polynomes ordonnés.** — Pour écrire les expressions algébriques composées de monômes, on suit certaines règles, dont les unes s'appliquent mécaniquement et sont imposées par l'usage, tandis que les autres dépendent plus ou moins du flair et de l'habileté de l'opérateur.

Soit à additionner [2] plusieurs monômes affectés des signes

[1] Le mot *coefficiens* a été employé par VIÈTE (*Ad logisticem speciosam; Opera*, p. 23).

[2] Nous pouvons toujours ramener la soustraction à une addition, en changeant le signe du monôme soustrait.

+ ou —. On les juxtapose en les séparant deux à deux par les signes + ou —, et on obtient ainsi une expression qui n'est autre (d'après les règles de l'addition des nombres relatifs, que la *somme* des monômes, considérés et que l'on appelle *polynome* (de πολύ, plusieurs et ὄνομα, nom). Les monômes sont dits « termes » de la somme ou du polynome.

Dans tout polynome, l'ordre de succession des termes est arbitraire (en vertu de la commutativité des sommes). Cependant, si nous voulons mettre de l'ordre dans nos formules, nous ne rangerons pas les termes au hasard. Nous les classerons d'après certains caractères, le plus souvent d'après leurs « *degrés* ».

Soit un monôme dont l'un des facteurs est la lettre x élevée à une certaine puissance [1] p [les autres facteurs ne contenant pas x d'après les règles adoptées plus haut pour la composition des monômes] : nous dirons que *le nombre p est le degré du monôme par rapport* à x ou *en* x. Ainsi le monôme $6a^2bx^3$ est de degré 3 en x, de degré 2 en a, de degré 1 en b.

Considérons maintenant un polynome dont les termes, ou dont certains termes, contiennent la lettre x. Chaque terme contenant x a un degré en x; quant aux termes qui ne contiennent pas x, on dit qu'ils sont de *degré* 0 *en* x. Convenons alors, lorsque nous écrivons un polynome, d'écrire d'abord les termes de degré 0 en x, puis les termes de degré 1 et ainsi de suite. Le polynôme ainsi disposé sera dit « *ordonné par rapport aux puissances croissantes de* x ». Si nous renversons ensuite l'ordre des termes et plaçons en tête le ou les termes de plus haut degré, nous obtenons un polynome « *ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x ». Le degré en x du ou des termes de plus haut degré est appelé « *degré en* x *du polynome* ».

Exemples. — Le polynome $6x^3 + 3x^2 - x + 1$ est de degré 3 en x et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Le polynome $a + bx + 3x - c^2x^2 + 2bx^2$ est un polynome de degré 2 en x ordonné par rapport aux puissances croissantes de x.

284. — Au lieu d'ordonner par rapport à une variable, nous pourrions ordonner par rapport à l'ensemble de deux ou plusieurs

[1] Par définition, tous les exposants qui figurent dans l'expression d'un monôme sont des nombres entiers positifs.

variables. On appelle *degré d'un monôme par rapport à deux variables x et y* (ou *degré en x et y*) la somme des degrés du monôme par rapport à x et par rapport à y (le degré par rapport à une lettre donnée étant considéré comme nul si le monôme ne contient pas la dite lettre). Ainsi les monômes $6x^2y$. axy^2, $3ay^3$ sont de degré 3 en x et y. On définira semblablement le degré par rapport à un nombre quelconque de lettres. Cela dit, tout polynome contenant les lettres x et y peut être *ordonné en x et y* suivant les puissances croissantes ou suivant les puissances décroissantes. Ainsi le polynome

$$3 + ab^2 + 2x^2 - xy^2 + cy^3$$

est ordonné en x et y par rapport aux puissances croissantes ; il ne contient pas de terme de degré 1. Son degré en x et y est le *degré du ou des termes de plus haut degré* (ici : 3). — Nous verrons au cours des chapitres suivants, pourquoi il est avantageux d'ordonner les termes des polynomes d'après leurs degrés.

Remarque. — Une *somme* ou une *différence* de polynomes ordonnés se présente de prime abord sous la forme d'un polynome, mais non point nécessairement d'un polynome ordonné : on l'ordonnera en modifiant l'ordre de ses termes.

285. Produits. Facteurs communs. — Il résulte de la définition du monôme que la multiplication d'un monôme par un monôme donne un nouveau monôme que nous savons écrire immédiatement. Rien de nouveau à dire, par conséquent, sur cette opération.

Soit maintenant à multiplier un polynome par un monôme ou par un polynome. Pour indiquer cette opération nous pouvons nous servir de la *parenthèse* ( ) ou du *crochet* [ ], dans lesquels nous enfermons les nombres qui sont eux-mêmes les résultats d'opérations supposées effectuées. Ainsi le symbole $[2 + ax - b^2x^2].[3c^2 + 1]$ signifie : *produit de la somme supposée effectuée* (c'est-à-dire du *polynome*) $2 + ax - b^2x^2$ *par la somme supposée effectueé* (*polynome*) $3c^2 + 1$.

Nous savons qu'en vertu de la *distributivité* de la multiplication (n° **7**), *le produit d'une somme de termes par un nombre est*

égal à la somme des produits des termes par le nombre ([1]). Ainsi, le produit d'un polynome par un monôme est un polynome, et il en est de même du produit d'un polynome par un polynome. Remplacer par un polynome un produit qui est indiqué au moyen d'une parenthèse ou d'un crochet, ce sera, pour l'algébriste, « *effectuer la multiplication* » ou « *développer* le produit ». D'ailleurs, pour écrire convenablement le « produit développé [ou « *développement* du produit »], il y aura lieu d'appliquer les règles relatives à l'ordination des polynomes (n^{os} **283-4**).

286. — Mais — et c'est ici qu'intervient le flair de l'algébriste — il ne sera pas toujours avantageux, pour les calculs à venir, d'effectuer les multiplications. Un exemple simple va nous en convaincre immédiatement.

Considérons l'expression $(x^2 - xy + 1) . a : 3a^2b$, que nous écrirons $\frac{(x^2 - xy + 1) . a}{3a^2b}$. En n'effectuant pas la multiplication indiquée au numérateur nous mettons en évidence cette circonstance que le numérateur est le produit de a par un autre nombre ; or le dénominateur est également le produit de a par un autre nombre $(3\,ab)$; et, puisqu'on ne change pas la valeur d'une fraction en divisant les deux termes (numérateur et dénominateur) par un même nombre, la fraction peut être écrite sous la forme *simplifiée* : $\frac{x^2 - xy + 1}{3ab}$.

Ainsi, l'algébriste préférera souvent ne pas effectuer les multiplications de polynomes et monômes Il se contentera de juxtaposer les facteurs du produit (entre parenthèses ou crochets, si ce sont des polynomes) et de les séparer par des signes $\times$ ou des points ; ou, même, il conviendra *d'omettre les signes* $\times$ ou ., en remarquant que cette omission ne l'expose à aucune confusion (cf. **281**).

([1]) Nous exprimons symboliquement la propriété de distributivité en écrivant que $(a + b).c = ac + bc$ (n° 132). Dans cette formule, les symboles a, b, c sont des nombres relatifs quelconques et, par conséquent, peuvent être remplacés par des expresions algébriques arbitraires ; on aura, par exemple, le droit d'écrire :

$$\left(xy + \frac{y}{z}\right) . a^2 = a^2xy + a^2 . \frac{y}{z}.$$

Sur la disposition que l'on donne aux calculs dans la pratique, voir les traités d'algèbre élémentaire.

Ainsi, par exemple, les symboles $3a[2b + c(1 + b^2)]$, $(a^2 + b)(c + 3)$, représenteront des produits [la première expression est un produit dont l'un des facteurs est lui-même la somme d'un monôme et d'un produit.]

Remarques. — Lorsqu'on écrira le produit d'un polynome par un monôme, on placera de préférence le monôme en tête, ou du moins son coefficient. Ainsi on ne l'écrira pas $(b + c)3x$, mais $3x(b + c)$ ou $3(b + c)x$.

287. — L'algébriste ne se contente pas de laisser non effectués certains produits algébriques : il trouve parfois avantageux de remplacer un polynome par un produit non effectué.

Considérons, par exemple, l'expression $\frac{ax^2 - axy + a}{3a^2b}$. L'algébriste remarque que le numérateur n'est autre que le produit $a(x^2 - xy + 1)$; en remplaçant le polynome par ce produit, il voit tout de suite que l'on peut réaliser la simplification indiquée au n° **286**. Lorsque l'on substitue ainsi à une somme de termes le produit d'un monôme par une somme, on dit que *l'on met ce monôme en facteur commun* (le monôme est a dans l'exemple donné ci-dessus) : cet opération n'est possible, bien entendu, que si a figure comme facteur dans chacun des termes de la somme.

288. Sommes et produits algébriques en général. — Les conventions et remarques qui précèdent ne concernent pas seulement les polynomes, mais, en général, toutes les expressions algébriques où entrent des sommes et des produits. Ainsi l'on écrit $a^{\frac{1}{3}}b$, $a\left(\sqrt{b + x^2} + \frac{3}{c}\right)$ pour signifier : *produit de* $a^{\frac{1}{3}}$ *par* b, *produit de* a *par la somme* $\sqrt{b + x^2} + \frac{3}{c}$. Ce dernier produit pourrait s'écrire $a\sqrt{b + x^2} + \frac{3a}{c}$, mais il peut être plus avantageux de ne pas le *développer* et de laisser a en *facteur commun*.

289. Fractions. — Toute expression algébrique dans la composition de laquelle entre une ou plusieurs divisions [1], sera écrite

[1] Et par conséquent, toute expression pouvant être ramenée à cette forme par une transformation algébrique (voir § 3).

sous la forme d'une fraction ([1]) ou d'une combinaison où entrent des fractions (l'algébriste évite de se servir du signe :). A ces fractions on peut appliquer toutes les règles qu'enseigne l'arithmétique; mais, pour abréger les calculs, on aura soin, avant d'opérer sur les fractions, de les *simplifier* toujours le plus possible. A supposer, par exemple, (ce qui est le cas le plus fréquent) que le numérateur et le dénominateur de la fraction soient écrits sous forme de sommes, on cherchera (conformément à la remarque des (n^{os} **286-87**) si les termes du numérateur n'ont pas un facteur commun qui soit aussi facteur commun des termes du dénominateur; de tels facteurs communs peuvent être supprimés dans les deux termes (*haut et bas*) de la fraction (cf. **286**).

Exemples : La fraction $\dfrac{a^2x + 3ab^{\frac{1}{2}}}{a^4x^2 - ab}$ est équivalente (égale) à la fraction $\dfrac{a(ax + 3b^{\frac{1}{2}})}{a(a^3x^2 - b)}$ ou $\dfrac{ax + 3b^{\frac{1}{2}}}{a^3x^2 - b}$.

290. Polynomes en x. — La remarque du n° **287** conduit à mettre un polynome dont les termes contiennent la lettre x sous une forme que nous utiliserons fréquemment. Ordonnons (n°**283**) le polynôme par rapport aux puissances croissantes de x et appelons m son degré (m est un nombre entier positif). Le polynome est une somme de termes monômes qui sont distribués en plusieurs groupes successifs : 1° monômes qui ne contiennent pas x; 2° monomes qui contiennent x à la première puissance; 3° monômes qui contiennent x^2; et ainsi de suite jusqu'à la m^{ème} puissance x^m. Mettons la somme du *premier* groupe de monômes entre parenthèses ou crochets; dans le *second* groupe de monômes mettons x en *facteur commun* (**287**), afin que la somme des termes de ce groupe apparaisse sous la forme du produit de x par une somme (entre parenthèses ou crochets); dans le *troisième* groupe, mettons x^2 en facteur commun; et ainsi de suite. Notre polynome prend alors finalement la forme suivante :

$$(1)\qquad (\ldots) + (\ldots)x + (\ldots)x^2 + \ldots + (\ldots)x^m,$$

([1]) La fraction $\frac{a}{b}$ représentant par définition le résultat de la division de a par b.

les parenthèses renfermant des polynomes ou monômes qui ne contiennent pas x.

Cela fait, nous observons que pour qu'une expression algébrique contenant diverses lettres x, a, b, c,... puisse être mise sous la forme ci-dessus, il n'est point nécessaire que cette expression soit un polynome au sens du n° **283**. Ainsi l'expression

$$\left(\sqrt{ab+1}\right) + \left(3ac^{\frac{1}{3}} + 2\right)x + bx^2$$

n'est pas un polynome (somme de monômes) : nous conviendrons toutefois de dire que cette expression est un polynome *par rapport à x* ou un *polynome* en x. D'une manière générale, nous appellerons « *polynome en x* » toute expression algébrique qui peut être mise sous la (1) forme (1), *où les parenthèses renferment des expressions algébriques quelconques ne contenant pas la lettre x.* L'exposant m de la dernière puissance de x est le *degré* du polynôme en x. Les expressions entre parenthèses sont appelées (par extension du sens premier de ce mot) *coefficients* du polynome en x. Chaque produit d'un coefficient par la puissance de x à laquelle il se rapporte est dit *terme* du polynome. La première parenthèse de la formule (1) renferme le terme *indépendant* de x » ou « *de degré* 0 » [voir n° **283**].

Remarque I. — Le polynome en x mis sous la forme (1) est ordonné par rapport aux puissances croissantes de x ; on peut naturellement, en retournant l'ordre de ses termes, l'ordonner par rapport aux puissances décroissantes.

Remarque II. — Il résulte des définitions qui précèdent que la somme ou le produit de deux polynomes en x est un polynome en x.

291. Polynomes en x, y, ou en x, y, z,. — Comme on a défini les polynomes en x, on pourra définir les polynomes en x et y [polynomes par rapport aux deux lettres x et y], les polynomes en x, y et z, etc.

Considérons un produit contenant les lettres x et y, élevées à

(1) J'entends par là : toute expression pouvant être ramenée à cette forme par une transformation algébrique (voir § 3).

certaines puissances entières m, n. Nous conviendrons de dire (suivant une locution un peu incorrecte, mais commode) que ce produit est une *puissance de x et y*; l'ensemble des facteurs du produit qui ne contient pas x et y sera appelé *coefficient* de la puissance de x et y; ainsi, si l'on désigne par une lettre A le coefficient, la puissance de x et y sera de la forme $Ax^m y^n$.

Deux puissances de x et y ayant des coefficients différents, mais affectées des mêmes exposants m, n seront appelées *puissances semblables de x et y*.

Cela posé, nous appellerons *polynome en x et y* toute somme de puissances de x et y affectées de coefficients. Réunissant en un terme (par addition et mise en facteur commun des expressions telles que $x^m y^n$) tout groupe de puissances semblables qui figurent dans la somme, nous pouvons toujours mettre le polynome sous la forme

$$(\ldots) + (\ldots)x + (\ldots)y + (\ldots)x^2 + (\ldots)xy + (\ldots)y^2 + \text{termes analogues}$$

où les parenthèses renferment des expressions algébriques arbitraires ne contenant pas x et y. Les expressions entre parenthèses sont les *coefficients* du polynome; les termes de la somme puissances de x et y] sont les *termes* du polynome et ont respectivement pour degrés la somme de leur degré en x et de leur degré en y [*vide* n° **284**]; le *degré* du polynome est le plus élevé des degrés de ces termes. Ces définitions s'étendent immédiatement à un polynome en x, y, z,.. ou, plus généralement, à un polynome portant sur un nombre quelconque de lettres ou quantités.

292. — Un polynome du premier degré [par rapport à x et y ou à un nombre quelconque de quantités] est dit *linéaire*. Exemple : $3x - y + 1$, $ax + by + cz + d$.

Un polynome de degré quelconque n dont tous les termes sont du même degré n est dit *homogène*. Exemples :

$$3x^2 + 2xy - 2y^2, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx,$$

polynomes homogènes du second degré ;

$$4x^3 + x^2y + xz^2,$$

polynome homogène du troisième degré.

Un polynome homogène du second degré est souvent appelé *forme quadratique*.

293. Formules homogènes Application à la géométrie. — Nous avons expliqué au n° **101** en quoi consiste l'homogénéité d'une relation établie entre grandeurs géométriques. Nous savons d'ailleurs qu'à une telle relation correspond toujours une égalité numérique exprimant que la mesure d'une certaine grandeur est égale à la mesure d'une autre grandeur de même espèce Plus précisément, si, ainsi qu'il arrive en géométrie, les grandeurs sont définies comme résultats d'opérations effectuées sur des longueurs données, et si l'on désigne par des lettres a, b,.. les nombres qui mesurent ces longueurs. l'égalité numérique à laquelle on a affaire se présente sous la forme d'une égalité entre deux expressions algébriques contenant les lettres a, b, c, ... Supposons, en particulier, que ces expressions soient des polynomes en a, b, c, ..., ce qui a lieu si la relation considérée affirme qu'une certaine somme [1] de grandeurs de même espèce est égale à une autre somme de grandeurs : il résulte de l'homogénéité de la relation géométrique que les deux polynomes doivent être tous deux *homogènes* [2] *et de même degré par rapport aux quantités* a, b, c.

On dit alors que la formule qui exprime l'égalité des deux polynomes est une *formule homogène*.

Remarque. — Les relations géométriques se traduisent, disons-nous, par des formules homogènes. Il en est ainsi du moins à condition que les mesures de toutes les longueurs qui interviennent dans la relation soient désignées par des lettres. Si l'une de ces mesures était donnée numériquement, — par exemple, si l'une des longueurs considérées était prise pour unité, auquel cas (il est facile de s'en rendre compte) sa mesure serait 1, — la relation ne serait pas nécessairement homogène par rapport aux mesures des *autres* longueurs désignées par des lettres. C'est ce qu'observe Descartes, lorsqu'il dit au livre I de sa *Géométrie* (Œuv. t. VI p. 171) : « Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se

[1] Ou plus généralement une combin ison de sommes et différences, c'est-à-dire une *somme algébrique* (*vide* p. 287, note 1).

[2] D'où le choix du mot « homogène » pour désigner le ca actère algébrique défini au n° précédent.

doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre lorsque l'unité n'est point déterminée en la question; mais ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut-être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions ; comme s'il faut tirer la racine cubique de *aabb* — *b*, il faut penser que la quantité *aabb* est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité *b* est multipliée deux fois par la même. »

L'homogénéité des relations géométriques se traduit encore par des conditions algébriques précises dans le cas où ces relations s'expriment par l'égalité d'expressions algébriques en *a*, *b*. *c*, ... autres que des polynomes. On peut démontrer, d'ailleurs, qu'il est toujours possible de transformer une telle égalité en une égalité *équivalente* [voir n° **294**] dont les deux membres sont des polynomes.

3. — Transformations classiques

294. — Nous avons indiqué quelques-unes des règles et des habitudes auxquelles se conforme l'écriture algébrique. Ces règles, cependant, et ces habitudes, n'imposent pas aux expressions de l'algèbre une forme *ne varietur*. Toute expression peut être *transformée* de bien des manières, et telle forme qui est avantageuse pour l'étude d'un problème particulier ne le sera pas dans d'autres circonstances [1]. C'est pourquoi, après avoir écrit une expression, l'algébriste se demandera quelles sont les expressions *équivalentes* en lesquelles il serait possible et peut-être intéressant de la transformer. Ce faisant, l'algébriste ne crée rien; il remplace le même par le même, se bornant à modifier l'aspect des formules, la façon de les présenter et de les disposer. D'où vient que ce petit jeu de construction est si merveilleusement fécond? C'est que l'esprit humain n'est pas doué d'une vue très perçante. Tel détail capital pouvait nous échapper dans la formule d'une expression, qui nous sautera immédiatement aux yeux lorsqu'on nous présentera l'expression sous une face nouvelle.

Pour écrire que deux expressions algébriques ne sont qu'une seule et même combinaison présentée sous deux formes différentes,

(1) Cf. *supra*, n° 268.

l'algébriste écrit que ces expressions sont *égales*. Mais il s'agit ici d'une égalité d'une nature spéciale, *égalité indépendante de la valeur numérique des expressions*, ou, plus précisément, *égalité qui subsiste quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres figurant dans les expressions* [1]. Une semblable égalité est appelée *identité* [2]. On l'exprime généralement par le même signe que l'égalité (le signe $=$) ; cependant certains auteurs emploient un symbole spécial, $\equiv$, pour signifier : *identique à*.

Deux expressions identiques sont « *équivalentes* » ; lorsque l'on passe de l'une à l'autre on dit que l'on *transforme* la première expression ou que l'on « effectue une *transformation algébrique* ».

295. — Nous avons déjà effectué au cours de cet ouvrage, de nombreuses transformations algébriques. En effet les égalités symboliques qui expriment les propriétés fondamentales des opérations, commutativité, associativité, distributivité, sont des identités, et les plus importantes de toutes (cf. n° **269**) :

En combinant ces identités, le lecteur en formera de nouvelles en aussi grand nombre qu'il voudra. Nous nous contenterons d'indiquer ici quelques identités classiques [3] qui sont d'usage courant en algèbre; nous leur donnerons des numéros afin de pouvoir facilement y renvoyer par la suite.

296. Puissances entières d'un binome. — On appelle *binome* un polynome composé de deux termes (ou monômes). Pour écrire rapidement les puissances entières d'un binome (puissances d'exposant m entier positif), il suffit de savoir écrire les puissances de l'expression $a + b$; ou $a - b$; car les identités ainsi obtenues — ayant lieu quels que soient les nombres a et b — ont encore lieu

[1] Ces lettres sont nécessairement les mêmes dans les deux expressions.

[2] Ainsi les expressions a^2b et $3a^2$ sont *égales lorsque* $b = 3$; les expressions a^2b et ba^2 sont *identiques*.

[3] Les mathématiciens grecs connaissaient un grand nombre de ces identités, mais ils les concevaient comme des *relations* entre grandeurs géométriques appartenant à une même figure (voir p. 117, note 1). Nous reviendrons sur ces relations au chapitre III qu'il faudrait lire en même temps que le présent chapitre si l'on voulait suivre l'algèbre dans son évolution historique.

lorsqu'on y remplace les lettres a et b par des monômes quelconques.

Or en effectuant les multiplications

$$(a + b)(a + b), \qquad (a - b)(a - b), \text{ etc.,}$$

nous parvenons aisément aux identités [1] suivantes, dont les seconds membres sont les « *développements* » (voir **285**) de $(a+b)^2$, $(a - b)^2$, etc. :

$$\text{(I)} \quad (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\text{(II)} \quad (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$
$$\text{(III)} \quad (a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$\text{(IV)} \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$\text{(V)} \quad (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

. . . .

On peut continuer ainsi indéfiniment. Mais n'y aurait-il pas moyen d'écrire une identité symbolique qui donnât *la formule de la puissance* $(a + b)^m$ *quel que soit l'entier* m? La formule demandée sera facile à obtenir si l'on utilise les symboles de l'arithmétique combinatoire que nous avons fait connaître à la fin de notre *Premier Livre*. D'ailleurs les coefficients numériques qui figurent dans le *développement* de $(a + b)^m$ ne sont autres que les nombres situés sur une même ligne diagonale (ou *base*) du triangle arithmétique de Pascal (n° **19**) ; c'est là un fait remarquable qui était déjà connu au XVe siècle [cf. en particulier, Stifel, *Arithmetica integra*, 1543, p. 46] et que Pascal a définitivement élucidé.

297. — Pour former le développement de $(a + b)^m$, nous allons tout d'abord nous demander quel est le développement du produit

$$P = (a + b_1)(a + b_2) \dots (a + b_m),$$

où $b_1, b_2, \dots b_m$ sont m nombres différents.

Ce développement peut évidemment être obtenu par le procédé suivant. Choisissons une lettre (a ou b_1) dans le premier facteur, puis une lettre (a ou b_2) dans le second facteur, et ainsi de suite

[1] Les identités sont ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de a, par rapport aux puissances croissantes de b.

jusqu'au dernier facteur. Faisant le produit de toutes ces lettres, nous obtenons un monôme qui est un terme du polynome-produit. Si nous recommençons la même opération et la répétons autant de fois que possible, *sans jamais la refaire deux fois et de la même manière* [1], nous aurons manifestement tous les termes du produit P, c'est-à-dire l'ensemble des monômes dont la somme constitue le polynome P.

Les monômes formés comme il vient d'être dit ont tous pour coefficient numérique l'unité; chacun d'eux est le produit d'une puissance [2] de a par certains des nombres $b_1, b_2, \dots b_m$; d'ailleurs ils diffèrent tous les uns des autres par un facteur au moins (il n'y en a pas deux qui soient formés des mêmes lettres). Groupons ces monômes ou termes de manière à mettre leur somme sous la forme normale d'un polynome en a (n° **290**) :

De degré 0 en a, il n'y a qu'un terme : le monôme obtenu en prenant dans chaque facteur la lettre b (monôme $b_1 b_2 \dots b_m$).

Pour avoir un terme de degré 1 en a, il faut prendre la lettre a dans *un* facteur et la lettre b dans *tous* les autres. Nous avons donc m termes de degré 1 en a (nombre des combinaisons de m facteurs) savoir les monômes

$$ab_1 b_2 \dots b_{m-1}, \quad ab_1 b_2 \dots b_{m-2} b_m, \quad \dots ab_2 b_3 \dots b_m$$

déduits du produit $ab_1 b_2 \dots b_{m-1}, b_m$ en y supprimant d'abord la lettre b_m, puis la lettre $b_{m-1}, \dots$ enfin la lettre b_1.

Pour avoir un terme de degré 2 en a, il faut prendre la lettre a dans *deux* facteurs et la lettre b dans *tous* les autres. Nous obtenons ainsi les termes $a^2 b_1 b_2 \dots b_{m-2}$, etc. Le nombre de ces termes est C_m^2 (nombre des combinaisons de m facteur 2 à 2, voir n° **264**).

Nous formerons ensuite les termes de degré 3, $a^3 b_1 b_2 \dots b_{m-3}, \dots$, etc., dont le nombre est C_m^3. Et ainsi de suite. Les termes de degré $m - 1$ seront au nombre de C_m^{m-1}, c'est-à-dire m (n° **264**). Les termes de degré m sont au nombre de C_m^m, c'est-à-dire 1 ; et

[1] Je dirais que l'opération est refaite de la même manière si nous prenions la *même* lettre (a ou b_1) dans le *premier* facteur, puis la *même* lettre (a ou b_2) dans le *second* facteur, etc.

[2] Si le monôme ne contient pas a, il est de degré 0 en a : il est donc, si l'on veut, le produit de a^0 (ou 1) par des facteurs b.

il est clair, en effet, que nous ne pouvons obtenir un terme contenant a^m qu'en prenant la lettre a dans chaque facteur du produit P, ce qui donne le terme unique a^m.

298. — Ces préliminaires établis, supposons que nous donnions la même valeur b aux m lettres b_1, b_2, ... b_m. Alors le terme de degré 0 en a devient b^m, les termes de degré 1 sont tous égaux entre eux et égaux à $b^{m-1}a$; leur somme est $mb^{m-1}a$, puisqu'ils sont au nombre de m. Les termes de degré 2 sont tous égaux à a^2b^{m-2} ; leur somme est $C_m^2 b^{m-2}a^2$; puisqu'ils sont au nombre de C_m^2. Et ainsi de suite jusqu'au terme de degré m qui est toujours unique et égal à a^m.

En conséquence, nous pouvons écrire l'identité (1)

$$(VI) \qquad (a+b)^m = b^m + mb^{m-1}a + C_m^2 b^{m-2}a^2 + \ldots + C_m^{m-2}b^2a^{m-2} + mba^{m-1} + a^m,$$

où le second membre est ordonné par rapport aux puissances croissantes de la lettre a et par rapport aux puissances décroissantes de la lettre b. Les valeurs des nombres C_m^2, C_m^3, etc., sont données par la formule (4) du n° **264**.

Remarque. — Il est clair que le raisonnement qui précède resterait valable si l'on échangeait les rôles que nous avions fait jouer aux lettres a et b. Ainsi l'identité (VI) peut être écrite sous la forme suivante :

$$(VI\ bis) \qquad (a+b)^m = (b+a)^m = a^m + ma^{m-1}b + C_m^2 a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^{m-2}a^2b^{m-2} + mab^{m-1} + b^m.$$

Nous voyons immédiatement que cette égalité n'est autre que la précédente dans laquelle on a renversé l'ordre des termes du second

(1) Le développement de $(a+b)^m$ était connu des mathématiciens alexandrins (du moins pour les premières valeurs de m) ; mais la forme que nous lui donnons ici ne put, bien entendu, être obtenue qu'après la création du calcul combinatoire; nous la trouvons, en particulier, chez Pascal (*Usage du triangle arithmétique pour trouver la puissance des binomes et des apotomes*, Œuvres, t. III, p. 499). — La formule (VI) n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la formule générale établie par Newton (*formule du binome de Newton*) qui donne le développement de $(a+b)^m$ pour m quelconque (non nécessairement entier).

membre : en effet nous savons (n° **264**, *Remarque*) que l'on a : $C_m^2 = C_m^{m-2}$, $C_m^3 = C_m^{m-3}$, etc.

299. — De l'identité (VI *bis*) nous déduirons immédiatement le *développement* de $(a - b)^m$. Remplaçons, en effet, b par b' dans cette identité : elle devient :

$$(a + b')^m = a^m + ma^{m-1}b' + \dots + mab'^{m-1} + b'^m;$$

posons ensuite $b' = -b$, d'où résulte $b'^2 = b^2$, $b'^3 = -b^3$, $b'^4 = b^4$, $b'^5 = -b^5$, etc., nous obtenons :

$$\text{(VII)} \qquad (a - b)^m = a^m - ma^{-1}b + C_m^2 a^{m-2}b^2 \dots, \text{ etc.}$$

300. Application de la formule du binome au développement d'une puissance d'un polynome. — La formule (VI *bis*) (dite du binome de Newton), qui donne la puissance m^ième^ d'un binome, fournit le moyen de calculer les puissances entières d'un polynome quelconque.

Considérons par exemple le polynome à trois termes $a + b + c$: nous écrirons en réunissant b et c

$$(a + b + c)^m = [a + (b + c)]^m = a^m + ma^{m-2}(b + c) + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-1}(b + c)^2 + \dots + (b + c)^m,$$

et nous développerons ensuite les puissances $(b + c)^2, \dots (b + c)^m$ d'après la formule (VI).

Ainsi :

$$(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3(b + c) + 6a^2(b^2 + 2bc + c^2) + 4a(b^3 + 3b^2c + 3cb^2 + b^3) + (b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4)$$

301. Divisions de $a^{n+1} - b^{n+1}$ par $a - b$. — Les formules suivantes sont, pour employer une locution chère à l'algébriste, des « formules élégantes ». Ce sont des formules à surprise. Si je cherche, en effet, à transformer les quotients $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ ou $\frac{a^4 + b^4}{a + b}$, je n'obtiens que des fractions plus compliquées. Comment se fait-il que la division de $a^{n+1} - b^{n+1}$ par $a - b$ conduise au contraire à un polynome d'une simplicité et d'une symétrie remarquables ?

Rien ne le faisait prévoir; le simple arrive ici sans être attendu, et nous trouvons élégante son apparition inopinée.

Je dis d'abord que le quotient de $a^2 - b^2$ par $a - b$ n'est autre que $a + b$. Et, en effet, le produit $(a + b)(a - b)$ se trouve égal à $a^2 - b^2$. Nous écrirons donc l'identité suivante, identité capitale en algèbre, et déjà bien connue des mathématiciens grecs qui la présentaient sous forme géométrique [*vide*] :

$$\text{(VIII)} \qquad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

De la même manière nous obtiendrons les identités [1] :

$$\text{(IX)} \qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

. . . .

$$\text{(X)} \qquad a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + b^n)$$

Cette identité donne lieu à une application intéressante que nous avons déjà indiquée plus haut. Faisons en effet $a = 1$; l'égalité (X) nous donne la somme des n premiers termes de la progression géométrique de raison b qui commence par l'unité :

$$\text{(X}^{\text{bis}}\text{)} \qquad 1 + b + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Remarque. — En appelant b' le nombre $-b$ et remplaçant par conséquent b par $-b'$ dans les formules (VIII) et suivantes, on obtiendra de nouvelles identités. Ainsi :

$$\text{(XI)} \qquad a^3 + b'^3 = (a + b')(a^2 - ab' + b'^2), \text{ etc.}$$

302. Autres identités. — En additionnant membre à membre les identités (I) et (II) du n° **296**, on obtient l'identité

$$\text{(XII)} \qquad (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

(1) On trouve ces identités dans la *Practica Arithmeticæ* (1539) de Jérome Cardan (chap. XXII, *Opera*, t. IV, p. 29). L'identité (X^{bis}) par exemple est énoncée comme il suit pour $n = 3$: « Si igitur divideres 1. cu. m̄. 1. per 1. co m̄. 1. exibit 1. ce. p. 1. co. p. 1 ». Si tu divises le cube de l'inconnue (1. cubus) *moins* 1, par l'inconnue (1. cosa, voir n° 274) *moins* 1, il viendra le carré de l'inconnue (1 *census*, *plus* l'inconnue (à la première puissance), *plus* 1. L'égalité (IX) intervient déjà dans l'*Arithmétique* de Diophante.

Une autre identité remarquable, connue sous le nom d'*identité de Lagrange*, est la suivante, aisée à vérifier :

(XIII) $(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (a\alpha + b\beta)^2 = (a\beta - b\alpha)^2.$

Nous avons d'autre part :

(XIV) $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

On trouvera dans les traités spéciaux d'algèbre un grand nombre d'autres identités intéressantes.

303. Simplication des expressions contenant des radicaux — Les identités du n° **301** permettent souvent de simplifier les expressions algébriques où figurent des radicaux, c'est-à-dire dans la composition desquelles entrent des extractions de racines (**10**).

Ainsi, nous avons [identité (VIII) où l'on remplace a et b par $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$] :

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \alpha - \beta.$$

D'où les formules

(XV) $$\frac{1}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha - \beta}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\alpha - \beta}.$$

Nous avons aussi $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$; d'où

$$\frac{c}{a + \sqrt{b}} = \frac{c(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Ces formules, qui étaient connues des algébristes hindous permettent de transformer les fractions de manière que les radicaux qui y entrent ne figurent que dans les numérateurs ([1]).

La transformation qu'expriment les identités (XV) est ainsi formulée par Bhaskara [*Vija-Ganita*, ch. I, 34-35, trad. Colebrooke, p. 147] : « changez le signe, positif ou négatif de l'un des radi-

([1]) L'identité (XV) se trouve dans l'*Arithmétique* de l'Arabe AL KALSADI, qui vivait en Andalousie, au XVe siècle (cf. CANTOR, *Vorlesungen*, t. I, 2e éd., p. 765). Elle est également formulée par CHUQUET, *Triparty*, Sec. Part., chap. VI.

caux du dénominateur, et par le dénominateur ainsi modifié, multipliez le numérateur et dénominateur primitifs, répétant l'opération (si cela est nécessaire) jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un radical au dénominateur ».

Comme exemple d'identité plus compliquée (où entrent des racines cubiques), citons la suivante

$$\left(b - \sqrt[3]{c}\right) . \left(b + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{b^3}}\right) = b^2 - \frac{c}{b} ,$$

que Cardan [1] attribue à son contemporain le milanais *De Aratoribus*.

304. Transformation des polynomes du premier ou du second degré en x. — Considérons (voir **290**) un polynome du premier degré en x. Pour abréger l'écriture, nous représenterons symboliquement par des lettres a et b le *terme indépendant* de x et le *coefficient* de x [ce terme et ce coefficient sont, n° **290**, des expressions algébriques quelconques ne contenant pas x], le polynome se présentera alors sous la forme d'un *binome* en x : $ax + b$. Mais j'ai évidemment

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right).$$

Posant alors $\frac{b}{a} = \alpha$, je pourrai énoncer la proposition suivante : *Étant donné un polynome* P, *quelconque, du premier degré en* x, *il existe une expression de la forme* $a(x + \alpha)$ [*où* a *et* α *sont des expressions ne contenant pas* x] *identique au polynome* P.

305. — Considérons maintenant un polynome du second degré en x : j'écrirai ce polynome sous la forme d'un *trinome* (polynome à trois termes) en x, $ax^2 + bx + c$, trinome dans lequel les lettres a, b, c *tiennent place d'expressions algébriques quelconques ne contenant pas* x. J'ai évidemment

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

[1] CARDAN, *Practica Arithmeticæ generalis*, chap. LI, § 17, *Opera*, IV, p. 78.

D'ailleurs l'identité (I) $\left[\text{où je remplace } a \text{ par } x \text{ et } b \text{ par } \frac{b}{2a}\right]$ me donne :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2};$$

d'où je conclus que

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Réduisant les deux dernières fractions au même dénominateur, j'écris finalement l'identité

$$\text{(XVI)} \qquad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le trinome du second degré peut être mis sous une autre forme encore si le nombre $b^2 - 4ac$ *est positif.* Considérons, en effet, dans cette hypothèse, la racine carrée de $b^2 - 4ac$, que nous désignerons par d. L'expression entre crochets, dans le second nombre de (XVII), est la différence du carré (¹) de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ et du carré de $\frac{d}{2a}$. J'en conclus, d'après l'identité (VIII), que cette différence est identique au produit $\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{d}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{d}{2a}\right)$; j'ai donc :

$$\text{(XVII)} \quad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

identité dans laquelle le radical représente la racine carrée positive de $b^2.4ac$ (voir n° **136**).

Ces diverses identités furent formulées à l'occasion de la théorie des équations polynomales dont nous parlerons plus loin (§ *6*).

(¹) Le carré d'une fraction $\frac{b}{2a}$ est, comme on sait, le rapport du carré du numérateur b au carré du dénominateur ($2a$) [voir n° 36].

4. — *Fonctions et équations.*

306. Expressions et fonctions. — Les calculs du paragraphe précédent accusent une imprécision de notre langage. Nous appelons *expression algébrique* une combinaison de signes algébriques, et, lorsque nous remplaçons cette combinaison par une autre (dite identique), nous disons que nous *transformons l'expression*. Or, ce qui subit une transformation, ce n'est point à proprement parler la combinaison de signes, — laquelle disparaît pour faire place à une nouvelle combinaison : c'est plutôt le *substratum* de la combinaison ; c'est la chose signifiée par l'expression algébrique.

Poussons donc un peu plus avant notre analyse. J'observe d'abord que quand je passe d'une expression algébrique à une autre identique, quelque chose demeure : la valeur numérique commune (positive ou négative) que prennent les deux expressions lorsque l'on attribue des valeurs numériques (arbitraires) aux lettres qui y figurent. Voici, par exemple, une expression algébrique $\frac{a-b}{cd}$, ou $\sqrt{\frac{c+d^2}{cb}}$, ... où entrent quatre lettres a, b, c, d : lorsque je donne à a, b, c, d des valeurs numériques particulières, l'expression prend aussi une valeur numérique ; cette valeur varie quand je modifie les valeurs de a, b, c, d ; mais, en revanche, elle n'est point altérée par les transformations algébriques de l'expression.

Cette remarque me conduit à caractériser comme il suit la nature et le rôle des expressions algébriques. *Une expression algébrique, où figurent des lettres a, b, c, d, définit une loi de correspondance suivant laquelle à des valeurs arbitrairement assignées aux lettres a, b, c, d, correspond une certaine quantité* (*ou nombre*) *déterminée* (*valeur de l'expression*). *Cette quantité déterminée est appelée fonction* ([1]) *de a, b, c, d, et l'on dit qu'elle a pour expression l'expression algébrique considérée.*

Partant de cette définition (elle s'applique aux expressions

([1]) Jean Bernoulli semble être le premier auteur qui ait fait un emploi systématique du mot « fonction ». Ce n'est pas toutefois des considérations développées dans le présent paragraphe que la notion de fonction, en fait a été tirée (voir *infra*, ch. II, § 1).

contenant un nombre quelconque de lettres), nous pourrons dire qu'une transformation algébrique quelconque consiste à substituer à une expression d'une fonction une autre expression de la même fonction. La fonction subsiste, mais change de forme ; l'expression est *remplacée*.

307. Fonction algébrique de certaines lettres ou variables. — Désignons par une lettre, g, le nombre (variable lorsque les valeurs de a, b, c, d varient) auquel est égale une expression algébrique où figurent les lettres a, b, c, d. Pour définir par une formule algébrique la valeur du nombre g, nous écrivons que g *égale* (=) l'expression algébrique donnée, et nous disons que g est *fonction algébrique* des quatre lettres, ou des quatre (*valeurs* ou *quantités*) *variables*, ou des quatre *arguments* a, b, c, d.

Ainsi une égalité telle que

$$g = a^2b + cd, \quad \text{ou} \quad g = \frac{\sqrt{a + 2b^2}}{3cd}$$

définit g comme fonction de a, b, c, d.

Lorsque g est fonction des valeurs a, b, c, d, nous disons que « la valeur de g est *déterminée* par les valeurs de a, b, c, d » ou encore que « la valeur de g *dépend* des valeurs de a, b, c, d ». On aura parfois intérêt à signaler cette dépendance sans, pour cela, se donner la peine d'indiquer expressément *comment* g dépend de a, b, c, d (c'est-à-dire : quelle est l'expression algébrique à laquelle g est égale). On se servira à cet effet d'un symbole spécial, composé d'une lettre, de parenthèses et de virgules, et l'on écrira (¹) (en utilisant, par exemple, la première lettre, f, du mot *fonction*) : $g = f(a, b, c, d)$.

Nous pourrions d'ailleurs éviter d'introduire ici une nouvelle lettre en écrivant tout simplement $g = g(a, b, c, d)$, ce qui signifie : « la valeur de g est déterminée par les valeurs de a, b, c, d ».

308. — Serrons la question de plus près encore. Lorsque nous parlons de « fonctions de a, b, c, d », nous avons notre attention

(¹) Cette notation a été employée pour la première fois par Euler (*Commentar. Petropoli ad annos*, 1734-35, t. VII, St-Pétersbourg, 1740, p. 186). Des signes analogues avaient déjà été employés par Jean Bernouilli et Leibniz.

fixée sur cette circonstance que les valeurs de a, b, c, d sont *variables* [1] (*arbitrairement variables*). C'est à cause de cette variabilité que l'égalité $g = f(a, b, c, d)$ définit une infinité de nombres différents, ou, en d'autres termes, un *nombre g variable*. C'est pourquoi l'on dit que le nombre g est *variable en même temps que — ou variable avec —* les nombres a, b, c, d.

Qu'est-ce, dès lors, en définitive que définir une fonction? C'est établir une correspondance entre certains nombres variables, tels que, a, b, c, d, et un autre nombre variable g qui dépend des premiers. Les nombres a, b, c, d, sont appelés : « nombres variables indépendants » ou « *variables indépendantes* » (étant sous-entendu le mot *quantité* pris comme synonyme de « nombre positif ou négatif »); le nombre g est appelé « *variable dépendante* ».

309. — Nous voici maintenant en état de bien préciser la signification véritable des expressions algébriques.

L'étude d'une expression est au fond (et alors *même que ce n'est pas de la variabilité de cette expression que l'on se préoccupe momentanément*) l'étude d'une quantité dépendante, déterminée par une ou plusieurs autres quantités (variables indépendantes), que l'on nomme parfois *arguments* de la fonction. C'est afin de manifester plus clairement, ou plus simplement, la dépendance définie par une expression que l'algébriste se trouve amené à écrire cette expression sous plusieurs formes différentes.

310. **Distinction des variables et des quantités fixes (constantes)**. — Il résulte de ce qui précède que l'étude complète d'une expression algébrique peut être particularisée de diverses manières, entre lesquelles il faut établir une distinction.

Dans l'expression $y = a^2b + cd$, faisons, par exemple, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$; l'expression devient $y = a^2 + 2$, égalité qui définit y comme fonction de la seule variable a. Faisons maintenant $b = 3$, $c = -1$, $d = 2$; notre expression devient $y = 3a^2 - 2$ et définit une nouvelle fonction de a. D'une manière générale, nous voyons que si *l'on attribue aux lettres b, c et d des*

[1] « *Nunc in postea* — dit Newton (*Methodus fluxionum*, apud *Opuscula*, t. I, Lausanne et Genève, 1744, p. 54) — *fluentes vocabo quantitates has quas considero tanquam gradatim et indefinite crescentes* ».

valeurs fixes (constantes, déterminées) quelconques, et à la lettre a des valeurs variables, l'égalité $g = a^2b + cd$ définit y comme fonction de a. Cet énoncé est bien clair pour nous ; en effet nous avons dit (n° **275**) que l'algèbre opère à la fois sur des nombres fixes (constants) et sur des nombres variables ; nous avons donc toujours le droit de figurer par b, c, d trois nombres fixes et par a un nombre variable.

De la même façon, et suivant les hypothèses que l'on fera, on pourra considérer que l'égalité $y = a^2 b + cd$ définit y comme fonction des deux variables a et b, ou comme fonction des trois variables a, b, c, etc. Cette remarque s'applique, bien entendu, à une expression algébrique quelconque.

Lorsque dans une expression algébrique on veut signifier que certaines lettres représentent des nombres variables, on choisit de préférence, ces lettres parmi les dernières de l'alphabet (**280**). C'est pourquoi, si nous voulons étudier l'expression $g = a^2 b + cd$ *en tant qu'elle définit g comme fonction de a*, nous indiquerons cette intention ([1]) en remplaçant, par exemple, la lettre a par la lettre x et la lettre g par la lettre y.

Nous dirons alors que, quelles que soivent les valeurs de b, c, d, la variable dépendante y définie par l'égalité $y = bx^2 + cd$ est une fonction de la véritable indépendante x.

Pareillement une égalité telle que $z = \frac{\sqrt{x + bxy}}{ay^2 + c}$ définit z comme fonction de x et y.

Pour exprimer que y est fonction de x, nous écrirons souvent, symboliquement : $y = f(x)$ (la lettre f pouvant d'ailleurs être remplacée par une autre quelconque, cf. **30**). Nous entendons par là que la valeur de y est *déterminée* par celle de x ; ce qui n'empêche aucunement que l'expression algébrique de y ne puisse dépendre de certaines lettres a, b, c, d, ... qui tiennent places de valeurs numériques *quelconques mais fixes*.

311. Fonctions polynomales. Identité de deux polynomes. — Les plus simples des fonctions d'une variable x sont les poly-

([1]) Nous l'indiquerons aussi par la manière dont nous écrirons l'expression. Si, par exemple, l'expression est un polynome par rapport à a nous le mettrons sous la forme indiquée au n° 290.

nomes en x, que nous avons définis au n° **290** : ce sont, dirons-nous, des fonctions *entières* ou *polynomales* [1].

Pour compléter la définition de ces fonctions, nous allons montrer qu'une fonction polynomale de x ne peut être mise que *d'une seule manière* sous la forme d'un polynome ordonné comme il a été dit au n° **290**.

Considérons plus précisément deux polynomes de degré n en x, que nous écrirons

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \qquad b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0,$$

les lettres $a_n, \dots a_0$, $b_n, \dots b_0$ représentant les coefficients (lesquels peuvent être des expressions algébriques quelconques ne contenant pas x). Nous allons établir que ces polynomes ne peuvent être identiques, c'est-à-dire prendre tous deux la *même* valeur (variable) pour toute valeur (variable) donnée à x que si leurs coefficients *correspondants* (de même indice) ont la même valeur [2].

312. — Envisageons d'abord deux polynomes du premier degré $a_1 x + a_0$ et $b_1 x + b_0$. Pour qu'ils soient identiques, il faut qu'ils soient en particulier égaux lorsque $x = 0$; or, pour $x = 0$, ils se réduisent à a_0 et b_0 ; donc a_0 et b_0 doivent avoir des valeurs égales. Retranchant maintenant cette valeur des deux polynomes supposés identiques, nous voyons que les monômes $a_1 x$ et $b_1 x$ doivent être égaux quelque soit x ; ceci exige que $a_1 = b_1$.

Inversement, si leurs coefficients correspondants n'ont pas des valeurs égales, les deux polynomes (on le constate immédiatement) prennent des valeurs différentes pour une infinité de valeurs données à x [3].

[1] Si le polynome est du premier degré, il est dit fonction *linéaire* (cf. 292).

[2] Y compris les coefficients de x^0, c'est-à-dire les termes indépendants de x [voir n° 283].

[3] Bien entendu, les valeurs des polynomes que l'on compare deux à deux sont toujours celles qui correspondent à une même valeur de x. La théorie des équations du premier degré permet (voir § 6) d'affirmer, plus précisément, que deux polynomes du premier degré non-identiques ne peuvent prendre la même valeur que pour une seule valeur de x, savoir la racine de l'équation $a_1 x + a_0 = b_1 x + b_0$ $\left[\text{qui est } x = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}\right]$.

Considérons maintenant deux polynomes du second degré, $a_2x^2 + a_1x + a_0$ et $b_2x^2 + b_1x + b_0$, et supposons les identiques. Ils doivent être égaux pour $x = o$; donc $a_0 = b_0$. Retranchant, d'autre part, des deux polynomes la valeur commune de a_0 et b_0 nous voyons que les deux polynomes $a_2x^2 + b_1 x$ et $b_2x^2 + b_1x$ doivent être identiques; donnons alors à x une valeur quelconque non-nulle [1], et divisons par x; les deux polynomes du premier degré $a_2x + a_1$ et $b_1 x + b_1$ doivent être égaux (quel que soit x non-nul) ce qui ne peut avoir lieu, d'après ce qui précède, que si $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$. Si ces conditions sont satisfaites les deux polynomes du second degré sont identiques; sinon, on démontre facilement qu'ils prennent des valeurs différentes pour une infinité de valeurs diverses données à x.

En poursuivant le même mode de raisonnement (raisonnement récurrent, voir n° **258**) on étend les conclusions qui précèdent à des polynomes de degré quelconque [il résulte en particulier de ces conclusions que les polynomes ne peuvent être identiques que s'ils sont de même degré].

Les polynomes du second degré

$$ax^2 + \sqrt{ab}\, x + c \quad \text{et} \quad 3x^2 + x + a,$$

par exemple, seront identiques si l'on a $a = 3$, $\sqrt{ab} = 1$, $c = a$.

Un polynome ne peut être *identiquement* nul — c'est-à-dire égal à o pour toute valeur de la variable x — que si tous ses coefficients sont nuls.

313. — Les fonctions polynomales de plusieurs variables — polynomes en $x, y, z,..$ (voir n° **291**) donnent lieu à des remarques semblables. Deux polynomes en $x, y, z,..$ ne peuvent être identiques (c'est-à-dire égaux quelles que soient les valeurs *données aux variables $x, y, z,..$) que si les coefficients des termes semblables* [2] *dans les deux polynomes ont deux à deux des valeurs égales.*

Ainsi les polynomes

$$ax + by + abxy + cy^2 \quad \text{et} \quad 3x + y + dx^2 + exy$$

[1] Si x était nul, la division des deux polynomes par x serait une opération impossible.

[2] Voir n° 297. Je suppose ici que toutes les puissances semblables d'un même polynome sont réunies en un seul terme.

sont identiques si l'on a $a = 3$, $b = 1$, $0 = d$, $ab = e$ et $e = 0$, et dans ce cas seulement.

314. Remarque. — Il importe de noter que l'on a coutume de qualifier « fonction polynomale », — ou, pour abréger, « polynome » — toute fonction de une ou plusieurs variables dont l'expression *peut* être mise (sans l'être nécessairement déjà) sous forme de polynome (par voie de transformation algébrique). La nature d'une fonction doit être, en effet, considérée comme indépendante des transformations que subit son expression. Ainsi l'on dira que la fonction de x définie par le produit $(3x + 1)(x - 2)$ est polynomale parce que le *développement* de ce produit (n° 285) est un polynome.

315. Fonctions rationnelles. — Après le polynome, la fonction la plus simple est la *fonction* (ou *fraction*) *rationnelle*. On appelle ainsi le quotient de deux polynomes, ou fraction ayant pour numérateur et pour dénominateur deux fonctions polynomales d'une ou plusieurs variables. — Si les polynomes sont du premier degré, la fonction rationnelle est dite *homographique*.

Les polynomes — que l'on peut considérer comme des quotients de polynomes par le nombre 1 — sont compris dans la classe des fonctions rationnelles.

Toute fonction non rationnelle est dite *irrationnelle*.

316. Identité de deux fonctions. — Nous allons compléter l'analyse faite aux numéros précédents en expliquant, d'une manière générale, en quoi consiste *l'identité* de deux fonctions et dans quelles conditions cette identité peut être réalisée.

Considérons, pour fixer les idées, deux fonctions de trois variables : $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$.

1° Si les expressions f et g ne contiennent, outre les lettres x, y, z, que des nombres arithmétiques, les deux fonctions seront identiques, ou non, suivant qu'elles prennent, ou non, toujours la même valeur (variable) lorsque l'on donne à x, y, z des valeurs (variables) quelconques.

2° Si les expressions f et g contiennent des lettres telles que a, b, ... représentant des quantités fixes (indépendantes des

variables), et si ces expressions sont identiques (au sens du n° **294**), quelles que soient les valeurs données aux variables, x, y, z, les deux fonctions sont évidemment identiques, et cela quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités fixes $a, b, c, \ldots$

3° Si les expressions f et g contiennent des lettres telles que $a, b, \ldots$ représentant des quantités fixes, et ne sont pas identiques au sens spécifié ci-dessus, les fonctions f et g ne pourront pas être identiques quelles que soient les quantités $a, b, c, \ldots$ *mais seulement pour certaines valeurs de ces quantités*. Le problème se pose alors de rechercher à quelles conditions doivent satisfaire les nombres constants $a, b, c, \ldots$ pour que les deux fonctions soient identiques. C'est le problème que nous avons résolu dans le cas où les fonctions sont des polynomes.

Une fonction identique à o est dite *identiquement nulle.*

317. — A ces remarques et définitions relatives à l'identité, nous ajouterons le théorème suivant, dont nous nous dispenserons de donner la démonstration rigoureuse :

La condition nécessaire et suffisante pour que le produit de plusieurs fonctions (définies par des expressions algébriques) soit identiquement nul est que l'une des fonctions le soit (¹).

318. Equations. — Dans les pages qui précèdent, la notion de fonction vient de se présenter à notre réflexion comme le support nécessaire de l'algèbre. Nous nous sommes demandé qu'elle est la chose qui revêt, par l'effet de la transformation algébrique, des formes différentes, et nous avons trouvé que cette chose est la fonction. Cependant il ne faudrait pas croire que l'idée de fonction soit apparue dans toute sa netteté à l'esprit des premiers algébristes. (Cf. p. 305, note 1 et ch. II, § *I*). Les mathématiciens antérieurs au XVIIᵉ siècle n'envisagèrent que l'une des applications auxquelles donne lieu l'étude des fonctions : la résolution des équations algébriques, ou calcul des *inconnues* (voir § *I*) définies par des équations.

Supposons que nous connaissions une fonction de x, $y = f(x)$, et posons-nous la question suivante : *Pour quelle ou quelles valeurs*

(¹) On sait que pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.

de x, la variable dépendante y prend-elle une valeur a donnée à l'avance [1] ?

On peut poser autrement le même problème en disant que l'on cherche la ou les valeurs de x pour lesquelles a lieu l'égalité $f(x) = a$. Cette égalité est appelée *équation* [2] en x. Pour écrire *explicitement* l'équation, on doit remplacer $f(x)$ par l'expression algébrique dont le symbole $f(x)$ tient pour nous la place.

Remarque. — L'équation $f(x) = a$ peut être écrite $f(x) - a = 0$. Il est toujours possible, en d'autres termes, de mettre une équation relative à l'inconnue x sous la forme [3] :

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire sous la forme d'une égalité dont le premier membre est une fonction de x et le second membre zéro (la fonction étant d'ailleurs quelconque et pouvant contenir des lettres a, b, c, ..., qui représentent des nombres connus).

On pourra mettre, plus généralement, sous la même forme (1) toute égalité [4] où figurent l'inconnue x et des nombres supposés connus a, b, c, ... Une telle égalité pourra donc toujours être regardée comme une *équation*; elle est parfois aussi appelée *relation* (entre la quantité inconnue x et les [quantités connues a, b, c, etc.). Cette dernière expression est empruntée au langage géométrique (p. 117, note 1)].

[1] Remarquons que si, *sans connaître x*, nous voulons raisonner sur x et y, nous devons prendre soin de ne faire d'autres déductions que celles qui restent valables *quelle que soit* la valeur de l'inconnue x ; nous devons, en d'autres termes, faire porter nos raisonnements sur la *fonction* $f(x)$, en supposant provisoirement que x puisse prendre des valeurs quelconques. Ainsi tout calcul portant sur des inconnues est, en réalité, un calcul portant sur des *variables*. Cependant il n'est point nécessaire d'approfondir l'examen de la fonction $f(x)$, si l'on a simplement en vue la résolution et l'étude des racines de l'équation correspondante.

[2] De *æquatio*, égalité ; en allemand, *Gleichung*.

[3] « Ce sera, dit DESCARTES, souvent le meilleur de les considérer en cette sorte [les équations] ». (*La Géométrie*, *Œuv.*, t. VI, p. 444).

[4] Une telle égalité est de la forme

$$\varphi(x, a, b, c, \ldots) = \psi(x, a, b, c, \ldots)$$

[les symboles φ et ψ qui figurent dans les deux *membres* désignant des fonctions quelconques] : on peut l'écrire ;

$$\varphi(x, a, b, c, \ldots) - \psi(x, a, b, c, \ldots) = 0,$$

où le premier *membre* est une fonction de x que je représente par $F(x)$.

La ou les valeurs de x qui *satisfont* à l'égalité ou équation (1) [qui «vérifient» l'équation] sont appelées «solutions» «ou racines[1]» de l'équation. Ces valeurs dépendent naturellement des lettres a, b, c, ... qui figurent dans l'équation ; «résoudre» l'équation, dès lors, ou en trouver les solutions, ce sera *trouver les expressions algébriques formées avec les lettres* a, b, c, ... *auxquelles les racines sont égales*; on dit que ces expressions sont « les expressions des racines *en fonctions* des quantités a, b, c, ... ».

319. Exemples. -- L'égalité $a(x - b)^2 - c = 0$ est une équation, qui est *satisfaite* quand $(x - b)^2$ est égal à $\frac{c}{a}$ et par conséquent quand $x - b$ est égal à la racine carrée de $\frac{c}{a}$: si donc $\frac{c}{a}$ est un nombre positif, l'équation a deux racines :

$$x = b + \sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \text{et} \qquad x = b - \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

L'égalité $\frac{3 + a}{x - b} = 1$ est une équation qui est satisfaite lorsque $3 + a = x - b$: on déduit de là qu'elle a pour racine le nombre $x = 3 + a + b$.

Nous retrouverons plus loin quelques exemples simples d'équations algébriques. Mais, avant de quitter le point de vue général et abstrait où nous nous sommes placés, nous voudrions indiquer *a priori*, dans une esquisse rapide, comment se posent les principaux problèmes relatifs aux équations. Nous invitons de nouveau le lecteur qui trouverait trop aride l'exposition qui va suivre à s'aider d'un traité d'algèbre élémentaire : il pourra ainsi se familiariser graduellement avec les notions nouvelles que nous allons être obligés d'introduire.

320. Equations à plusieurs inconnues. — Si dans l'expression $F(x)$ il n'entre qu'une inconnue, x, l'équation $F(x) = 0$ est dite *équation à une inconnue*. Soit maintenant $F(x, y)$ une expression (fonction de x et y) qui contient deux inconnues x et y :

[1] Nous avons vu (274) que l'*inconnue* (*cosa*) fut appelée *radix* par les traducteurs des algébristes arabes.

nous dirons que l'égalité $F(x, y) = 0$ est une *équation à deux inconnues*.

Nous définirons de même les équations à 3, 4, etc., inconnues. D'une manière générale, toute égalité [ou relation, *vide supra*, **317**] où figurent des nombres ordinaires, des lettres $a, b, c, \ldots$ représentant des quantités connues, et des lettres $x, y, z, \ldots$ représentant des quantités inconnues, est une *équation*; elle peut être mise sous la forme

$$F(x, y, z, \ldots) = 0. \tag{2}$$

On appellera *système de solutions* d'une équation (2) tout ensemble de valeurs (associées) des inconnues $x, y, z, \ldots$ qui *vérifient* l'équation, c'est-à-dire tout ensemble de nombres tels que, lorsqu'on les met à la place de $x, y, z, \ldots$ dans l'expression F, cette expression se réduit à 0.

321. Equation déterminée ou indéterminée. — Si, en égalant à 0 les expressions algébriques les plus simples, nous formons, à titre d'exemples, des équations à une inconnue x, nous constatons aussitôt que ces équations ne peuvent être satisfaites par des valeurs quelconques de x (à moins qu'elles ne se réduisent à des identités) [1] : leurs solutions — si elles en ont — sont déterminées [2] (c'est pourquoi nous dirons que les équations elles-mêmes sont *déterminées*).

En sera-t-il de même des équations à plusieurs inconnues? Il est facile de voir que non. Prenons pour exemple l'équation

$$2x + 3y - 1 = 0;$$

[1] Si l'on se donne une égalité de la forme

$$\varphi(x, a, \ldots) = \psi(x, a, \ldots),$$

il faut s'assurer, avant de traiter cette égalité comme une équation, qu'elle ne se réduit pas à une *identité* ayant lieu quel que soit x. Ainsi l'égalité

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$$

a lieu quel que soit x (n° 301) : elle n'a pas de « solutions déterminées ».

[2] J'entends : *déterminées par les valeurs des nombres et des lettres (représentant des quantités connues) qui figurent dans l'équation*, ou encore : *calculables lorsque l'on donne aux lettres a, b, c, ... des valeurs numériques déterminées.*

elle peut « être *vérifiée* par » (admettre comme solution) n'importe quelle valeur de x pourvu que l'on donne à y une valeur correspondante convenable : si, par exemple, l'on fait $x = 0$, il faudra que $3y = 1$, donc $y = \frac{1}{3}$; si $x = 1$, il faudra que $3y + 2 - 1 = 0$, c'est-à-dire $3y = -1$ ou $y = -\frac{1}{3}$, etc. Ainsi, on ne peut sans doute pas choisir arbitrairement les deux valeurs x *et* y qui satisfont à l'équation, mais on peut choisir la valeur de x *ou* celle de y. L'équation, pour cette raison, est dite *indéterminée* [1] : elle admet une *infinité* de solutions (il existe une infinité de *couples* de valeurs x et y qui la vérifient).

322. Systèmes d'équations simultanées. — Nous serons, par contre, en présence d'un problème en général déterminé si nous nous proposons de trouver un couple de valeurs de x et y qui vérifient à la fois (soient *solutions* de) deux équations

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

En effet [2], considérons *provisoirement* y comme connu : alors l'équation $F = 0$ est une équation en x, dont la ou les racines (si on sait les calculer) s'expriment *en fonction* de y et des lettres $a, b, c, \ldots$ (représentant des nombres connus) qui figurent dans F. Il en est ainsi quel que soit y. Mais nous voulons que y et la valeur correspondante de x soient solutions de l'équation $G = 0$. La lettre y doit, par conséquent, avoir une valeur telle que, lorsque dans la fonction G on remplace x par une des *racines de* $F = 0$ *exprimées en fonction de* y, l'équation $G = 0$ soit vé-

[1] Les équations indéterminées ont été, depuis DIOPHANTE (voir p. 31, note 2), l'objet de nombreuses recherches : on s'est proposé en particulier de trouver les valeurs entières (nombres entiers) de x, y qui peuvent satisfaire à une équation indéterminée à deux inconnues x, y [cf. 27]. Ces mêmes équations indéterminées se trouvent, comme nous le verrons plus loin, à la base de la géométrie analytique [voir chap. IV, § 2]. — Notons que l'épithète *indéterminée* ne paraît pas avoir été employée avant le XVIII[e] siècle [on la rencontre chez LAGRANGE, cf. *supra*, p. 33, note 1].

[2] Le lecteur qui voudrait éclairer cette déduction par un exemple pourra se reporter tout de suite au n° 340.

rifiée. Or, lorsqu'on substitue à x une expression fonction de y, l'équation $G = 0$ devient une équation *à une inconnue*. Sa ou ses racines sont les valeurs cherchées de y : on en déduit les valeurs correspondantes de x [données en fonction de y par l'équation $F = 0$ où y est désormais connu]. Ainsi, les couples de valeurs associées de x et y qui rendent nulles les *deux* fonctions F et G sont en général *déterminées*.

Remarque. — La méthode que nous venons de suivre pour étudier le système $F = 0$, $G = 0$ est appelée « *méthode de substitution* » ; elle consiste, a-t-on coutume de dire à « tirer x de la première équation », puis à « porter l'expression trouvée dans la seconde équation ».

323. — D'une manière générale, considérons un ensemble d'équations.

$$(3)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, u, \ldots) = 0 \\ G(x, y, z, u \ldots) = 0 \\ H(x, y, z, u, \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

contenant plusieurs inconnues. Si nous pouvons trouver un ensemble de valeurs déterminées des inconnues, soit [1] x_0, y_0, z_0, u_0,... telles que toutes les fonctions, F, G, H,., soient nulles lorsqu'on y fait [2] à la fois $x = x_0$, $y = y_0$, etc, nous dirons que l'ensemble des valeurs x_0, y_0, z_0, u_0,... est un *système de solutions* ou de *racines* des équations (3).

L'ensemble des équations (3) est lui-même appelé *système d'équations simultanées*. Si p est le nombre des équations, n le nombre des inconnues, on précisera en disant que le système (3) est un *système de p équations simultanées à n inconnues*.

Un système contenant autant d'équations que d'inconnues est en général [3] *déterminé* (a des solutions déterminées, cf. nos **362-67**). — *Un système contenant plus d'inconnues que d'équations*

[1] Ces valeurs — que je représente par les lettres x_0, y_0, z_0, ... — sont des nombres ou des expressions algébriques ne dépendant qu des quantités fixes (supposées connues) qui figurent dans les équations.

[2] C'est-à-dire « lorsqu'on y donne à x la valeur x_0 », etc.

[3] Voir à ce sujet le § 8 du présent chapitre et le § 2 du chap. v.

est en général indéterminé. — Un système contenant plus d'équations que d'inconnues n'admet en général pas de solutions.

324. Systèmes impossibles. — Nous disons d'un système dépourvu de solutions qu'il est *impossible* (il n'est alors ni *déterminé*, ni *indéterminé*). Cette circonstance peut se présenter, lors même que l'on n'a pas plus d'équations que d'inconnues, si les équations du système expriment des faits contradictoires. — Ainsi le système $2x + y = 1$, $2x + y = 2$ est *impossible*, car, quelles que soient les valeurs données à x et à y, la somme $2x + y$ ne peut pas être *à la fois* égale à 1 et égale à 2.

5. — Transformation des équations

325. Résolution d'une équation. — Comment trouver la ou les valeurs de x qui *vérifient* une équation, par exemple l'équation à une inconnue

$$F(x) = 0 \, ? \qquad (1)$$

Les exemples donnés au n° **319** montrent que le problème est parfois aisé à résoudre. Supposons, plus généralement que nous ayons affaire à une fonction $F(x)$ de la forme [1]

$$A(x - B), \text{ ou } A(x - B)(x - C), \text{ ou } A(x - B)(x - C)(x - D) \ldots ;$$

remarquant qu'un produit de plusieurs nombres ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul, nous voyons qu'il faudra et suffira, pour que $F(x)$ soit nul, que $x = B$, ou $x = C$, ou $x = D$ ...; donc les nombres B, *ou* B et C, *ou* B, C et D, ... seront des racines (et les seules) de l'équation (1).

Lorsque la fonction $F(x)$ ne se présente pas sous l'une des formes indiquées ci-dessus, on peut chercher à l'y ramener

[1] Il n'y aurait naturellement rien à changer aux conclusions que nous allons énoncer si, dans l'expression de $F(x)$, les grandes lettres A, B, C, ... étaient remplacées par des expressions algébriques quelconques formées avec des lettres qui représentent toutes des nombres connus.

par une transformation algébrique (1) (voir § 3) : si pareille transformation est possible, l'équation peut être « résolue ».

Mais les transformations que l'on sera en droit d'utiliser pour résoudre l'équation (1) ne sont point seulement celles qui remplacent l'expression $F(x)$ par une expression *identique* (voir § 3 et § 4). D'autres transformations sont également légitimes, qui sont propres à la théorie des équations algébriques ; c'est de celles-là que nous allons maintenant nous occuper.

326. Equations équivalentes. — Soit $F(x, y, z, \dots) = 0$ une première équation dépendant des inconnues $x, y, z, \dots$ Nous dirons qu'une seconde équation $G(x, y, z, \dots) = 0$ est équivalente à la première *si tout système de valeurs des inconnues $x, y, z, \dots$ satisfaisant à l'une des équations satisfait également à l'autre.* Lorsqu'il en est ainsi, on a le droit de remplacer l'équation (2) $F = 0$ par l'équation $G = 0$: on dit alors que l'on effectue une *transformation* de l'équation $F = 0$.

La même terminologie s'applique aux équations qui n'ont pas été ramenées à la forme $F = 0$ [voir p. 315, note 4] et qui se présentent sous la forme

$$(2) \qquad f(x, y, z, \dots) = g(x, y, z, \dots).$$

Toute équation ayant les mêmes racines que l'équation $f = g$ lui est *équivalente*.

Signalons quelques transformations fréquemment utilisées (3) :

1° Si l'on ajoute une même quantité aux deux membres de l'équation $f = g$, on obtient une équation équivalente : ainsi les équations $3x + 2y + 1 = 5 - x$ et $4x + 2y + 1 = 5$ sont équivalentes.

C'est en vertu de ce principe que, lorsque les deux membres de l'équation (c'est-à-dire les deux expressions f et g) sont des

(1) Si, par exemple, $F(x) = x^2 - a^2$, on remarque que $F(x)$ est identique à $(x - a)(x + a)$, et l'on en conclut que l'équation (1) admet pour racines a et $-a$.

(2) J'écris, pour abréger, $F = 0$ au lieu de $F(x, y, z, \dots) = 0$.

(3) Toutes ces transformations ont été pratiquées, plus ou moins habilement, dès les premiers temps de l'algèbre, mais elles ne trouvèrent leur formule définitive qu'au XVIIIe siècle (dans l'œuvre d'EULER en particulier).

sommes. *on peut faire passer un terme quelconque d'un membre dans l'autre en en changeant le signe*; l'opération ainsi effectuée est la *djebr* (**267**) [exemple : les équations $2x - y - z = 0$, ou $-y = z - 2x$ sont équivalentes].

2° *Les deux équations*

$$F(x, y, z, ..) = 0, \quad A.F(x, y, z, ...) = 0,$$

où A est un nombre constant (ou une expression algébrique ne dépendant pas des inconnues) *sont équivalentes.*

3° Considérons l'équation à une inconnue $F(x) = 0$ et un polynome en x [que nous désignerons par $P(x)$] *ne prenant la valeur* 0 *pour aucune des valeurs de x qui sont racines de l'équation.* Quelle que soit la valeur finie (non infiniment grande, n° **134**) donnée à la quantité x, la valeur du polynome $P(x)$ ne peut pas être infiniment grande (¹). Il en résulte que la fraction $\frac{F(x)}{P(x)}$ ne peut être nulle que si son numérateur est nul. Par contre, lorsque l'on prend pour valeur de x une racine de l'équation $F(x) = 0$, la fraction est nulle. J'en conclus que *les deux équations*

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{F(x)}{P(x)} = 0$$

sont équivalentes (²).

Ainsi, par exemple, les deux équations

$$\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + x - 3 = 0$$

sont équivalentes. Pour résoudre la première, il suffira de résoudre la seconde, qui est manifestement plus simple.

4° On peut effectuer une transformation analogue sur les équations à plusieurs inconnues qui appartiennent à un système d'équations simultanées. Soit, par exemple, proposé le système

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

(¹) Puisque cette valeur est le résultat d'une combinaison d'additions et de multiplications effectuées sur la quantité x et des quantités fixes.

(²) Il en est de même, d'une manière générale, si $P(x)$ est une fonction quelconque qui n'est infiniment grande pour aucune valeur de x et telle que les racines de $F(x) = 0$ ne soient pas racines de $P(x) = 0$.

Appelons $P(x, y)$ une fonction de x et y qui ne soit jamais infiniment grande et ne soit pas nulle lorsqu'on y remplace x et y par un système de solutions du système proposé (*voir* **323**) : alors les équations

$$F = 0 \text{ et } \frac{F(x, y)}{P(x, y)} = 0, \quad \text{ou} \quad G = 0 \text{ et } \frac{G(x,y)}{P(x,y)} = 0$$

sont deux à deux équivalentes.

327. Remarque sur les systèmes indéterminés. — Les remarques que nous venons de faire sur les équations équivalentes nous avertissent qu'un système de n équations à n inconnues pourra exceptionnellement ne pas admettre un système de solutions déterminées (voir n° **323**). Supposons, en effet, que les équations à deux inconnues $F(x, y) = 0$ et $G(x, y) = 0$ soient *équivalentes* [la fonction G étant par exemple le produit de F par un nombre A]. En ce cas, il revient au même de nous *donner* les deux équations ou d'en donner seulement une ; les solutions du système $F = 0$, $G = 0$ ne sont donc pas plus déterminées que celles de l'équation unique $F = 0$ (voir n° **321**).

328. Systèmes d'équations équivalents. — Un système d'équations tel que le système (3) du n° **323** sera dit *équivalent* à un autre système dépendant des mêmes inconnues, si tout système de solutions du premier système est système de solutions du second, et réciproquement.

Un système formé d'équations respectivement équivalentes aux équations (3) est évidemment équivalent au système (3) ; ainsi les systèmes

$$\begin{cases} 2(x+y) = 0 \\ \dfrac{x-y+1}{x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

sont équivalents. — Mais on peut aussi obtenir des systèmes équivalents au système (3) en *combinant* convenablement les équations de ce système.

Je dis par exemple, que *le système de deux équations à deux inconnues*

$$(3) \qquad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

est équivalent aux systèmes

$$\begin{cases} F = 0 \\ aF + bG = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} G = 0 \\ aF + bG = 0 \end{cases}$$

où les lettres a, b réprésentent des quantités connues (indépendantes de x et y).

En effet, il est clair que si, pour un certain système de valeurs de x et y, les fonctions F et G sont nulles, il en est de même de la fonction $aF + bG$. Réciproquement si F et $aF + bG$ sont nulles, la fonction aF est aussi nulle et la différence bG des fonctions $(aF + bG)$ et aF est nulle; donc G est nulle. Si G et $aF + bG$ sont nulles, F est nulle pour la même raison.

Plus généralement, nous constatons que le système (3) est équivalent au système [1]

$$\begin{cases} a.\ F(x, y) + b.\ G(x, y) = 0 \\ a'\ F(x, y) + b'.\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

où a, b, a', b' sont des quantités connues [2].

L'étude d'un système d'équations dépendant de 3, 4, etc., inconnues nous conduirait à des conclusions analogues.

329. Élimination d'une ou plusieurs quantités entre plusieurs équations simultanées. — Considérons un système de deux équations.

$$(4) \qquad F(x, y, z, u, \ldots) = 0, \qquad G(x, y, z, u, \ldots) = 0$$

dépendant de plusieurs quantités inconnues ou variables x, y, z, u,... [système en général indéterminé, si le nombre des inconnues ou variables est supérieur à 2], et appliqons à ce système la *méthode* dite de *substitution* dont nous avons déjà donné un

[1] L'équation $aF + bG = 0$ est appelée *combinaison linéaire* des équations $F = 0$, $G = 0$ [le mot *linéaire* indique (voir n° 392) que la combinaison est un polynome du premier degré par rapport à F et par rapport à G].

[2] Ces quantités ne sont cependant pas absolument arbitraires : il faut que la quantité $ab' - ba'$ ne soit pa nulle ; on constate en effet que, si $ab' - ba' = 0$, les deux nouvelles équations sont équivalentes et se réduisent à une (n° 327).

exemple au n° **322**. Nous tirons l'expression de x de la première équation [1] comme si $y, z, u, \ldots$ étaient connus et nous portons cette expression dans la seconde équation. Nous obtenons ainsi une nouvelle équation

$$G_1(y, z, u, \ldots) = 0$$

qui ne contient plus l'inconnue x.

Il est clair que l'équation $G_1 = 0$, jointe à l'équation $F = 0$ constitue un système équivalent au système proposé. Mais il y a plus : si l'on fait abstraction de la quantité x, *l'équation $G_1(y, z, u) = 0$ est à elle seule équivalente au système* (4) ; en effet, tout système de valeurs de $y, z, u, \ldots$ qui *satisfait* au système (4) satisfait également à l'équation $G_1 = 0$, et réciproquement. Nous dirons que l'équation $G_1 = 0$, équivalente au système (4), est *l'équation obtenue, par élimination* [2] *de x entre les deux équations* $F = 0$ *et* $G = 0$.

Cette définition et les remarques qui l'ont amenée peuvent être généralisées. Considérons, d'une manière générale, p équations

$$(5) \qquad F_1(x, y, z, u, \ldots) = 0, \quad F_2 = 0, \ldots \quad F_p = 0,$$

dépendant de n quantités inconnues ou variables $x, y, z, u, \ldots$ et soit le nombre n supérieur à p.

Appliquant la *méthode* de *substitution*, tirons la première inconnue x de la première équation et portons l'expression trouvée (c'est-à-dire remplaçons x par cette expression) dans les autres équations ; nous obtenons un système de $(p - 1)$ équations, *équivalent au système* (5), qui ne contient plus x, soit le système :

$$\Phi_1(y, z, u, \ldots) = 0, \quad \Phi_2 = 0, \ldots \quad \Phi_{p-1} = 0.$$

Nous dirons que ce système est obtenu par *élimination* de x entre les p équations (5).

De la première équation du nouveau système, tirons y et portons dans les autres. Nous obtenons un système de $(p - 2)$ équa-

[1] A supposer que cette opération soit possible (voir la fin du présent numéro).

[2] NEWTON disait : *extermination* (exterminatio) ; le mot *élimination* fut introduit par EULER.

tions équivalent au système (5), qui ne contient plus ni x ni y. Et ainsi de suite. Nous aboutissons finalement à une équation unique par *élimination* de $p - 1$ inconnues entre les p équations (1) : cette équation ne contient plus que $n - p + 1$ quantités inconnues ou variables.

Remarque. — Il importe cependant de noter que le procédé *d'élimination* que nous venons de définir n'a le plus souvent qu'un intérêt théorique (l'indication de ce procédé sert à établir, d'une façon simple, la possibilité de l'élimination). Dans la pratique, la méthode de *substitution* sera inapplicable si, comme il arrivera fréquemment (voir n° **349**), la première équation (5), $F_1 = 0$, *considérée comme équation à une inconnue*, ne peut pas être résolue. On démontre cependant qu'il est toujours possible d'éliminer $p - 1$ inconnues entre p équations algébriques en combinant ces équations d'une manière convenable au moyen d'opérations algébriques ; nous ne pouvons exposer la méthode générale de calcul qui conduit à ce résultat, mais nous en donnerons plus loin un exemple au n° **371**.

330. Changement d'inconnue. — On peut regarder comme une « transformation » d'équation une opération dont l'algébriste fait un fréquent usage, et qui consiste à « changer d'inconnues » ou à « prendre une *inconnue auxiliaire* ».

Soit par exemple, à trouver la ou les racines d'une équation en x. Il est clair que le problème sera résolu si nous savons calculer la différence $x - 2$; de même, si nous savons calculer x^2 (les racines de l'équation étant en ce cas les racines carrées des valeurs trouvées pour x^2); pareillement si nous connaissions la valeur (désignons-la par u) de la fraction $\frac{x-1}{x+2}$, nous en déduirions sans peine la valeur inconnue de x, car nous aurions :

$$\frac{x-1}{x+2} = u, \quad \text{d'où} \quad x - 1 = ux + 2u; \quad x = \frac{1+2u}{1-u}.$$

Ainsi nous pourrons, si cela nous est commode, substituer à la recherche directe de l'inconnue x la recherche d'une inconnue auxiliaire telle que $x - 2$, ou x^2, ou $\frac{x-1}{x+2}$.

Exemple. — Pour résoudre l'équation

$$\left(\frac{x-1}{x+2}-1\right)^2=3,$$

on prend pour inconnue auxiliaire $u=\frac{x-1}{x+2}$; on a :

$$(u-1)^2=3 ; \quad \text{d'où} \quad u-1=3^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad u=1+3^{\frac{1}{2}} ;$$

on en déduit : $x=\frac{1+2u}{1-u}=\frac{1+2\left(1+3^{\frac{1}{2}}\right)}{-3^{\frac{1}{2}}}$.

331. — D'une manière générale le changement d'inconnue consiste à remplacer l'inconnue x, dans une équation donnée, par une certaine expression algébrique dépendant d'une variable u, c'est-à-dire fonction de u; l'équation se transforme en une nouvelle équation qui ne contient plus x et dont l'inconnue est (1) u.

La règle de cette transformation est appelée par Cardan *Regula de duplice* (2) : Cardan s'en servit, en particulier, pour simplifier l'équation polynomale du troisième degré (*vide infra* nos **347** et **349** : le lecteur trouvera-là les exemples les plus simples de changements d'inconnues).

Lorsque l'on a affaire à plusieurs équations simultanées, on peut faire un changement portant sur plusieurs inconnues (voir plus bas, au n° **369** un exemple emprunté à Cardan).

332. — Ainsi nous voyons apparaître peu à peu les avantages de cette trituration, de cet « apprêtement » des formules, qui est la pierre de touche de l'algèbre (n° **271**). « Mais si l'équation, — disait Albert Girard (3) — est désordonnée, prolixe et vitiée, il la faut préparer par la réduction, et, l'ayant polie, l'appeler équation ordonnée ».

(1) La règle du changement d'inconnue sera énoncée en ces termes par l'algébriste moderne : Posons $x = f(u)$; si u_1 est une racine de l'équation transformée, le nombre $f(u_1)$ sera racine de l'équation proposée.

(2) *Pratica arithmeticæ generalis omnium copiossima et utilissima*, B. Nat., v. 19148, Milan, 1539, ch. LI. *Opera*, t. IV, p. 86.

(3) *Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam, 1629.

Le bon algébriste est celui qui transforme habilement ses équations sans s'inquiéter du sens concret des opérations qu'il effectue. Si, par exemple, au lieu de calculer directement le prix de 100 moutons, il trouve plus commode de chercher d'abord le prix de $-100.\sqrt{2}$ moutons, il prendra ce prix pour inconnue auxiliaire sans se préoccuper de savoir ce que cela peut bien être que $-100.\sqrt{2}$ moutons. C'est ainsi qu'il parvient à résoudre avec aisance des problèmes qui paraissaient inextricables aux anciens logisticiens.

6. — Résolution des équations polynomales

333. Équations polynomales. — Considérons une équation, relative à une ou à plusieurs inconnues $x, y, z \ldots$, et mise sous la forme (**320**)

$$F(x, y, z, \ldots) = 0, \tag{1}$$

où F est une expression qui contient $x, y, z, \ldots$ et aussi des nombres arithmétiques ou des lettres $a, b, c, \ldots$ représentant des nombres connus. Nous classerons les différentes équations (1) d'après la *forme qu'a l'expression* F *par rapport aux lettres* $x, y, z \ldots$ L'expression F peut être, par exemple, un polynome en $x, y, z, \ldots$ (**291**) de degré plus ou moins élevé; elle peut aussi être définie par des opérations plus compliquées, ainsi qu'il arrive pour l'équation $x + (y + z^2)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$: d'où pluralité de types d'équations qu'il faudra étudier les uns après les autres. Quelle que soit, cependant, la forme première sous laquelle se présente une équation, nous chercherons toujours à la transformer en une « *équation polynomale* », c'est-à-dire en une équation F = 0, où F est un polynome en $x, y, z, \ldots$ Comment cette transformation se trouve être possible, c'est là un fait que nous devons renoncer à expliquer ici. Notons seulement qu'avec plus ou moins d'adresse, les algébristes surent de bonne heure ramener toutes les équations auxquelles ils avaient affaire [1] à des équations polynomales ; de là vient

[1] On peut démontrer rigoureusement que cette transformation est toujours possible si F est une expression algébrique au sens du n° 279

que la résolution de ces dernières équations (auxquelles fut réservé le nom *d'équations algébriques*) fut longtemps considérée comme le problème fondamental de l'algèbre (*vide supra* § *1*).

334. — On dit que l'équation polynomale [1] $F = 0$ est *ordonnée* lorsque le polynome F est lui-même ordonné (par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de x, ou de x et y, ou de x, y et z, etc.). Le *degré* de l'équation (en x ou en x et y, ...) est le degré de F. D'ailleurs on reconnait facilement que l'étude des équations est d'autant plus compliquée que leur degré est plus élevé Nous commencerons donc par considérer les équations ou systèmes d'équations polynomales de plus bas degré.

335. Équation du premier degré à une inconnue. — J'appelle ainsi l'équation $F(x) = 0$ où F est un polynome du premier degré en x. Réunissant dans le polynome F les termes qui contiennent x et ceux qui ne le contiennent pas, je mets l'équation sous la forme [2]

$$ax + b = 0 \tag{2}$$

égalité où a (*coefficient de* x) et b (*terme indépendant*), peuvent être des expressions algébriques quelconques dépendant de nombres supposés connus (voir n° **304**); les nombres a et b, considérés ensemble, sont dits *coefficients de l'équation*.

L'équation (2) admet-elle des solutions? On voit immédiatement *qu'elle en admet toujours une et une seule, et que cette solution est* $x = -\frac{b}{a}$.

(cf. *infra* p. 386, note 1); les équations transcendantes, dont nous parlerons au § 10, ne peuvent pas, par contre, être *transformées* en équations polynomales .

[1] Si l'expression de F ne contient pas d'autres lettres que celles qui représentent les inconnues, l'équation $F = 0$ est dite *numérique*.

[2] Cette forme est la *forme générale* de l'équation (2), laquelle sera souvent appelée *équation générale* de premier degré ; il suffit de donner à a et à b des valeurs particulières pour que l'équation générale devienne telle équation numérique du premier degré que l'on voudra. Ainsi les équations

$$\frac{3+d}{c^2}x - \sqrt{2g} = 0, \qquad \frac{1}{2}x - (c+d)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

sont des équations du premier degré écrites sous la forme (2).

En effet l'équation $ax + b = 0$ est *identique* (**304**) à l'équation $a\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$, qui est elle même *équivalente* à l'équation $x + \frac{b}{a} = 0$ (n° **326**), ou $x = -\frac{b}{a}$.

336. — Ainsi nous obtenons d'un trait de plume la racine d'une équation mise sous la forme (2). Comment se fait-il donc, se demandera-t-on, qu'il ait fallu tant de siècles [1] pour dégager ce résultat, et que l'exposé en tienne tant de pages dans les anciens ouvrages d'algèbre? La réponse est facile à donner si l'on se rappelle ce que nous avons dit au § *1* du présent chapitre.

La difficulté n'était point, pour les premiers algébristes, de tirer $x = -\frac{b}{a}$ de $ax + b = 0$: elle portait sur la préparation que l'on doit faire subir à une équation pour la mettre sous la forme (2). Cette préparation, sans doute, s'effectue fort aisément grâce aux règles de *transformation* que nous avons indiquées au § *4* : mais nous avons supposé, en énonçant ces règles, que nous avions le droit de traiter de la même manière, dans tous nos calculs, les nombres rationnels et les nombres irrationnels, les nombres positifs et les nombres négatifs. Or, c'est là une liberté que les disciples des géomètres anciens ne se permettaient pas de prendre. C'est pourquoi les règles de transformation étaient pour ces savants beaucoup plus nombreuses et plus compliquées que pour nous [2] : on pourra s'en rendre compte en lisant ci-dessous les nos **339** et **343**.

[1] La conception nette et définitive de l'équation générale du premier degré à racine positive ou négative, ne se dégagea qu'au XVIIe siècle; elle apparut dans la *Géométrie* de DESCARTES (1637).

[2] Nous avons vu d'ailleurs que la représentation par des lettres de quantités connues mais indéterminées — telles que les coefficients a, b de l'équation $ax + b = 0$. — [quantités dont la valeur numérique n'est pas spécifiée], était l'une des innovations introduites par VIÈTE. Avant la fin du XVIe siècle, il pouvait être question de résoudre des équations du premier degré, mais non de formuler des règles applicables à l'*équation générale*. Comme, d'ailleurs, on ne réunissait pas d'ordinaire les termes en x en un seul ainsi que nous l'avons fait ci-dessus, les équations résolues se présentaient sous des formes diverses telles que $3x + 7x - 2x = 1$, ou $x + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x + 2 = 2x$, etc.

Une *Anthologie* composée au IIIe ou IVe siècle après J.-C, nous a conservé de curieux énoncés d'équations du premier degré résolues par l'école de Diophante ([1]).

Un énoncé présenté sous forme d'épitaphe nous dit, par exemple, « que Diophante passa la sixième partie de son âge dans la jeunesse, un douzième dans l'adolescence, qu'après une septième partie de son âge passée dans un mariage stérile, et cinq ans de plus, il eut un fils qui mourut après avoir atteint la moité de l'âge de son père, et que celui-ci ne lui survécut que de quatre ans. Ainsi il s'agit de trouver un nombre tel que son 6ème, son 12ème, son 7ème avec 5, sa moitié et 4, fassent ensemble le nombre tout entier ([2]). » Appelant x le nombre inconnu, nous avons l'équation

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

La solution est $x = 84$.

Autre exemple : « Dis-moi, illustre Pythagore, combien de disciples fréquentent ton école et écoutent tes instructions. Le voici, répond le philosophe : une moitié étudie les mathématiques ; un quart la musique, un 7e garde le silence, et il y a trois femmes

([1]) Parmi les mathématiciens grecs que nous connaissons, DIOPHANTE est le seul qui ait posé le problème de la résolution des équations en termes arithmétiques et non géométriques [cf. *supra*, 272] ; Diophante ne considère que des équations numériques (334) ; mais ses résultats n'en ont pas moins une portée générale (cf. p. 277, note 1). Ajoutons que Diophante avait surtout en vue la recherche des solutions entières ou rationnelles (*vide* no 26).

([2]) Traduction Montucla (*Hist des math.*, 1758, I, p. 318), Voici la traduction latine du même énoncé donnée par Bachet de Méziriac (*Diophanti Alex. quæst.*, 1670, I. v, p. 270).

Hic Diophantus habet tumulum, qui tempora vitæ
Illius mira denotat arte tibi.
Egit sextantem juvenis, lanugine malas
Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante uxori post hæc sociatur, et anno
Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquam attigit ille paternæ,
Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
Cogitur ; hinc annos illius assequere.

par dessus. Ainsi, il s'agit de trouver un nombre dont la moitié, le quart, le 7e et 3 fassent le nombre lui même ». On a :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x;$$

d'où l'on tire $x = 28$. — « L'Anesse et le Mulet faisaient voyage ensemble : l'Anesse se plaignait. De quoi te plains-tu, dit le Mulet? Si tu me donnais une de tes mesures, j'en aurais le double de toi ; et si je t'en donnais une, tu en aurais autant que moi. Combien en avaient-ils chacun? [1] ». — Tels était les problèmes qui se transmirent pendant des siècles dans les écoles d'arithmétique de l'Orient et de l'Occident. On remarquera que tous ces problèmes ont pour solutions des nombres positifs rationnels.

337. — Moins scrupuleux que les Grecs, les Hindous [2] n'hésitaient pas à introduire des nombres relatifs dans leurs calculs ; ils avaient imaginé, d'autre part, un grand nombre de règles ou procédés pratiques qui facilitent et accélèrent dans certains cas la recherche des racines des équations. Voici, par exemple, une de leurs règles usuelles, règle qui était déjà familière aux calculateurs de l'ancienne Égypte [le *Papyrus Rhind* en fait foi] : c'est la règle de la fausse position (*regula falsi*) :

Soit à résoudre une équation de la forme

$$ax + bx + cx + dx = e,$$

où, a, b, c, d, e sont des quantités connues (la règle est la même quel que soit le nombre de ces quantités). Prenant au hasard un nombre que nous désignerons par x_1, on le porte à la place de x dans le premier membre de l'équation. Si x_1 était racine de l'équation, la somme $ax_1 + bx_1 + cx_1 + dx_1$ aurait pour valeur e ; mais, au cas où x_1 n'est pas racine, cette somme se trouve avoir une valeur e_1 (que l'on calcule), différente de e. Cela posé, la règle est la suivante : *la valeur inconnue de x est égale à l'expression* $e\frac{x_1}{e_1}$: en effet, l'inconnue x, définie par l'équation proposée,

[1] Traduction Montucla, *loc. cit.*, p. 322-323.
[2] Voir aussi *supra*, n° 127.

a évidemment pour valeur $\frac{e}{a+b+c+d}$; or, d'autre part, nous avons, par hypothèse $(a+b+c+d)x_1 = e_1$.

La valeur $e\frac{x_1}{e_1}$ est facilement calculable lorsqu'on a déterminé la valeur e_1; en choisissant convenablement le nombre arbitraire x_1 on peut souvent rendre les calculs très simples. La *regula falsi*, cependant, n'est plus enseignée aujourd'hui, car, pour nous qui connaissons la théorie générale de l'équation du premier degré, elle n'a plus aucune vertu spéciale.

338. Equation du second degré à une inconnue. — J'appelle ainsi l'équation $F(x) = 0$ où F est un polynome du second degré en x. En ordonnant ce polynome, je puis mettre l'équation sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3}$$

égalité où les coefficients a, b, c (appelés *coefficients* de l'équation) peuvent être des expressions algébriques quelconques dépendant de nombres supposés connus.

L'étude de l'équation (3) sera facile si l'on utilise les identités (XVI) et (XVII) données au n° **305**.

1° Supposons que le *nombre* $b^2 - 4ac$ soit *positif*. Alors l'identité (XVII) nous montre que, pour que le *trinome* $ax^2 + bx + c$ soit nul, il faut et il suffit que l'on ait : soit $x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$, soit : $x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$.

Nous en concluons que l'équation (3) *a* deux racines [1] :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{2a}. \tag{4}$$

Remarques. — Pour abréger on convient souvent d'écrire que les racines de l'équation (4) ont pour valeurs $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, le

[1] Pour calculer, dans la pratique, les racines d'une équation du second degré, il suffira de mettre l'équation sous la forme (3). On aura alors les valeurs de a, b, c et, en ***portant ces valeurs dans les expressions des racines données par les formules*** (4), on aura les valeurs des racines x'

symbole $\pm$ (qui se lit *plus ou moins*) indiquant que l'on peut prendre devant le radical, soit le signe $+$, soit le signe $-$.

Il résulte immédiatement des expressions des racines que la somme $x' + x''$ est égale à $\frac{-b}{a}$. D'ailleurs, d'après l'identité (XVII) et la définition des nombres x' et x'', nous avons l'identité :

$$(5) \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

En développant le second membre, nous obtenons :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'',$$

et nous concluons alors du n° **312** que $-a(x' + x'')$ est égal à b et que $ax'x''$ est égal à c. — Ainsi la *somme des racines de l'équation* (3) *est égale à* $-\frac{b}{a}$; *leur produit est égal à* $\frac{c}{a}$.

2° Supposons maintenant que le nombre $b^2 - 4ac$ soit *négatif*. Alors, dans le second membre de l'identité (XVI) [n° **305**], l'expression entre crochets est la somme d'un carré (toujours positif, n° **135**) et d'un nombre positif : cette expression ne peut être nulle pour aucune valeur de x, et l'*équation n'a pas de racines.*

3° Soit enfin $b^2 - 4ac$ *égal à zéro*. Alors l'identité (XVI) se réduit à

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Pour que le trinome soit nul, il faut et il suffit que x soit égal à $-\frac{b}{2a}$; donc l'équation a une racine unique. On dit souvent, en ce cas (pour des raisons que nous expliquerons plus loin) que

et x''. Il est parfois commode d'utiliser d'autres formules que les formules (4). Posons, par exemple, $b = 2b'$: alors notre équation s'écrit

$$ax^2 + 2b'x + c = 0,$$

et les formules (4) donnent pour expressions des racines : $\frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$.

Divisons maintenant le trinome par a et posons $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$: notre équation est évidemment équivalente à l'équation $x^2 + px + q = 0$, qui a pour racines : $\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

l'équation (3) a une racine double ou *deux racines égales* (ayant pour valeur $-\frac{b}{2a}$) : on peut alors continuer à déclarer que la somme des racines $\left(\text{double de } -\frac{b}{2a}\right)$ est égale à $-\frac{b}{a}$, et que leur produit $\left(\text{carré } \frac{b^2}{4a^2}\right)$ est égal à $\frac{c}{a}$ $\left[\text{dans l'hypothèse actuelle, } \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} \text{ puisque } 4ac - b^2 = 0\right]$.

339. — La résolution des équations du second degré donne lieu aux mêmes remarques que celle des équations du premier degré. Les formules (4) sont faciles à obtenir; elles étaient familières aux Hindous ([1]) et les Grecs en avaient l'équivalent; mais l'interpré-

([1]) BHASKARA dit (*Vija-Ganita*, ch. v, trad. Colebrooke, p. 218) que la règle fournissant les *deux* racines a été formulée par l'algébriste PADMANABHA. La nature des problèmes qu'ils traitaient — problèmes concrets pour la plupart — empêchaient cependant les algébristes hindous de regarder comme également acceptables deux solutions ou racines de signes différents, et ils ne retenaient donc que les racines positives. Voici un exemple d'équation du second degré résolue par BHASKARA (*Lilavati*, chap. III, trad. Colebrooke, p. 68 ; cf. *Vija-Ganita*, chap. v, *ibid.*, p. 212) : « La racine carrée de la moitié d'un essaim d'abeilles s'est rendue sur une touffe de jasmin, et les huit-neuvièmes de l'essaim s'y trouvent aussi ; une femelle seulement est restée et bourdonne autour d'*un* mâle qui hume une fleur de lotus dont le parfum l'a attiré. Dis, charmante femme [*Lilavati*, *vide*, p. 277, note 2], quel est le nombre des abeilles ». — Appelant x ce nombre, nous avons l'équation $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2 = x$, ou, (en retranchant $\frac{8x}{9} + 2$ des deux membres), l'équation équivalente $\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{x}{9} - 2$. Si les deux membres de cette dernière égalité sont égaux, il en est de même de leurs carrés, donc

$$\frac{x}{2} = \left(\frac{x}{9} - 2\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{2} = \frac{x^2}{81} - \frac{4x}{9} + 4$$

$\left[\text{en vertu de l'identité (I) du n}^\text{o}\ 296, \text{ appliquée à } \left(\frac{x}{9} - 2\right)^2\right]$. Nous en déduisons l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{81} - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\right)x + 4 = 0,$$

dont l'inconnue x sera racine. En appliquant les formules (4) on trouve que cette équation a une racine entière (et une seulement) égale à 72.

tation de ces formules pour toutes valeurs positives ou négatives des coefficients a, b, c, ne pouvait pas être faite — ou du moins regardée comme ayant une valeur et une signification rationnelles — avant Descartes et Fermat. C'est pourquoi les traités classiques du XVI[e] siècle, se conformant en cela aux traditions de l'algèbre géométrique (*vide infra*, n° **521** et suiv.) distinguaient, et étudiaient l'un après l'autre, plusieurs types d'équations du second degré :

1° *Equations qui se ramènent à la forme* $A'x^2 + B'x = C'$ (A', B', C' étant des nombres positifs), ou, si l'on veut, *à la forme* $x^2 + Bx = C$ [car en divisant les deux membres de l'équation par un même nombre A', on obtient une équation équivalente, et l'on peut poser $\frac{B'}{A'} = B$, $\frac{C'}{A'} = C$]. D'après la formule (4), où l'on fait $a = 1$, $b = B$, $c = -C$, l'équation de la forme $x^2 + Bx = C$ a toujours une (¹) racine positive égale à $\frac{\sqrt{B^2 + 4C} - B}{2}$.

2° *Equations qui se ramènent à la forme* $Bx + C = x^2$ (B, C positifs). L'équation de cette forme a toujours une racine positive : $\frac{B + \sqrt{B^2 + 4C}}{2}$. On peut remarquer que cette racine est toujours supérieure à B.

3° *Equations qui se ramènent à la forme* $x^2 + C = Bx$. Trois possibilités se présentent alors. Si $B^2 > 4C$ l'équation a deux racines positives égales à $\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$. Si $B^2 = 4C$, l'équation a une racine unique $\frac{B}{2}$. Si $4C > B^2$, l'équation n'a pas de racines (²).

340. Les trois types d'équations ainsi distingués par les Grecs sont aujourd'hui fondus en un seul type, et les formules (4) suffisent à l'algébriste moderne pour calculer les racines d'une équation quelconque du second degré. Mais ces formules appellent une remarque que nous avons déjà faite au n° **279**. Lorsque nous écrivons les formules (4), nous nous interdisons de faire aucune hypothèse sur la nature des nombres a, b, c. Il se peut donc que nous écrivions des choses dépourvues de sens, puisque si le nombre

(¹) L'algébriste moderne ajoute qu'elle a aussi une racine négative.

(²) Voici comment LUCA PACIUOLO énonce les règles relatives à la réso-

$b^2 - 4ac$ est négatif, le symbole $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ne représente rien du tout. Cette éventualité ne nous empêchera pas d'écrire les formules (4) et de les considérer comme représentant *en tout cas* les racines de l'équation du second degré. Lorsque le symbole $\sqrt{b^2 - 4ac}$ sera dépourvu de sens, nous dirons que les racines sont « imaginaires », ce qui équivaut à dire qu'elles n'existent pas. Grâce à ces conventions nous pourrons rassembler dans un seul et même énoncé tous les cas qui peuvent se présenter :

Quels que soient les coefficients a, b, c, l'équation (3) *a pour racines les nombres x' et x'' donnés par les formules* (4). *Ces nombres sont réels et différents, réels et égaux, ou imaginaires suivant que la quantité $b^2 - 4ac$ (appelée* **discriminant** *de l'équation) est positive, nulle ou négative.*

341. — Nous pouvons ajouter que les racines ont même signe ou des signes contraires suivant que leur produit $\frac{c}{a}$ (voir n° **338**) est positif ou négatif. Si elles ont même signe, ce signe est celui de leur somme $-\frac{b}{a}$.

lution de ces trois types d'équations *Summa de Arithm.*, 1494, fol. 145).

Primi canonis versus.
Si res et census numero coæquantur, à rebus
Dimidio sumpto censum producere debes,
Addereque numero, cujus à radice totiens
Tolle semis rerum : census latusque redibit.
Secundi canonis versus.
Et si cum rebus dragmæ quadrato pares sint,
Adde sicut primo numerum producto quadrato,
Ex rebus mediis, ejusque radice recepta,
Si rebus mediis addes, census patefiet
Tertii canonis versus.
At si cum numero census radices æquabit,
Dragmas à quadrato deme rerum medietarum,
Cujusque supererit radicem adde trahere
A rebus mediis ; sic census costa notescet.

Traduction : Si l'inconnue [un multiple de l'inconnue, Bx] et on carré égalent le nombre connu (C), forme le carré de la moitié du nombre des premières puissances de l'inconnue (c'est-à-dire le carré de B), ajoute ce carré au nombre connu (C), et de la racine carrée de l'expression obtenue retranche la moitié des premières puissances de l'inconnue (de B) : le résultat donnera le carré inconnu (x^2) et son côté (x), etc. — Le mot *dragma* est synonyme de *numerus* et signifie : nombre connu (C).

342. Équation du troisième degré — J'appelle ainsi l'équation $F(x) = 0$, où F est un polynome du troisième degré en x. Les Grecs et les Arabes [1] ont étudié plusieurs équations du troisième degré qu'ils ont rattachées à des problèmes géométriques. Mais c'est au XVIe siècle seulement que fut constituée la théorie générale de ces équations [2].

Le savant italien Scipion Ferro, qui professa à Bologne de 1496 à 1526, trouva le moyen de résoudre algébriquement l'équation

$$(6) \qquad x^3 + Ax = B \qquad (\text{A et B positifs})$$

et il en avisa quelques amis. Quelque vingt ans plus tard, Nicolas Tartaglia de Brescia entendit parler du résultat obtenu par Scipion Ferro et se proposa de le retrouver. Il résolut [3], à son tour, l'équation (6), puis le lendemain, nous dit-il, l'équation

$$(7) \qquad x^3 = Ax + B;$$

quant à l'équation

$$(8) \qquad x^3 + B = Ax,$$

elle lui parut pouvoir être ramenée à l'équation (7) par une transformation facile.

343. L'équation (6). — La solution que Tartaglia a donnée de l'équation (6) est voisine de celles que formulent aujourd'hui encore nos traités d'algèbre. Prenons provisoirement deux *inconnues auxiliaires* y et z telles que $y - z = B$ et $yz = \left(\frac{A}{3}\right)^3$. Ces deux inconnues seront déterminées par une équation du second degré

(1) En particulier Omar Al Khayyam (*vide supra*, p. 278, note 3).

(2) Nous verrons plus loin (n° 347) comment toute équation du troisième degré peut être transformée en une équation (6), (7) ou (8). C'est là une propriété qu'on avait sans doute remarquée de bonne heure et que Cardan a précisée.

(3) Les recherches de Tartaglia sur l'équation du troisième degré et ses répliques à Cardan [*vide infra* n° 346] se trouvent dans un ouvrage intitulé : *Delli quesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartaglia Bresciano*, Venise, 1537, réimprimé dans les *Opera del famosissimo Nicolo Tartaglia*, Venise, 1606, Bibl. N., V. 6734. [Voir le Liv. IX, sur l'Algèbre « et massime sopra le Regole de cose e cubi eguali a numero, dal presente Autore ritrovate].

que l'on sait résoudre : en effet, si l'on remplace z par $y - B$ dans l'égalité $yz = \left(\frac{A}{3}\right)^3$, on a l'équation du second degré en y,

$$y^2 = By + \left(\frac{A}{3}\right)^3,$$

qui donne pour l'inconnue y une valeur (racine) positive supérieure à B (voir n° **339**, 2°); il en résulte pour z une valeur positive $(y - B)$. Cela posé, *je dis que le nombre* $x' = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}$ *est racine de l'équation* (6). Calculons en effet le cube de $(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})$ $\left[\text{ou } \left(y^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}}\right)\right]$ en appliquant la formule (III) du n° **296** ; nous avons :

$$x'^3 = y - 3y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{3}} + 3y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}} - z = (y - z) - 3y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}}\right)$$

et par conséquent $\left[\text{puisque } y - z = B,\ y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} = \frac{A}{3}\right]$:

$$x'^3 = B - Ax' \qquad \text{ou} \qquad x'^3 + Ax' = B,$$

ce qui démontre la proposition énoncée [1].

344. L'équation (7). — L'équation (7) peut être résolue, elle aussi, par un procédé analogue. On détermine les valeurs de y et z par les conditions

$$y + z = B, \qquad yz = \left(\frac{A}{3}\right)^3,$$

[1] Tartaglia résume dans les vers suivants la règle qui donne la solution de l'équation (6) (*Opere del Famosissimo Nicolo Tartaglia*, p. 266) :

Quando che'l cubo, con le cose appresso,
Se agguaglia à qualche numero discreto :
Trovan dui altri, differenti in esso
Dapoi terrai, questo per consueto,
Che'l lor produtto, sempre sia eguale
Al terzo cubo, delle cose neto,
El residuo poi suo generale,
Delli lor lati cubi, bene sostratti,
Varrà la tua Cose principale ;

ce qui signifie (traduction libre) : Si le cube [x^3], plus un muliple [Ax] de la chose [inconnue] est égal à un nombre B, déterminons, par les méthodes habituelles, deux nouveaux nombres différant l'un de l'autre de B unités et dont le produit soit le cube du tiers du coefficient de la chose : alors la différence des racines cubiques de ces deux nombres auxiliaires est la chose principale cherchée [l'inconnue x].

et l'on constate que le nombre $x' = \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}$ est racine de l'équation (7).

Mais ici se présente une difficulté que Tartaglia n'a pas approfondie. L'inconnue auxiliaire doit être racine de l'équation du second degré

$$y^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3 = By;$$

or, cette équation ne peut être résolue que si $B^2 > 4\left(\frac{A}{3}\right)^3$ [voir les remarques faites à la fin du n° **339** sur l'équation $x^2 + C = Bx$]. Lorsque B^2 est inférieur à $4\left(\frac{A}{3}\right)^3$, la valeur de y n'existe plus (est « *imaginaire* »). Faut-il en conclure qu'en ce cas l'équation du troisième degré (7) n'a pas de racine? Ce serait se tromper gravement : non seulement l'équation a *une racine positive* comme au cas où l'on supposait $B^2 < 4\left(\frac{A}{3}\right)^3$, mais elle possède en outre *deux racines négatives* qu'elle n'avait pas alors. C'est ce que nous allons vérifier en suivant la voie indiquée par François Viète ([1]). On déduit des formules de la trigonométrie que, si l'on désigne par u un nombre positif quelconque, on a ([2])

$$\cos 3u = 4 \cos^3 u - 3 \cos u. \tag{9}$$

Mettons alors l'équation (7) sous la forme

$$x^3 - 3r^2x = hr^2, \tag{10}$$

en posant $r = \sqrt{\frac{A}{3}}$ $h = \frac{3B}{A}$, d'où $A = 3r^2$, $B = hr^2$.

([1]) *Francisci Vietæ Fontenæensis De æquationum recognitione et emendatione* (1591), publ. en 1615, « At elegantius, dit VIÈTE (p. 12, cf. *Opera*, éd. Schooten, p. 91), et præstantius ex analyticis Angularium sectionum hujus modi æqualitatum constitutio eruitur ». Et il indique comment l'équation $300x - x^3 = 432$, par exemple, a pour racines les nombres $9 + \sqrt{57}$ et $9 - \sqrt{57}$ (la troisième racine est -18) [*quum dicetur* 300 *N* (300 fois le Nombre inconnu) — 1 *C* (Cube de l'inconnue) *æquari* 432, *fiet unus numerus* $9 + \sqrt{57}$ *vel* $9 - \sqrt{57}$].

([2]) On obtient cette égalité en appliquant à $\cos 2u$, $\sin 2u$, $\cos 3u$, les formules du n° 163 donnant $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$, et remplaçant $\sin^2 u$ par $1 - \cos^2 u$ (n° 153). — Cf. *infra*, n° 382.

Dans l'hypothèse où $B^2 < 4\left(\frac{A}{3}\right)^3$, on a $(hr^2)^2 < 4r^6$; d'où l'on conclut (en extrayant les racines carrées et divisant par r^2 les deux membres de l'inégalité) : $h < 2r$; donc le nombre $\frac{h}{2r}$ est, dans le cas considéré, inférieur à 1, et l'on peut toujours trouver une abscisse curvilique v dont le cosinus soit égal à $\frac{h}{2r}$; nous déterminerons cette abscisse curviligne au moyen d'une table trigonométrique et nous remplacerons h par l'expression $2r\cos v$ dans l'équation (10). Cela fait, je constate que l'équation (10) [équivalente à (7)] sera satisfaite si je donne à x la valeur $x = 2r\cos\frac{v}{3}$; j'aurai en effet :

$$x^3 - 3r^2x = 8r^3\cos^3\frac{v}{3} - 6r^3\cos\frac{v}{3} = 2r^3\left(4\cos^3\frac{v}{3} - 3\cos\frac{v}{3}\right);$$

or hr^2, égal à $2r^3\cos v$ par hypothèse, se trouve égal à $2r^2\left(4\cos^3\frac{v}{3} - 3\cos\frac{v}{3}\right)$ d'après l'égalité (9) : j'en conclus que $x^3 - 3r^2x$ est bien égal à hr^2 comme le demande l'égalité (10).

Tel est, traduit en notations modernes, le calcul effectué par Viète. Ce calcul nous montre, si nous nous référons à la trigonomètrie moderne, que l'équation (10) possède *trois racines*. En effet [1], si un arc v a pour cosinus le nombre $\frac{h}{2r}$, les arcs $v + 2k\pi$ et $-v + 2k\pi$ (où k est un nombre entier positif ou négatif quelconque) ont aussi le même cosinus et peuvent remplacer l'arc v dans notre raisonnement. Nous en concluons que toutes les valeurs

$$2r\cos\frac{v + 2k\pi}{3} \quad \text{et} \quad 2r\cos\frac{-v + 2k\pi}{3}. \quad \text{ou [2]} \quad 2r\cos\frac{v - 2k\pi}{3}$$

sont racines de l'équation (10). Ces valeurs se réduisent à trois :

$$2r\cos\frac{v}{3}, \quad 2r\cos\frac{v + 2\pi}{3}, \quad 2r\cos\frac{v + 4\pi}{3};$$

[1] Cette discussion ne put, bien entendu, être faite que longtemps après VIÈTE, qui ne disposait pas de la notion générale d'abscisse curviligne affectée de signe ; elle fut donnée par CLAIRAUT, *Elemens d'algebre*, Paris, 1746, Part. V, chap. VII, p. 268-9.

[2] On sait, en effet, que, quel que soit l'arc u, on a $\cos(-u) = \cos u$.

en effet tout arc $\frac{v + 2k\pi}{3}$ (où k est un nombre entier quelconque) est égal à l'un des arcs $\frac{v}{3}$, $\frac{v + 2\pi}{3}$, $\frac{v + 4\pi}{3}$ *plus* ou *moins* un multiple de 2π, et a par conséquent même cosinus que l'un de ces trois arcs ([1]) (cf. n° **159**).

345. L'équation (8). — En cherchant à ramener l'équation (8) à une équation de la forme (7), Tartaglia devait se heurter à des difficultés plus graves encore que celles dont nous avons parlé tout à l'heure; aussi est-il permis de douter qu'il ait effectivement accompli la transformation qu'il indique (voir n° **342**). Pour mettre hors de doute l'existence des racines (positives ou négatives) de l'équation (8) il faut employer d'autres méthodes que celles dont disposait Tartaglia ; on pourra, par exemple, suivre la voie indiquée par Viète et recourir à un calcul trigonométrique : on constatera alors que, suivant les valeurs relatives des nombres (positifs) A et B, l'équation (8) a *une* ou *trois* racines.

346. Recherches de Cardan ; notations modernes. — C'est en 1535 que Tartaglia s'est occupé des équations du troisième degré. Cependant il se refusa à publier, ou même à communiquer, ses résultats; en 1539, seulement, cédant à l'insistance de Jérôme Cardan, il livra à ce savant les vers quelque peu énigmatiques que nous avons reproduits plus haut, tout en lui faisant jurer de ne jamais divulguer son secret.

Sur les indications qui lui furent ainsi fournies, Cardan se mit au travail. Il montra comment toute équation du troisième degré peut être transformée en une équation de l'un des types (6), (7), (8); il approfondit l'étude de ces types avec son disciple *Luigi Ferrari* (1522-1565), et, en maniant sans scrupules — fort habilement d'ailleurs — les quantités négatives et même *imaginaires* (racines carrées de nombres négatifs), il surmonta certaines difficultés dont certainement n'avait pas triomphé Tartaglia. En 1545,

([1]) On peut remplacer le troisième par la valeur égale $2r \cos \frac{v - 2\pi}{3}$.

Cardan fit connaître, dans son *Ars Magna* (*vide* chap. XI et suivants, p. 30-sqq.), ce qu'il savait de l'équation du troisième degré. Estimait-il que l'importance de ses recherches personnelles sur cette équation lui en donnait le droit ? Ou croyait-il savoir que le secret de 1539 — qui, après tout, appartenait aux amis de Scipion Ferro avant d'appartenir à Tartaglia, — avait, après six ans écoulés, cessé d'être un secret ? Quoi qu'il en soit, Tartaglia accusa Cardan d'avoir violé son serment, et il s'ensuivit une âpre polémique entre les deux savants et leurs disciples [1].

Après les recherches de Cardan, cependant, et, surtout après celles de Viète, les principales questions soulevées par l'équation du troisième degré se trouvèrent résolues, — du moins résolues autant qu'elles pouvaient l'être avant que fût constituée une théorie rigoureuse des quantités *imaginaires*.

347. — Énonçons les résultats fondamentaux qui furent le prix de ces longs efforts.

L'équation du troisième degré a pour forme générale :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{11}$$

les coefficients a, b, c, d pouvant être des expressions algébriques quelconques dépendant de nombres supposés connus.

Une transformation simple permet de passer de la forme (11) à la forme

$$x^3 + px^2 + q = 0. \tag{12}$$

En effet, l'équation (11) est équivalente à la suivante :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0.$$

[1] Entre TARTAGLIA et FERRARI, en particulier. Dans cette polémique, Tartaglia n'eut pas toujours le beau rôle. Aussi ne manqua-t-on pas de l'accuser d'avoir fait passer pour sien ce qu'il tenait des disciples de SCIPION FERRO. — Les pièces principales de la polémique, qui sont des lettres échangées par Tartaglia et Ferrari, ont été imprimées (un exemplaire du recueil de ces lettres se trouve au *British Museum*, 8533, *bbb*, 17).

Faisons le changement d'inconnue $x = t - \frac{b}{3a}$; l'équation devient

$$\left(t - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(t - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(t - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0.$$

Développant le cube et le carré d'après les formules du n° **296**, et ordonnant par rapport à t, nous constatons que le coefficient du terme en t^2 est nul, et nous obtenons l'équation :

$$t^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)t + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} - \frac{4b^3}{27a^3}\right) = 0,$$

équation qui est de la forme (12) [l'inconnue s'appelant t au lieu de x]. Si donc on sait résoudre l'équation de la forme (12), on saura, du même coup résoudre l'équation (11). Nous pouvons, par conséquent, nous borner à l'étude de l'équation (12).

L'équation (12) a toujours *une* ou *trois* racines.

On démontre qu'elle a *une* racine lorsque $4p^3 + 27q^2 > 0$, et *trois* racines lorsque $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Pour résoudre l'équation, en emploie d'ordinaire dans le second cas une méthode trigonométrique, telle que celle de Viète, et, dans le premier cas, la méthode de Tartaglia, que l'on applique généralement comme il suit (1) :

Posons $y + z = x$, $3yz = p$, ce qui revient à faire le changement d'inconnue (n° **330**) $x = y + \frac{p}{3y}$. Remplaçant x par cette valeur dans (12) on a une équation en y qui, si on y regarde y^3 comme l'inconnue, est du second degré (cf. **344**); on remarque que le cube z^3 (z étant défini comme il a été dit) satisfait à la même équation, en sorte que les deux racines $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ de cette équation donnent les valeurs cherchées y^3 et z^3; donc, on a :

$$x = y + z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Dans le cas où $4p^3 + 27q^2 = 0$, on constate que l'équation a *une* racine *double* (comptant pour deux) ; elle a en outre *une* racine simple.

(1) Cf. une lettre de HUYGENS à SCHOOTEN, *Œuv. de Huygens*, La Haye, 1888, I, p. 330.

348. Propriétés des racines. — Plaçons-nous dans l'hypothèse où l'équation du troisième degré, mise sous la forme (11), a trois racines et désignons ces racines par les lettres affectées d'indice x_1, x_2, x_3, ...

On vérifie [1] que (quelle que soit la valeur de x) l'on a l'identité :

$$(13) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

D'ailleurs, si l'on développe le produit du second membre, les coefficients des mêmes puissances de x sont nécessairement égaux dans les deux membres (cf. **338**) : on déduit de là l'énoncé suivant :

Quelle que soit l'équation proposée (11) *la somme des racines* $(x_1 + x_2 + x_3)$ *est égale à* $-\frac{b}{a}$, *la somme de leurs produits deux à deux* $(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$ *est égale à* $\frac{c}{a}$, *leur produit* $(x_1x_2x_3)$ *est égal à* $\frac{-d}{a}$ [cf. Cardan *Ars Magna*, chap. XVIII].

349. — Nous n'étudierons pas en détail l'équation du *quatrième degré*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Nous nous bornerons à indiquer (aux notations près que nous modernisons) la première méthode de résolution de cette équation générale qui ait été proposée, celle de Luigi Ferrari, élève de Cardan [2].

Divisons l'équation par a et faisons le *changement d'inconnue* $x = t - \frac{b}{4a}$ (cf. n° **347**) ; un calcul facile montre que l'équation transformée est une équation polynomale en t, du quatrième degré et ne contenant pas de terme en t^3. *Ainsi, moyennant un changement d'inconnue, la résolution de toute équation du quatrième degré*

[1] Cette vérification résulte des valeurs des racines que l'on a calculées. Nous reviendrons d'ailleurs au § 6 sur l'identité (13) [que l'on peut établir *a priori*] et sur ses conséquences.

[2] « *Qui eam* — dit Cardan — *me rogante invenit* » [*Ars magna*, ch. XXXIX, p. 72].

peut être ramenée à la résolution d'une équation du quatrième degré de la forme

$$x^4 + mx^2 + nx + p = 0. \qquad (14)$$

Pour résoudre cette équation, je l'écris

$$x^4 = -mx^2 - nx - p \qquad (15)$$

et j'ajoute à chaque membre la même quantité $2x^2z + z^2$, z étant un nombre que je vais déterminer (définir) dans un instant. L'équation (15) peut s'écrire :

$$x^4 + 2x^2z + z^2 = (2z - m)x^2 - nx + (z^2 - p). \qquad (16)$$

Le premier membre est le carré de $(x^2 + z)$. Cherchons alors à déterminer z de manière que le second membre soit le carré de l'expression $\sqrt{2z - m}\,x + \sqrt{z^2 - p}$; ce dernier carré a pour expression $(2z - m)x^2 + 2\sqrt{(2z - m)(z^2 - p)}\,x + (z^2 - p)$; le nombre z satisfera donc à la condition voulue s'il est tel que

$$2\sqrt{(2z - m)(z^2 - p)} = -n.$$

Cette dernière égalité *détermine* la valeur que nous devons donner à z; elle s'écrit, en élevant les deux membres au carré, puis développant et ordonnant :

$$8z^3 - 4mz^2 - 8pz + (4mp - n^2) = 0,$$

équation du troisième degré par rapport à l'inconnue z; la valeur requise pour z est une des racines de cette équation (on choisira celle que l'on voudra). Une fois qu'on l'a calculée d'après les méthodes exposées aux nos **342** et suivants, l'égalité (16) donne

$$(x^2 + z)^2 = \left(\sqrt{2z - m}\,x + \sqrt{z^2 - p}\right)^2$$

ce qui exige [1], soit $x^2 + z = \sqrt{2z - m}\,x + \sqrt{z^2 - p}$, soit $x^2 + z = -\sqrt{2z - m}\,x - \sqrt{z^2 - p}$.

[1] D'une manière générale, pour que les carrés A^2 et B^2 de deux quantités soient égaux, il faut que ces quantités soient égales ou égales et de signes contraires [puisque le carré de $-A$ est égal au carré A^2 de $+A$].

Ces deux égalités (puisque z est connu) sont par rapport à l'inconnue x des équations du second degré que l'on sait résoudre ([1]).

Nous laissons de côté la discussion à laquelle donnent lieu les calculs qui précèdent. Remarquons seulement que si les deux équations du second degré en x ont chacune deux racines, l'équation du quatrième degré se trouve avoir quatre racines.

350. Equation de degré quelconque. — Les algébristes des XVIe et XVIIe siècles ont pu résoudre, comme nous l'avons vu, l'équation du troisième degré ; ils ont résolu également l'équation du quatrième degré ; mais ils n'ont pas réussi à calculer les racines des équations de degré plus élevé, et c'est qu'en effet la chose n'était pas possible avec les moyens dont ils disposaient.

Nous comprendrons la raison de cette impuissance si nous réfléchissons au sens très particulier que les algébristes attachent à ces mots : « résolution d'une équation ». Résoudre une équation polynomale, c'est, par définition, trouver l'expression algébrique des racines en fonction des coefficients de l'équation (n° **318**) ; or est-il certain que l'on puisse effectuer sur les coefficients d'une équation quelconque une combinaison d'opérations algébriques qui fournisse les racines de l'équation ([2]) ? A priori il n'y a évidemment aucune raison pour qu'il en soit ainsi, et de ce qu'une chance heureuse se présente pour les équations des quatre premiers degrés nous ne saurions conclure que cette chance nous favorisera jusqu'au bout. Et de fait, la proposition suivante, pressentie par Gauss, a été démontrée en toute rigueur par le mathématicien norvégien Abel ([3]) : L'équation générale du cinquième degré

$$(17) \qquad a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

([1]) Il est un cas où la résolution de l'équation du quatrième degré se ramène immédiatement à la résolution d'une équation de second degré : c'est le cas où l'équation ne contient ni terme en x^3, ni terme en x, et est de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$; prenant pour inconnue auxiliaire $y = x^2$, l'équation s'écrit $ay^2 + by + c = 0$ et est du deuxième degré. — L'équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ est dite *bicarrée*.

([2]) C'est ce que fait observer LEIBNIZ à son ami TSCHIRNHAUS, qui faisait des efforts désespérés pour *transformer* les équations générales du cinquième et du sixième degré en équations susceptibles d'être résolues.

([3]) *Détermination de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré* (1826) [*Œuv. d'Abel*, éd. Sylow-Lie, t. I, p. 66].

étant donnée, il n'est pas possible de former (en combinant des opérations effectuées sur les coefficients $a_0, \ldots a_5$) une expression algébrique qui représente une racine de cette équation ; il n'est pas possible, en d'autres termes, de trouver une expression algébrique des racines, qui soit composée de nombres arithmétiques, des lettres $a_0, a_1, \ldots a_5$, et des signes opératoires classiques $+, -, \times$, etc.

Nous comprendrons facilement la signification de cette proposition d'Abel si nous nous reportons aux n^os **67** et **122** de notre *Premier Livre*. Supposons, pour fixer les idées, que les coefficients $a_0, \ldots a_5$ d'une équation (17) soient des nombres rationnels ; les valeurs des racines (1) seront, — comme il arrive pour toute équation, — déterminées par les valeurs des coefficients $a_0, \ldots a_5$; mais, en général, ces racines sont — comme les nombres π et e — des nombres qui ne peuvent pas être définis comme résultats d'opérations connues.

La recherche de critères permettant de reconnaître si une équation polynomale donnée, de degré supérieur à 4 est *résoluble par radicaux* (2), — c'est-à-dire a des racines calculables par radicaux (voir p. 77, note 1) — est l'un des prolèmes les plus importants de l'algèbre. Pour en venir à bout il fallut recourir à une méthode en apparence fort détournée, dont l'invention est due principalement à un jeune mathématicien parisien du XIXe siècle, Evariste Galois (3), mort à vingt ans en 1832.

351. — Etant donnée une équation polynomale de degré quelconque, la méthode de Galois nous apprend, pourrait-on dire (4), quels sont les nombres qu'il faudrait *adjoindre* aux nombres « *ordinaires* » (nombres rationnels et nombres calculables par radicaux)

(1) Nous admettons que l'équation dont il s'agit a des racines. D'après le n° 358, elle en a toujours au moins une.

(2) Précisant la question, on devra distinguer entre le cas où toutes les racines et le cas où une partie seulement des racines de l'équation sont calculables par radicaux.

(3) Le mémoire fondamental de GALOIS sur la théorie des équations ne fut publié qu'en 1846 : « Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux » (*Journal de Liouville*). La méthode de GALOIS fait intervenir la théorie des *groupes* dont nous parlerons ultérieurement.

(4) Nous ne pouvons pas préciser ici cette indication très vague. On trouvera l'exposé de la théorie de GALOIS dans les traités d'algèbre supérieure.

pour que les racines de l'équation puissent être exprimées par des formules algébriques au moyen des nombres *ordinaires* et nombres *adjoints*. Mais ce sont là des questions de haute arithmétique qui dépassent de beaucoup le cadre du présent chapitre. Notons seulement que l'étude de ces questions a conduit à préciser la définition du *nombre algébrique* : nous appellerons désormais ainsi tout nombre relatif qui satisfait à une équation polynomale (d'ailleurs quelconque) à coefficients rationnels, — c'est-à-dire tout nombre α tel que l'on puisse former une équation polynomale

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{18}$$

dont les coefficients $a_n \dots a_0$ soient de nombres rationnels et qui admette α pour racine. Si α n'est pas calculable par radicaux, ce nombre ne pourra être racine que d'une équation polynomale de degré supérieur à 4 ; on cherchera alors une équation (18) de degré 5 [$n = 5$] ; s'il n'en existe pas qui réponde à la question, on cherchera une équation de degré 6, ou 7, ou de degré plus élevé.

Si, quelque grand que l'on prenne le nombre n, il n'existe aucune équation polynomale de degré n à coefficients rationnels, admettant α pour racine, le nombre α n'est pas *algébrique* ; on dit alors que ce nombre est *transcendant* (1).

7. — Propriétés fondamentales de l'équation de degré n. Interpolation.

352. — Considérons l'équation à une inconnue, de degré *quelconque* n, mise sous la forme générale

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{1}$$

(1) On remarquera que les définitions et recherches auxquelles nous faisons ici allusion ont un caractère purement théorique. L'algébriste qui a en vue la résolution de problèmes pratiques n'a nullement besoin de connaître l'expression algébrique *exacte* des racines d'une équation. Il lui suffit de déterminer des *expressions algébriques, fonctions des coefficients* $a_n, \dots, a_0$, *qui représentent les racines de l'équation avec une approximation arbitrairement grande.* Nous ne nous occuperons pas ici des procédés que l'on peut employer pour former de telles expressions.

Nous avons dit que, si n est supérieur à 4, il n'est en général pas possible de calculer algébriquement, *en fonction des coefficients* $a_n, \dots a_0$, les racines de l'équation (1). Cependant on peut énoncer au sujet de ces racines, plusieurs propositions qui sont souvent plus utiles à connaître que la valeur même des racines.

Et, tout d'abord, combien l'équation (1) a-t-elle ou peut-elle avoir de racines? L'algébriste de Leyde, Albert Girard, fut le premier à déclarer, dans son *Invention nouvelle en l'Algèbre* (Amsterdam, 1629), que l'équation de degré n possède n racines [1], certaines de ces racines pouvant d'ailleurs être « imaginaires ». Girard allait un peu vite, et la signification des « quantités imaginaires » (voir n° **340** et Chap. v, § *3*) n'avait pas encore été, de son temps, suffisamment tirée au clair pour que son théorème pût être rigoureusement établi. Cependant on le pouvait déjà pressentir.

353. — Posons, pour abréger l'écriture,

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \tag{2}$$

et supposons que le nombre x_1 soit une racine de l'équation (1) : je dis que *l'on a l'identité*

$$P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x), \tag{3}$$

$Q(x)$ *étant un polynome en x de degré $n - 1$.*

Faisons, en effet [2], le changement d'inconnue $x = x_1 + u$ (voir n° **330** et comparer n^os^ **347** et **349**) : le polynome $P(x)$ devient un polynome en u (de degré n) : $b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \dots + b_1 u + b_0$, [les coefficients $b_n, \dots b_0$ sont des *polynomes en* $a_n, \dots a_0$ et x_1]; et ce polynome en u doit être nul lorsqu'on y fait $u = 0$, ce qui prouve que b_0 est nul [le lecteur vérifiera sans peine que l'expression de b_0 est $a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_0$, quantité qui est nulle puisque x_1 est racine de l'équation (1)]. Ainsi nous avons :

$$P(x) = b_n u^n + \dots + b_1 u = u[b_n u^{n-1} + \dots + b_1].$$

[1] « *Toutes les équations d'algèbre,* dit Girard, *reçoivent autant de solutions que la dénomination* [degré] *de la plus haute quantité* [puissance] *le démontre* ».

[2] La méthode exposée plus bas aux n°s 372-73 conduit aux mêmes résultats.

Remplaçant u par sa valeur $x - x_1$, nous transformons le crochet en un polynome en x de degré $n - 1$, — polynome que nous désignerons par $Q(x)$: nous obtenons ainsi l'identité (3).

Nous énoncerons ce résultat en disant que, si x_1 est une racine de l'équation $P(x) = 0$, le polynome $P(x)$ est *divisible* [1] par $(x - x_1)$, le *quotient* étant un polynome $Q(x)$ de degré $n - 1$.

Cela dit, appelons x_2 une seconde racine de l'équation (1). Les deux membres de l'identité (3) seront nuls lorsqu'on y remplacera l'inconnue x par le nombre x_2. Mais $(x_2 - x_1)$ n'est pas nul. Donc le polynome $Q(x)$ est nul pour $x = x_2$ [pour qu'un produit tel que $(x - x_1) \,.\, Q(x)$ soit nul, il faut et il suffit que l'un des deux facteurs soit nul] ; j'en conclus que x_2 est une racine de l'équation de degré $n - 1$, $Q(x) = 0$, et que, par conséquent

$$Q(x) = (x - x_2) \,.\, R(x),$$

$R(x)$ étant un polynome de degré $n - 2$. On a donc l'identité :

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \,.\, R(x).$$

En répétant le même raisonnement, nous constatons finalement que, si *l'équation* (1) a *p racines $x_1, \dots x_p$, on a l'identité*

$$P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_p) \,.\, S(x), \tag{4}$$

$S(x)$ *étant un polynome de degré $n - p$* ; on dit que $P(x)$ est *divisible* par le produit $(x - x_1) \dots (x - x_p)$, le quotient étant $S(x)$.

354. — Il résulte de ces faits que l'*équation* (1) *a au plus n racines* : car si elle en avait davantage, le degré de $S(x)$ devrait être plus petit que 0, ce qui est impossible. *Si elle en a n*, savoir $x_1 \dots, x_n$, le polynome $S(x)$ est de degré 0 en x : il se réduit donc à un nombre constant, indépendant de x ; d'ailleurs ce nombre, étant le coefficient de x^n dans le développement du second membre de (4), est égal au coefficient a_n de la même puissance de x dans le po-

[1] Cf. *La Géométrie* de DESCARTES, liv. III (*Œuv. de Descartes*, III, p. 445) : « que la somme [le premier membre] d'une équation qui contient plusieurs racines, peut toujours être divisée par un binome composé de la quantité inconnue, moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit... ».

lynome identique P(x) [voir n° **312**]; par conséquent, on a l'identité :

(5) $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.

355. Relations entre les racines et les coefficients de l'équation. — En développant le second membre de (5) sous forme d'un polynome en x et écrivant (n° **312**) que les coefficients de x^n, x^{n-1} ... sont les nombres a_n, a_{n-1} ..., j'obtiens les égalités ou *relations :*

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (a_n = a_n;\ a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n);\ a_{n-2} = a_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots); \\ \ldots,\ a_0 = \pm a_n x_1 x_2 \ldots x_n, \end{array} \right.$$

le dernier coefficient étant affecté du signe + ou du signe — suivant que le nombre des racines est *pair* ou *impair* [un produit de n facteurs tous négatifs est en effet positif ou négatif suivant la parité du nombre n : on peut remarquer que le signe d'un tel produit est le signe de $(-1)^n$; on écrira alors $a_0 = (-1)^n a_n x_1 x_2 \ldots x_n$].

Les « relations » [1] (6) permettent d'énoncer les propositions suivantes [*comparer* n°s **338** et **348**] : *Si l'équation* (1) *a n racines,* x_1, x_2, ..., x_n, *la somme de ces racines est égale à* $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$; *la somme de leurs produits deux à deux est égale à* $\frac{a_{n-2}}{a_n}$, ...; *leur produit est égal à* $(-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$.

356. Racines multiples. — En désignant par x_1, ..., x_n les n racines de l'équation (1), nous avons supposé implicitement que ces racines étaient *distinctes* (différentes) [2]. Il est cependant manifeste que les conclusions auxquelles nous sommes parvenus subsistent intégralement si plusieurs de ces racines sont égales, par exemple si $x_1 = x_2$ ou si $x_1 = x_2 = x_3$. D'une manière générale,

[1] Ces relations sont formulées par Albert GIRARD (*op. cit.*).

[2] Cf. HUDDE, apud *Geometria à Renato Descartes* [*vide supra*, p. 284, note 1], 2e éd., Amsterdam, 1659, p. 433 : *Regula quæ modum docet reducendi omnem æquationem..., cujus incognita quantitas.., duos vel plures æquales habet valores,* et plus loin p. 507-9.

supposons que le polynome $P(x)$ satisfasse à une identité de la forme suivante :

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_p)^{\alpha_p}, \tag{7}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *sont des nombres entiers positifs dont la somme égale n* ($\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$). Il nous est loisible d'admettre que cette identité n'est autre que l'identité (5) dans laquelle α_1 racines ont la même valeur x_1, α_2 racines ont la même valeur x_2, etc. C'est pourquoi nous dirons en ce cas, que *l'équation* (1) *a n racines, mais que, parmi ces racines, il y en a* α_1 *égales à* x_1, α_2 *égales à* x_2, *etc.*; les racines $x_1, x_2, \ldots$, seront dites « *racines multiples* » [1], les nombres correspondants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, étant appelés « *ordres de multiplicité* » des racines ; en particulier une racine multiple d'ordre 2 sera dite *double*, une racine multiple d'ordre 3 sera dite *triple* ; une racine non multiple sera dite *simple*.

Moyennant ces conventions (*c'est-à-dire :* à condition de regarder une racine multiple comme consistant en plusieurs racines confondues), les propositions énoncées aux nos **354-55** subsistent dans le cas où les racines de l'équation ne sont pas toutes simples.

357. Racines imaginaires et théorème d'Euler. — Supposons maintenant que l'équation (1) ait moins de n racines [chaque racine multiple étant comptée pour autant de racines que son ordre de multiplicité contient d'unités] : alors, pour sauvegarder le théorème de Girard, nous sommes amenés à dire que l'équation a des « racines imaginaires ». Mais c'est là une locution qui actuellement n'a pour nous qu'un sens négatif. Mieux vaut donc laisser provisoirement de côté le théorème de Girard (nous y reviendrons au chap. v) et le remplacer par le théorème suivant qui fut énoncé par Euler [2] [nous omettons la démonstration de ce théorème, — dé-

(1) Il résulte de cette définition qu'une racine x_1 est multiple d'ordre α_1, si $P(x)$ est *divisible* par $(x - x_1)^{\alpha_1}$, le *quotient* $\frac{P(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1}}$ étant un polynome en x de degré $n - \alpha_1$.

(2) « *Omnem expressionem algebricam* $\alpha + \beta\gamma + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$, etc. — dit Euler — *vel in factores reales* [non imaginaires] *simplices* $p + qx$, *vel saltem in factores reales quadratos* $p + qx + rx^2$ *resolvi posse.* » [*Correspondance*, éd. Fuss, St-Pétersbourg, 1843, I, p. 171, lettre à Goldbach].

monstration qui d'ailleurs n'est pas complète chez Euler et que seule l'introduction systématique des imaginaires en algèbre a permis de rendre rigoureuse] :

Quel que soit le polynome de degré n, P(x), ce polynome satisfait toujours à une identité de la forme ci-dessous :

$$(8)\quad P(x)=a_n(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_p)^{\alpha_p}(x^2+g_1x+k_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+g_qx+k_q)^{\beta_q}$$

où les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$ *sont des entiers positifs tels que*

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+2\beta_1+2\beta_2+\ldots+2\beta_q=n.$$

En d'autres termes, $P(x)$ est le produit d'un nombre a_n par des binomes de la forme [1] $(x-x_j)$ [ou par des puissances de ces binomes] et par des trinomes de la forme $(x^2+g_jx+k_j)$ [ou par des puissances de ces trinomes].

D'ailleurs, en écrivant l'identité (8), nous supposons que *les équations* $x^2+g_1x+k_1=0$, $x^2+g_2x+k_2=0$, etc., *n'ont pas de racines* [et, par conséquent, que $g_1^2-4k_1<0$, $g_2^2-4k_2<0$, etc.]. Si en effet, $x^2+g_1x+k_1=0$, par exemple, avait des racines, nous aurions [en désignant ces racines par x_{p+1}, x_{p+2}] : $x^2+g_1x+k_1=(x-x_{p+1})(x-x_{p+2})$, et [2] nous remplacerions $(x^2+g_1x+k_1)^{\beta_1}$ par le produit

$$(x-x_{p+1})^{\beta_1}\,.\,(x-x_{p+2})^{\beta_1}$$

dans l'identité (8).

Chaque facteur tel que $(x-x_j)^{\alpha_j}$ du second membre de (8) fournit une racine multiple d'ordre α_j de l'équation (1), ou (d'après le n° **356**) α_j racines confondues. Convenons de dire, d'autre part, que l'équation du second degré $x^2+g_jx+k_j=0$ a *deux* racines imaginaires [voir n° **340**] : il est alors naturel de considérer que le facteur $(x^2+g_jx+k_j)^{\beta_j}$ de l'identité (8) fournit 2 racines imaginaires multiples de l'équation (1) dont chacune a pour ordre de multiplicité β_j ... Si l'on fait ces conventions, on attribuera finalement $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+2\beta_1+\ldots+2\beta_q$, c'est-*à-dire n racines à l'équation de degré n.*

[1] J'écris x_j pour signifier : l'un *quelconque* des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

[2] Ce n'est, en d'autres termes, que lorsque nous y serons forcé ($g_1^2-4k_1$ étant négatif) que nous laisserons, dans l'Identité (8), un trinome de la forme $(x^2+g_1x+k_1)$ au lieu de décomposer ce trinome en un produit de deux binomes $(x-x_{p+1})(x-x_{p+2})$.

358. Critères relatifs à l'existence des racines réelles. — Etant donnée une équation polynomale de degré n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres *donnés* quelconques, existe-t-il des critères simples permettant de reconnaître rapidement si cette équation a des racines réelles, combien elle en a et quels sont les signes de ces racines ? Les critères ont été proposés en grand nombre; les plus importants sont ceux qui résultent des propriétés des « dérivées » dont nous nous occuperons au chapitre II du présent livre; bornons-nous pour l'instant à énoncer, sans démonstration, une règle classique que l'on appelle d'ordinaire *règle* ou *théorème de Descartes.*

Laplace énonce cette règle comme il suit dans les leçons qu'il donna à l'Ecole Normale en 1795 (*Journ. de l'Ec. Polytechn.*, 7e cahier, p. 43). « Deux termes consécutifs d'une équation qui ont le même signe forment une *permanence*; s'ils ont différents signes, ils forment une *variation*. Par termes consécutifs, j'entends ceux dans lesquels les exposants de l'inconnue ne diffèrent que d'une unité.

« Il ne peut y avoir dans une équation plus de racines réelles positives que de variations; il ne peut y avoir plus de racines réelles négatives que de permanences...

« De là suit que, si toutes les racines sont réelles, il y a autant de racines positives que de de variations et autant de racines négatives que de permanences. C'est la fameuse règle de Descartes ».

Conjointement avec ce théorème, on peut établir nombre de propositions relatives à l'existence des racines réelles et à leurs signes, par exemple celles-ci :

Une équation de degré impair a toujours au moins une racine réelle [cf. p. 540, note 1].

Une équation dont tous les coefficients ont le même signe n'a pas de racine positive.

Une équation dont tous les premiers termes ont le signe +, tous les termes suivants ayant le signe —, a une racine positive et une seule.

359. Racines d'un polynome. — Observons, avant de quitter

la théorie des équations, que les propriétés dont nous nous sommes occupés sont souvent présentées comme des propriétés des polynomes en x, sans que le mot « équation » soit prononcé. Ainsi les racines de l'équation $P(x) = 0$, dont le premier membre est un polynome, sont souvent appelées simplement *racines du polynome* $P(x)$.

360. Interpolation. — Le problème de l'interpolation, qui se rattache à la théorie des équations algébriques, est l'un de ceux que l'on a le plus souvent l'occasion de résoudre en physique. On peut l'énoncer comme il suit. *Trouver un polynome en x qui, pour des valeurs données de x, soit p, q, r, s, etc., prenne respectivement des valeurs données* P, Q, R, S, *etc.*

Newton résolut ce problème, mais la solution la plus simple en fut donnée par Lagrange à la fin du XVIIIe siècle.

« Soient, dit Lagrange [1], P, Q, R, S, etc. les valeurs des ordonnées du polynome [2] y qui répondent aux valeurs p, q, r, s, etc. des abscisses x.

Puisque y doit devenir P, Q, R, etc. lorsque x devient p, q, r, etc., il est aisé de voir que l'expression de y sera de cette forme,

$$y = AP + BQ + CR + DS + \dots$$

où les quantités A, B, C, etc. doivent être exprimées en x de manière qu'en faisant $x = p$, on ait

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \text{ etc};$$

que, de même, en faisant $x = q$, on ait

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 0. \text{ etc.};$$

qu'en faisant $x = r$, on ait pareillement

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \text{ etc.};$$

(1) *Leçons élémentaires sur les mathémathiques données à l'Ecole Normale en* 1795 par J. L. Lagrange *(Journal de l'Ec. polytechn.*, cah. 8, tome II, 1812).

(2) Lagrange désigne par la lettre y le polynome inconnu qu'il s'agit de former.

d'où il est facile de conclure que les valeurs de A, B, C, etc. doivent être de cette forme :

$$A = \frac{(x-q)(x-r)(x-s)\ldots}{(p-q)(p-r)(p-s)\ldots}$$
$$B = \frac{(x-p)(x-r)(x-s)\ldots}{(q-p)(q-r)(q-s)\ldots}$$
$$C = \frac{(x-p)(x-q)(x-s)\ldots}{(r-p)(r-q)(r-s)\ldots} \text{ etc. »}$$

Exemple. — Soit à trouver un polynome qui prenne respectivement les valeurs 2, 1, 4 pour

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3.$$

Ce polynome sera

$$y = 2\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 4\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

ou

$$y = (x-2)(x-3) - (x-1)(x-3) + 2(x-1)(x-2)$$

361. — D'après la règle de Lagrange, on sait former un polynome y dont le degré est inférieur d'une unité au nombre des valeurs $p, q, r, s, \ldots$ de x indiquées par l'énoncé. Ce n'est qu'exceptionnellement qu'on pourrait former un polynome de degré moindre répondant à la question. Il existe, en revanche, une infinité de polynomes de degré supérieur qui satisfont aux conditions requises. Ainsi le polynome du troisième degré

$$2x^2 - 7x + 7 + a(x-1)(x-2)(x-3),$$

où a a *une valeur quelconque*, satisfait comme $2x^2 - 7x + 7$ aux conditions énoncées dans l'exemple donné ci-dessus [en effet, l'expression ajoutée, $a(x-1)(x-2)(x-3)$, s'annule pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$].

8. — Systèmes d'équations simultanées.

362. Emploi de la méthode de substitution. — Nous avons montré (nos **222** et **329**) comment, par la méthode dite de *substitution*, la résolution d'un système de n équations simultanées [à n inconnues] peut être ramené à la résolution de systèmes de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues ([1]). Ainsi, par l'application répétée de la même méthode, on parvient de proche en proche à *éliminer* toutes les inconnues sauf une et l'on est ramené à la résolution d'équations qui ne contiennent plus qu'une seule inconnue.

La méthode de substitution, il est vrai, ne pourra pas toujours être appliquée dans la pratique, ainsi que nous en avons fait la remarque à la fin du n° **329**. Mais elle nous montre immédiatement que le nombre des solutions d'un système de n équations polynomales augmentera très rapidement lorsque les degrés de ces équations iront en croissant. En effet, supposons que la première équation du système, traitée comme une équation en x, soit de degré m par rapport à x, et ait m racines : j'en tirerai alors m expressions différentes de x que je porterai successivement dans les $n - 1$ équations restantes du système, et je ramènerai ainsi la résolution de mon système à celle de m systèmes de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues; cela posé, si chacun des m systèmes auxquels nous a conduits la première *élimination* (élimination de x) n'admettait qu'un système de solutions, le système proposé en admettrait m; mais si les équations de ces systèmes sont de degré p, supérieur à 1, par rapport à la seconde inconnue à éliminer, soit y, chacun d'eux se décomposera à son tour, et l'on aura à envisager (après l'élimination de y) mp systèmes d'équations à $(n - 2)$ inconnues. Et ainsi de suite. C'est pourquoi, dès que l'on a affaire à des équations de degré supérieur à 2, la résolution des systèmes ne peut être en général effectuée *exactement*, parce qu'elle nécessiterait la résolution d'une ou plusieurs équations à une inconnue dont le degré surpasse 4 (voir n° **350**).

Nous considérerons exclusivement, dans les pages qui vont suivre, des systèmes d'équations du premier et du second degré.

([1]) Un tel système est en général *déterminé* (voir n° 323), ce qui ne veut pas dire, bien entendu, qu'il admette un système de solutions uniques, mais seulement que l'on ne peut choisir arbitrairement la valeur d'aucune des inconnues.

363. — Dans la *Géométrie* de Descartes (*Œuv. de Descartes*, t. X, p. 673), les systèmes d'équations et la méthode à suivre pour les résoudre sont définis dans les termes suivants, qui résument l'essentiel de ce que nous avons dit et allons dire sur eux :

« Mais lorsque le problème proposé est tel qu'une seule lettre inconnue n'a point assez de communication avec celles qui sont connues, en sorte qu'elles ne sauraient s'entraider pour faire trouver l'équation, ou bien que par la supposition d'une seule lettre, on s'embarrasse dans un trop gros calcul, on se doit servir de plusieurs lettres inconnues, et chercher aussi autant d'équations qu'on a supposé de lettres, et par le moyen d'icelles équations réduire toutes ces lettres en une seule, qui porte la solution du problème. Et pour venir à bout de ces réductions, il est besoin de considérer si, par une équation ou par la comparaison de deux ou plusieurs, en les ajoutant ou soustrayant l'une de l'autre, on ne pourra connaître une lettre. Et si cela ne se peut [1], il faut venir à l'extraction de la racine pour en trouver une ; puis après, on doit ôter cette lettre de l'une des autres équations, et en son lieu mettre la valeur trouvée ; et ainsi on sera quitte d'une lettre inconnue. Puis, comparant cette équation avec une autre dont on aura aussi ôté cette même lettre, si elle y était, on se défera d'une seconde ; et ainsi des autres, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'une inconnue parmi toutes les connues, dont on mettra les termes par ordre. Et on connaîtra, par extraction de racine, quelle est la valeur, comme devant ; et ainsi le problème sera résolu. »

Les premières lignes de ce passage contiennent une remarque utile à faire : c'est que c'est souvent de son plein gré, et pour la commodité des calculs, que l'algébriste considère un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues au lieu de raisonner sur une équation unique à une inconnue. Ainsi la résolution de l'équation $x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ et celle du système

$$\begin{cases} x^3 + y = 2 \\ xy^2 = 1 \end{cases}$$

[1] On voit que Descartes ne préconise l'élimination par *substitution* que comme un pis-aller. Il est, en revanche, partisan de la méthode de *réduction*, que nous définirons au n° 365.

sont deux problèmes équivalents [car si l'on pose $\frac{1}{\sqrt{x}} = y$, c'est-à-dire $1 = xy^2$, l'équation devient $x^2 + y = 2$].

D'une manière générale, toutes les fois que, pour résoudre une équation, on introduit une variable auxiliaire, on se trouve remplacer l'équation par un système équivalent.

364. Système de n équations polynomales du premier degré (1) **à n inconnues.** — J'appelle ainsi un système de n équations de la forme (2)

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n = b_n \end{cases}$$

dont les seconds membres (dits *termes constants*) sont indépendants des inconnues, tandis que les premiers membres sont des polynomes du premier degré par rapport aux n inconnues $X_1, \dots X_n$ [nous représentons les coefficients par des lettres affectées de deux

(1) Un tel système est appelé linéaire (*comparer* nº 292).

(2) L'Alexandrin Jamblique (IIIe ou IVe siècle ap. J.-C.) nous a conservé l'énoncé et la solution d'un problème qu'il appelle *Epanthème* (fleur) *de Thymarydas* et qui consiste dans la résolution du système suivant (*In Nicomachi Arithmeticam Introductio*, éd. Pistelli, p. 62 sqq.) :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_n = s \\ X_1 + X_2 = a_1 \\ X_1 + X_3 = a_2 \\ \dots \dots \\ X_1 + X_n = a_{n-1}. \end{cases}$$

Ce système est facile à résoudre par la méthode de substitution (ἔφοδος γλαφυρωτάτη, méthode très élégante, dit Jamblique). Traitant provisoirement X_1 comme une quantité connue, nous tirons de la seconde équation et des suivantes :

$$X_2 = a_1 - X_1, \qquad X_3 = a_2 - X_1, \dots \qquad X_n = a_{n-1} - X_1.$$

Portant ces valeurs dans la première équation, nous avons.

$$X_1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - (n-1)X_1 = s,$$

équation qui donne la valeur de l'inconnue X_1. L'auteur (Thymarydas) auquel Jamblique attribue la solution de cette question ne nous est pas connu : ce paraît être un pythagoricien.

indices (¹), dont le premier indique le numéro de l'équation, et le second l'indice de l'inconnue à laquelle est attaché chaque coefficient].

En employant la méthode de substitution, on voit immédiatement que la résolution du système (1) se ramène à la résolution d'une série d'équations du premier degré. On constate ainsi que (sauf dans certains cas exceptionnels, c'est-à-dire pour certains systèmes exceptionnels de valeurs des coefficients pour lesquels le système est indéterminé ou impossible (²)) *le système d'équations* (1) *admet un et un seul système de solutions.*

Nous reviendrons plus loin (chap. v, § 2) sur les systèmes (1), et apprendrons à les résoudre par une méthode plus avantageuse que la méthode de substitution. Bornons-nous, pour l'instant, à étudier, à titre d'exemple, un système de deux équations, écrit sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0, \end{cases}$$

a, b, c, a', b', c' désignant des expressions algébriques quelconques ne contenant pas les inconnues x et y.

365. Résolution du système (2). — Appliquant la méthode de substitution, nous tirerons de la première équation :

$$(3) \qquad ax = -by - c; \quad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a};$$

portant dans la seconde équation, j'ai :

$$-\frac{a'b}{a}y - \frac{a'c}{a} + b'y + c' = 0 \quad \text{ou} \quad \left(b' - \frac{a'b}{a}\right)y + \left(c' - \frac{a'c}{a}\right) = 0.$$

Résolvant, et simplifiant la fraction qui donne la valeur de y, j'obtiens :

$$y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

(¹) L'emploi systématique des doubles indices, qui facilitent et clarifient l'exposé de nombreux calculs, remonte à LEIBNIZ.

(²) *Vide infra*, n°s 366, 367.

Remplaçant y par cette valeur dans la seconde égalité (3), j'ai

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}.$$

et le système (2) est résolu.

Nous aurions pu employer, pour résoudre ce système une méthode plus rapide et plus élégante. Nous savons (n° **328**) que les équations (2) sont respectivement équivalentes aux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0 \\ \alpha'(ax + by + c) + \beta'(a'x + b'y + c') = 0 \end{cases}$$

où α, β, α', β' sont des nombres connus. Faisons en particulier

$$\alpha = b', \quad \beta = -b; \quad \alpha' = -a', \quad \beta' = a;$$

alors le terme en y de la première équation (4), ayant pour coefficient $(bb' - bb')$ va disparaître; de même le terme en x dans la seconde équation (4), et nous avons :

$$\begin{cases} (ab' - ba')x + (cb' - bc') = 0 \\ (ab' - ba')y + (ac' - ca') = 0, \end{cases}$$

d'où nous tirons, pour x et y, les valeurs données plus haut [1].

La méthode ainsi définie est souvent appelée méthode de *réduction* (cf., p. 257, note 1). On en peut varier l'application en variant les *combinaisons* des équations (2), *équivalentes* à ces équations, que l'on substitue au système proposé.

366. Discussion. — Les expressions trouvées pour x et y n'ont un sens que si $ab' - ba'$ n'est pas nul.

Lorsque $ab' - ba'$ est nul, en effet, ces expressions sont des fractions de dénominateur 0. En ce cas, si leurs numérateurs ne sont pas nuls, elles ne représentent aucun nombre fini (non infiniment grand) et nous devons considérer que le système d'équations n'a *pas de solutions*; ainsi, par exemple, le système

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3, \end{cases}$$

[1] Considérons par exemple le système des équations $x + y = s$, $x - y = d$. La méthode que nous indiquons, conduit immédiatement à la solution $x = \frac{s + d}{2}$, $y = \frac{s - d}{2}$.

pour lequel $a = 2$, $b = 1$, $a' = 4$, $b' = 2$ $(ab' - ba' = 4 - 4)$, n'admet pas de solution [et il est clair, en effet, que si la somme $2x + y$ égale 1, son double, $4x + 2y$ ne saurait être égal qu'à 2 et non à 3] (cf. n° **324**). Supposons, d'autre part, que l'on ait à la fois

$$ab' - ba' = 0, \qquad bc' - cb' = 0.$$

On en tire $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ et par conséquent $ca' - ac' = 0$, et $bc' - cb' = 0$; donc les expressions des racines x et y sont toutes deux de la forme $\frac{0}{0}$ et n'offrent aucun sens. Mais il se présente en ce cas une circonstance fort remarquable. Appelons λ la valeur des trois rapports $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}$. Notre système d'équation peut s'écrire :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \lambda(ax + by + c) = 0\,; \end{cases}$$

on voit alors que la seconde équation est *équivalente* à la première; elle peut lui être substituée (n° **326**). Ainsi nos deux inconnues, liées en apparence par deux équations, ne sont en réalité liées que par une seule (cf. n° **327**).

Sans insister sur ces anomalies, nous retiendrons que les propositions générales énoncées au sujet d'un type donné de système peuvent être en défaut dans certains cas exceptionnels : on ne saurait, par conséquent, appliquer ces propositions à un problème particulier sans s'assurer, chaque fois, par une « *discussion* » des données, que l'on ne se trouve pas précisément en présence d'un tel cas.

367. Système de trois équations linéaires. — Soit à résoudre le système

$$(5) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$$

Les méthodes de substitution et de réduction, appliquées à ce système, conduiront aux résultats suivants [1] :

[1] Voir, pour plus de détails le § 2 du chap. v.

Appelons Δ la quantité

$$\Delta = a(b'c'' - b''c') - a'(bc'' - b''c) + a''(bc' - b'c),$$

dont la valeur est déterminée par les valeurs des coefficients des inconnues dans le système :

1° *Si la quantité* Δ *est non-nulle, le système* (5) *admet un système de solutions uniques; dont les expressions sont*

$$x = \frac{d(b'c'' - b''c') - d'(bc'' - b''c) + d''(bc' - b'c)}{\Delta}$$

$$y = \frac{d(c'a'' - a'c'') - d'(ca'' - c''a) + d''(ca' - c'a)}{\Delta}$$

$$z = \frac{d(a'b'' - a''b') - d'(ab'' - a''b) + d''(ab' - a'b)}{\Delta}.$$

2° Si *la quantité* Δ *est nulle; ou bien le système n'admet aucun système de solutions*, et il est dit *impossible* (cf. n° **324**); ou bien il en admet une infinité, et il est dit *indéterminé* [en ce cas on peut choisir arbitrairement la valeur de l'une des trois inconnues et trouver des valeurs correspondantes des deux autres inconnues qui satisfont à la fois aux trois équations (5)].

368. Exemples de systèmes du second degré. — Pour résoudre certains systèmes de degré supérieur au premier, sans introduire inutilement des équations de degré élevé, malaisées à manier, l'algébriste emploie les artifices les plus variés. Les exemples suivants donnent une idée des détours que parfois il est amené à faire.

Proposons-nous de résoudre le système :

$$(6) \qquad x + y = s \qquad xy = p.$$

Nous remarquons que les racines de l'équation du second degré $X^2 - sX + p = 0$ ont précisément (n° **338**) pour somme s et pour produit p. Nous en concluons que, si elles existent, les racines, X_1 et X_2, de cette équation sont un système de solutions du système (6). Il n'y a pas d'autre système de solutions [mais on peut prendre à volonté x égal à X_1, $y = X_2$, ou bien $x = X_2$, $y = X_1$]. Si $s^2 - p < 0$ le système n'a pas de solutions (cf. n° **338**).

Proposons-nous, d'autre part, de résoudre le système :

$$(7) \qquad x^2 - y^2 = a^2, \qquad xy = p.$$

Nous remarquons que (voir n° **296**)

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 4p$$

et

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 4p$$

le système (7) équivaut donc au système

$$x + y = \sqrt{a^2 + 4p}, \qquad x - y = \sqrt{a^2 - 4p},$$

qui est du premier degré [les nouvelles équations n'ont un sens que si $a^2 + 4p > 0$ et $a^2 - 4p > 0$].

369. Changement d'inconnues.— Nous avons défini au n° **330** le changement d'inconnue dans le cas d'une équation unique. Lorsque l'on a affaire à plusieurs équations simultanées, on peut faire un changement portant sur plusieurs inconnues.

C'est ainsi que, voulant résoudre le système des deux équations

$$x^2 + y^2 = a, \qquad xy + x + y = b,$$

où a et b sont supposés connus, Cardan [1] prend comme inconnue auxiliaire le produit xy, que nous désignerons par la lettre z; ajoutons $2xy$ à chacun des membres de la première équation, retranchons xy des membres de la seconde [ce qui ne porte pas atteinte aux solutions] : nous avons [puisque $xy = z$, par hypothèse]: $x^2 + y^2 + 2xy = a + 2z$ ou $(x+y)^2 = a + 2z$; et $x + y = b - z$, d'où $(x+y)^2 = (b-z)^2$; ainsi nous avons deux expressions différentes de la même quantité inconnue $(x+y)^2$; ces deux expressions devant représenter le même nombre, nous pouvons écrire l'égalité

$$a + 2z = (b-z)^2, \qquad \text{ou} \qquad a + 2z = b^2 - 2bz + z^2,$$

qui est une équation du second degré [elle peut s'écrire $z^2 - 2(b+1)z + (b^2 - a) = 0$] déterminant, si elle a des racines, les valeurs de l'inconnue z qui répondent à la question. Les valeurs correspondantes de x et y se calculeront ensuite comme il a été dit au n° **368**, étant donné que l'on connaîtra $x + y$ et xy.

D'une manière générale, *effectuer un changement d'inconnues*

[1] *Loc. cit. supra*, p. 325, note 2.

(ou variables) sur un système d'équation à deux inconnues, c'est remplacer ces inconnues x et y par deux fonctions connues — soit $f(x', y')$ et $\varphi(x', y')$ — de deux nouvelles quantités x', y'. Les équations se transforment en un système d'équations relatif aux inconnues x', y'. Si l'on sait trouver deux nombres, $x' = x'_1$, $y' = y'_1$, solutions du nouveau système, les nombres $x_1 = f(x'_1, y'_1)$, $y_1 = \varphi(x'_1, y'_1)$, seront solutions du système proposé.

370. Racine commune à deux équations du second degré. — Nous terminerons ce paragraphe en disant quelques mots des systèmes d'équations simultanées à une seule inconnue, nous bornant d'ailleurs aux équations du second degré. Soient

$$(8) \qquad \begin{cases} A x^2 + B x + C = 0 \\ A'x^2 + B'x + C' = 0, \end{cases}$$

deux telles équations. Il est clair que si l'on choisit au hasard les coefficients A, B, C, A', B', C', les équations n'auront pas de racine commune. Mais nous pouvons nous poser la question suivante : *Quelle relation doit-il exister entre les six coefficients* A, B, C, A', B', C' *pour que les deux équations* (8) *soient vérifiées par un même nombre que nous appellerons x_1 ?*

S'il existe un tel nombre x_1, nous aurons

$$(8^{bis}) \qquad Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0, \qquad A'x_1^2 + B'x_1 + C' = 0\,;$$

multiplions tous les termes de la première égalité par A', tous ceux de la seconde par A et retranchons la première égalité de la seconde, il vient :

$$(9) \qquad (AB' - BA')x_1 + AC' - CA' = 0.$$

Multiplions d'autre part tous les termes de la première égalité (8bis) par C', tous ceux de la seconde par C et soustrayons : il vient, en mettant x_1 en facteur commun :

$$(10) \qquad x_1[(AC' - CA')x_1 + BC' - CB'] = 0.$$

Le nombre x_1 ne peut pas être nul à moins que C et C' ne soient tous deux nuls [ce n'est qu'en ce cas que les *deux* équations

(8) sont satisfaites par la valeur $x = 0$]. Donc les égalités (9) et (10) prouvent respectivement que

$$x_1 = -\frac{AC' - CA'}{AB' - BA'} \qquad \text{et} \qquad x_1 = -\frac{BC' - CB'}{AC' - CA'},$$

si[1] toutefois [2] $AB' - BA' \neq 0$ et $AC' - CA' \neq 0$.

Ainsi nous avons deux expressions différentes de même nombre x_1. Exprimons qu'elles sont égales : nous obtenons une égalité qui peut s'écrire

$$(11) \qquad (AC' - CA')^2 - (AB' - BA')(BC' - CB') = 0.$$

Telle est la relation à laquelle nous aboutissons, à condition toutefois que, comme nous l'avons supposé chemin faisant, C et C' ne soient pas tous deux nuls et que $AB' - BA' \neq 0$, $AC' - CA' \neq 0$.

Mais si l'une des quantités $AB' - BA'$, $AC' - CA'$ est nulle, les égalités (9) et (10) nous montrent que les trois quantités $(AB' - BA')$, $(BC' - CB')$, $(AC' - CA')$ sont sûrement nulles toutes les trois [les égalités ne peuvent être satisfaites qu'à cette condition] ; donc la relation (11) est encore vérifiée. Elle est vérifiée également si C et C' sont nuls, car alors tous ses termes sont égaux à zéro. Donc, dans tous les cas, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (8) aient une racine commune est que l'égalité (11) ait lieu [3].

[1] Si leurs dénominateurs étaient nuls, les fractions n'auraient pas de sens.

[2] Le signe $\neq$ signifie : *différent de zéro*.

[3] Le premier membre de la relation (11) est souvent appelé *résultant* des deux équations (8). On énonce alors la proposition suivante : *Pour que deux équations du second degré en x aient une racine commune, il faut et il suffit que leur résultant soit nul.* Dans le cas particulier où l'on a à la fois les égalités

$$AB' - BA' = 0, \qquad BC' - CB' = 0, \qquad AC' - CA' = 0,$$

on constate immédiatement que l'on a les proportions $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$. Appelons λ la valeur commune de ces trois rapports : la seconde équation (8) qui a pour coefficients $A\lambda$, $B\lambda$, $C\lambda$ peut s'écrire $\lambda(Ax^2 + Bx + C) = 0$ et elle a les mêmes racines que l'équation $Ax^2 + Bx + C = 0$ (n° 326). Donc, en ce cas particulier, ces deux équations ont, non pas *une*, mais leurs *deux* racines communes.

371. Remarque. — La question que nous venons de traiter peut être regardée, si l'on veut, comme un problème d'*élimination* (**329**) relatif à deux équations à deux inconnues (du second degré par rapport à l'une des inconnues).

Supposons en effet [1] que les coefficients A, B, ... C' soient des fonctions, d'ailleurs quelconques, d'une quantité y : alors les équations (8) constituent un système de deux équations à deux inconnues. Si un couple de nombres x_1, y_1, est solution de ces équations, il en faut conclure que pour $y = y_1$, les deux équations (8) en x admettent x_1 comme racine commune ; en conséquence, les coefficients A, B, ... C' doivent, lorsqu'on donne à y la valeur y_1, satisfaire à la relation (11). La relation (11) est, dès lors, une équation en y qui admet y_1 comme racine : c'est le résultat de l'élimination de x entre les deux équations (8).

9. — Division des polynomes en x et décomposition des fonctions rationnelles

372. — On peut faire de la division des polynomes en x une théorie qui est tout à fait analogue à la théorie de la division arithmétique. Appelons $A(x)$ et $B(x)$ deux polynomes en x dont les degrés soient respectivement n et m et supposons *n supérieur ou égal à m*. Effectuer la division de $A(x)$ par $B(x)$ ce sera, par définition, mettre $A(x)$ sous la forme

$$A(x) = B(x) \,.\, Q(x) + R(x), \qquad (1)$$

$Q(x)$ étant un polynome de degré $n - m$ (appelé *quotient* de la division) et $R(x)$ un polynome de degré *inférieur à m* (appelé *reste* de la division) ; ce sera donc, en d'autres termes, *trouver* deux polynomes $Q(x)$ et $R(x)$ [l'un de degré $n - m$, l'autre de degré inférieur à m] qui satisfassent, quel que soit x, à l'identité (1).

On démontre que, quels que soient les polynomes A et B, la

[1] Cf. Bezout, *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations*, apud *Hist. de l'Acad. de Paris*, 1764.

détermination des polynomes Q et R satisfaisant aux conditions requises est toujours possible. Soient, en effet, $A(x)$ et $B(x)$ ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x et mis sous la forme

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$B(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Supposons, pour un instant, que le polynome Q *ait été trouvé* [1], et écrivons-le sous la forme

$$Q(x) = \lambda_{n-m}x^{n-m} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0 ;$$

nous allons chercher quelles valeurs il faut donner aux coefficients $\lambda_{n-m}, \dots, \lambda_1, \lambda_0$, pour que la supposition ainsi faite soit légitime. Remplaçant A, B, Q par les développements écrits ci-dessus, formons la différence $A(x) - B(x) \,.\, Q(x)$, et ordonnons-la par rapport aux puissances décroissantes de x. Cette différence est un polynome de degré n, qui s'écrit

$$(a_n - b_m\lambda_{n-m})x^n + (a_{n-1} - b_m\lambda_{n-m-1} - b_{m-1}\lambda_{n-m})x^{n-1} + \dots$$
$$+ (a_1 - b_1\lambda_0 - b_0\lambda_1)x + (a_0 - b_0\lambda_0).$$

Exprimant que le polynome est *identiquement nul* (**312**) égalons à zéro [2], les coefficients de $x^n, x^{n-1}, \dots, x^{n-m}$; nous avons $n - m + 1$ égalités qui constituent un système de $n - m + 1$ équations polynomales simultanées du premier degré permettant de déterminer les *inconnues* $\lambda_{n-m}, \lambda_{n-m-1}, \dots, \lambda_1, \lambda_0$. J'en conclus que *si je donne aux coefficients* λ *les valeurs définies par ce sys-*

[1] Cette méthode de démonstration n'est autre que la *méthode des coefficients indéterminés* que nous appliquerons tout à l'heure (n° 375) dans un cas plus compliqué).

[2] Egalant à zéro le coefficient de x^n, j'obtiens $\lambda_{n-m} = \frac{a_n}{b_m}$; portant cette valeur dans le coefficient de x^{n-1} et égalant ce coefficient à o, j'obtiens $\lambda_{n-m-1} = \frac{1}{b_m}\left(a_{n-1} - \frac{a_n \,.\, b_{m-1}}{b_m}\right)$; et ainsi de suite. — Dans la pratique, pour calculer le quotient de la division de $A(x)$ par $B(x)$, on évite d'écrire les lettres $\lambda_{n-m}, \dots, \lambda_0$ (représentant les coefficients inconnus dudit quotient) en adoptant une disposition et des règles de calcul qui rappellent celles de la division arithmétique (voir les traités d'algèbre élémentaire).

tème, la différence A — BQ *sera un polynome en x de degré $m - 1$ au plus*. Appelant $R(x)$ ce dernier polynome, j'obtiens (¹), comme il était requis, une identité de la forme (1).

373. Divisibilité. — Conformément à la définition de la division des polynomes, un polynome en x, $A(x)$, sera dit *divisible* (²) par un autre polynome $B(x)$, *de moindre degré*, si le reste de la division de $A(x)$ par $B(x)$ se réduit à *zéro*.

Il est manifeste que, si $A(x)$ est divisible par $B(x)$, toute *racine* de $B(x)$ [voir n° **359**], est aussi racine de $A(x)$. Plus précisément supposons que $A(x)$ et $B(x)$ aient été décomposés en produits sous la forme indiquée au n° **357** ; nous aurons

$$(2)\ A(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_p)^{\alpha_p}(x^2 + g_1x + k_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + g_qx + k_q)^{\beta_q}$$

avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p + 2\beta_1 + \ldots + 2\beta_q = n$, et une identité analogue pour $B(x)$. Convenons d'appeler *facteur premier* de $A(x)$ [ou de $B(x)$] tout facteur (³) de la forme $(x - x_j)$ ou $(x^2 + g_jx + k_j)$ [l'indice j étant quelconque] ; nous dirons alors que l'égalité (2) donne la *décomposition de* $A(x)$ en facteurs *premiers*. Cela posé, on peut démontrer que *si* A *est divisible par* B, *tous les facteurs premiers de* $B(x)$ *figurent dans la décomposition de* $A(x)$ *avec un exposant au moins égal à celui qu'ils ont dans la décomposition de* B (comparer n° **24**).

374. Fonction rationnelle de x. — Soit $\frac{B(x)}{A(x)}$ le quotient de deux polynomes, une fonction (ou fraction) rationnelle de x (voir n° **315**). Pour faire l'étude générale d'une telle fonction, on a toujours le droit de supposer que le degré de B est *inférieur* à celui

(¹) *Exemple.* — La division de $2x^4 - 5x^3 + 7x - 1$ par $x^2 + x + 1$ donne comme quotient $2x^2 - 2x - 5$ et comme reste $14x + 4$. On a, en effet : $2x^4 - 5x^3 + 7x - 1 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 2x - 5) + 14x + 4$.

(²) D'une manière générale un polynome portant sur un nombre quelconque de variables — par exemple un polynome $P(x, y, z)$ — en x, y, z est dit divisible par un polynome $F(x, y, z)$, s'il existe un polynome $Q(x, y, z)$ tel que l'on ait

$$Q(x, y, z) \,.\, F(x, y, z) = P(x, y, z).$$

(³) Ces facteurs sont les polynomes les plus simples par lesquels $A(x)$ soit divisible. Pratiquement, pour reconnaître si $A(x)$ est divisible par un polynome donné de la forme $x - l$, il suffit de voir si l est racine de polynome, c'est-à-dire si l'on a ou non : $a_nl^n + \ldots + a_1l + a_0 = 0$.

de A. En effet, s'il n'en était pas ainsi, nous pourrions effectuer la division ([1]) de B par A, et nous aurions $B(x) = A(x).Q(x) + R(x)$, d'où $\frac{B(x)}{A(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{A(x)}$, le degré de R étant inférieur à celui de A : la fraction proposée serait par conséquent la somme d'un polynome et d'une fraction dont le *numérateur* a sûrement un degré inférieur au degré du *dénominateur*.

Supposons donc cette condition réalisée pour la fraction $\frac{B(x)}{A(x)}$ et proposons-nous de simplifier l'étude de cette fraction en la décomposant en *une somme de fractions plus simples*.

Les algébristes ont démontré le théorème suivant ([2]) : *Soit effectuée la décomposition de* A(x) *en facteurs premiers sous la forme* (2) [n° **373**] : *on peut trouver des nombres* ([3])

$$c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1\alpha_1}, \ldots, c_{p1}, \ldots, c_{p\alpha_p}, d_{11}, e_{11}, \ldots, d_{q\beta_1}, e_{q\beta_1}, \ldots$$

tels que l'on ait l'identité ([4]) :

$$(3)\left\{\begin{aligned}\frac{B(x)}{A(x)} &= \left[\frac{c_{11}}{x-x_1} + \frac{c_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}\right] \\ &+ \ldots + \left[\frac{c_{p1}}{x-x_p} + \frac{c_{p2}}{(x-x_p)^2} + \ldots + \frac{c_{p\alpha_p}}{(x-x_p)^{\alpha_p}}\right] \\ &+ \left[\frac{d_{11}x + e_{11}}{x^2+g_1x+k_1} + \frac{d_{12}x + e_{12}}{(x^2+g_1x+k_1)^2} + \ldots + \frac{d_{1\beta_1}x + e_{1\beta_1}}{(x^2+g_1x+k_1)^{\beta_1}}\right] \\ &+ \ldots + \left[\frac{d_{q1}x + e_{q1}}{x^2+g_qx+k_q} + \ldots + \frac{d_{q\beta_q}x + e_{q\beta_q}}{(x^2+g_qx+k_q)^{\beta_q}}\right].\end{aligned}\right.$$

([1]) On remarquera qu'à l'inverse de la notation du n° 372, nous désignons ici le diviseur par A.

([2]) Ce théorème fut formulé par Euler. Le cas où les racines de B(x) sont toutes simples (et réelles) avait été traité auparavant par Leibniz et Jean Bernouilli.

([3]) Le premier indice dont sont affectées les lettres c, d, e, indique quel est le facteur $(x - x_1)$, ... ou $(x^2 + g_1x + k_1)$, ... auquel se rapporte la lettre; le second indice est égal à l'*exposant* de la puissance (dudit facteur) à laquelle est associée la lettre considérée (voir sur le double indice le n° 364).

([4]) *Exemples :*

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-7}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

$$\frac{4x^2+2x+1}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

La possibilité d'une telle *décomposition* de la fraction $\frac{B(x)}{A(x)}$ résulte des propositions que l'on établit dans la théorie de la division. Nous admettrons ici, — pour abréger notre exposé — que cette possibilité, — c'est-à-dire l'existence d'une somme de « fractions simples » répondant à la question, — ait déjà été établie, et nous nous bornerons à indiquer comment on peut *calculer* effectivement les valeurs des nombres c_{11}, etc. qui figurent au second membre de (3); le résultat énoncé se trouvera ainsi vérifié.

Nous emploierons, pour faire cette vérification, une méthode fort commode dont l'origine historique se trouve dans la *Géométrie* de Descartes [1], et que nous avons déjà employée, sans le dire, au n° **372** : la méthode des *coefficients indéterminés*.

375. Emploi de la méthode des coefficients indéterminés. — Développons B(x) sous la forme

$$B(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$$

polynome dont les premiers coefficients b_{n-1}, b_{n-2} peuvent d'ailleurs être nuls [ils sont nuls si le degré de B(x) est inférieur de *plus d'une unité* au degré de A(x)].

Admettons, d'autre part, que la proposition ci-dessus énoncée soit exacte ; écrivons l'égalité (3) où les lettres c_{11}, c_{12}, etc., désignent des nombres (*coefficients*) encore inconnus (*indéterminés*); et effectuons la somme indiquée au second membre de (3), en réduisant toutes les fractions au même dénominateur. Le dénominateur commun n'est autre que A(x) [mis sous la forme du produit (2) du n° **373**]. Quant au numérateur, c'est un polynome en x de degré $n - 1$ dont les coefficients sont des polynomes du premier degré par rapport aux diverses quantités encore inconnues (ou *coefficients indéterminés*) c_{11}, ... $e_{q\beta_q}$. D'après l'identité (3) ce numérateur doit être identique à B(x), et par conséquent (n° **311**) ses n coefficients doivent être égaux chacun à chacun aux coefficients b_{n-1}, ... b_1, b_0. Ecrivant explicitement qu'il en est ainsi, j'obtiens un système de n équations du premier degré dont les inconnues

[1] « Mais je veux bien aussi vous avertir, — dit DESCARTES (liv. II, *Œuv.*, VI, p. 423) — que l'invention de supposer deux équations de même forme pour comparer séparément tous les termes de l'un à ceux de l'autre... n'est pas l'une des moindres de la méthode dont je me sers ».

sont c_{11}, ... $e_{q\beta_q}$. Or ces inconnues sont précisément au *nombre* de n. En effet, les c de premier indice 1 sont au nombre de α_1, les c de premier indice 2 sont au nombre de α_2, etc. et il y a par conséquent $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)$ lettres c; on voit de même qu'il y a $(\beta_1 + \dots + \beta_p)$ lettres d et autant de lettres a; donc le nombre des inconnues est $(\alpha_1 + \dots + \alpha_p + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_q)$, c'est-à-dire n [*voir* **357**]. On voit par là que le système d'équations simultanées formé comme il a été dit est un système de n équations linéaires à n inconnues. Ce système admet un système de solutions unique (1) qui donne les *valeurs cherchées des coefficients* c_{11}, *etc.* (2).

376. Réduction des fonctions rationnelles au même dénominateur. — La composition d'une somme de fonctions rationnelles de x en une fraction unique (rationnelle) est l'opération inverse de la décomposition. Pour l'effectuer, il suffira de réduire les fractions au même dénominateur; après quoi on formera la fraction qui a pour numérateur la somme des numérateurs des fractions données et pour dénominateur le dénominateur commun.

La réduction au même dénominateur se fait en algèbre comme en arithmétique. Comme dénominateur commun on peut toujours prendre le produit des dénominateurs donnés. Mais, si ceux-ci ont des facteurs communs [c'est-à-dire si dans leur décomposition figurent des facteurs identiques de la forme $(x - x_j)$ ou $(x^2 + gx + k)$]

(1) En énonçant cette conclusion, nous admettons que nous ne nous trouvons pas en présence du cas exceptionnel où un système d'équations linéaires est indéterminé ou impossible. On peut démontrer *a priori* que ce cas ne saurait se présenter ici. On le constatera, d'ailleurs, immédiatement, si l'on effectue les calculs.

(2) On vérifiera facilement que pour déterminer les coefficients que nous avons appelés $c_{1\alpha_1}$, $c_{1\alpha_2}$,..., derniers dans chaque crochet, on peut appliquer la règle suivante :

Désignons par $Q(x)$ l'ensemble des facteurs autres que $(x - x_1)^{\alpha_1}$ dans le produit (2), expression de $A(x)$: le coefficient $c_{1\alpha_1}$ a pour valeur $\frac{B(x_1)}{Q(x_1)}$, *rapport des valeurs prises par les polynomes* $B(x)$ *et* $Q(x)$ *lorsqu'on y donne à* x *la valeur* x_1.

Les coefficients c_{11}, c_{21}, ... des puissances d'exposant — 1 de $(x - x_1)$, $(x - x_2)$,... sont souvent appelés *résidus* de la fonction rationnelle $\frac{B(x)}{A(x)}$ par rapport aux diverses racines x_1, x_2, ... du dénominateur $A(x)$.

on pourra prendre un dénominateur commun de degré moins élevé, savoir un produit

$$(x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_1} \dots (x^2 + g_1 x + k)^{\beta_1} \dots,$$

où l'on fera figurer tous les facteurs qui se rencontrent dans les décompositions en produits des divers polynomes dénominateurs, avec un exposant au moins aussi élevé que celui qu'ils ont dans ces décompositions. Le produit ainsi défini sera appelé *plus petit commun multiple* des dénominateurs.

10. — Fonctions et équations transcendantes. Calculs trigonométriques.

377. — En définissant au n° **142** le logarithme de base b d'un nombre positif a *quelconque*, nous avons attribué un sens au symbole b^a pour toute valeur positive de b et pour toute valeur positive ou négative de α; nous avons en d'autres termes défini une *expression*, que nous convenons d'appeler « puissance d'exposant α du nombre b », que nous écrivons b^α, et qui a une valeur déterminée, variable en même temps que les valeurs de b et α ($b > 0$). Si nous nous reportons à la terminologie du § *4*, nous serons dès lors conduits à dire que la valeur de b^α est une *variable dépendante*, qui varie *en fonction* des variables b et α : b^α est une « fonction » des nombres b et α. Afin, cependant, de rappeler la différence qui sépare la fonction b^α des fonctions définies au § *4*, nous dirons que la fonction b^α est une fonction *transcendante* [le mot *transcendant* s'opposant à *algébrique* [1]].

[1] La définition du mot *transcendant* est purement négative : est transcendante une quantité ou une fonction dont la valeur ou l'expression ne peut pas être définie par la combinaison d'opérations arithmétiques ou algébriques connues [cf. *supra*, n° 68, 350]. « Les fonctions, dit Euler (*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748, ch. I) — se divisent en algébriques et transcendantes ; les premières se forment par les opérations de l'algèbre, et on obtient les secondes en faisant entrer dans leur composition des opérations transcendantes ». Nous préciserons plus loin cette distinction en étendant et complétant la définition de la classe des fonctions algébriques dans laquelle nous ferons rentrer, non seulement les fonctions

Ici comme au § *4*, il nous est loisible d'étudier l'expression b^α pour des valeurs variables des deux nombres b et α ou, au contraire, de laisser fixe (déterminé) un de ces nombres [1] et de considérer b^α comme fonction du seul nombre b ou du seul nombre α. En particulier, si nous donnons à b une valeur positive déterminée, l'expression b^α considérée comme fonction du nombre positif ou négatif α sera appelée *fonction* (transcendante) *exponentielle* [2].

378. — Les remarques que nous venons de faire ne s'appliquent pas seulement à l'expression b^α, mais en général, aux divers symboles que nous avons définis aux §§ *9* et *10* du chapitre II de notre premier livre pour représenter certaines grandeurs « suppléantes » correspondant à des grandeurs variables.

Ainsi le symbole $\log_b a$ peut être considéré (pour une valeur déterminée, positive, de b) comme une *expression* dont la valeur est une *fonction transcendante* du nombre variable a : cette fonction a reçu le nom de *fonction logarithmique*.

De même les symboles $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$, $\sin \frac{a}{2}$, $\sin 2a$, etc. peuvent être considérés comme des expressions dont les valeurs sont des *fonctions transcendantes* de a : ces fonctions portent le nom spécial de *fonctions trigonométriques*.

étudiées au § 4 de ce chapitre, mais aussi les fonctions implicites définies par des équations algébriques (*vide*, chap. II, § 1). Il est bon d'observer que lorsqu'on parle, non pas de fonction, mais d'expression algébrique, on n'attache pas toujours à cette formule un sens restrictif spécial; il pourra arriver qu'on l'applique, par extension, à un symbole tel que b^α aussi bien qu'aux expressions de *fonctions algébriques*. Cependant lorsque nous voudrons établir une distinction entre les fonctions transcendantes et les fonctions algébriques, nous dirons que leurs expressions sont, les unes *transcendantes*, les autres *algébriques proprement dites*.

[1] Si α était remplacé par un nombre arithmétique rationnel, la fonction considérée serait une fonction algébrique ordinaire de b au sens du § 4.

[2] L'expression *quantitas exponentialis* a été employée par LEIBNIZ et par les BERNOUILLI. Jean Bernouilli avait dit d'abord « *quantitas percurrens* », et il expose ainsi le point de vue qui justifiait cette dénomination : « Exponentialem igitur quantitatem concipiebam ut medium quid inter algebraicam et transcendentem; accedit enim ad algebraicam, eo quod terminis finitis, utut indeterminatis, constat; ad transcendentem vero, quod nulla constructione algebraica exhiberi potest » (*Principia calculi exponentialium seu percurrentium*, ap. *Acta eruditorum*, Leipzig, mars 1697; *Œuv. de J. Bernouilli*, I, p. 181 sqq.).

D'une manière générale, supposons qu'aux signes qui servent à former les expressions algébriques ordinaires, nous adjoignions les symboles introduits par la notation exponentielle (n° **137**), le symbole *log* et les symboles trigonométriques *sin*, *cos*, etc.. A l'aide de ces symboles, de nombres arithmétiques, et de lettres a, b, c, ... nous pouvons former des expressions [1] analogues aux expressions algébriques du § *2* mais plus nombreuses; nous dirons que les valeurs de ces *expressions* (variables en même temps que les lettres a, b, c, ...) sont des *fonctions transcendantes* [2].

379. Fonctions algébriques ou transcendantes de x. — Désignons par $f(x)$ une expression transcendante [3] dépendant d'une quantité variable x et de lettres a, b, c, ... représentant des nombres fixes (supposés connus), La valeur de cette expression sera une fonction de x, mais il importe de remarquer qu'elle n'est pas nécessairement une « fonction transcendante de x ». Si, par exemple, f est un polynome en x, dont les coefficients sont des expressions transcendantes dépendant des lettres a, b, c, ..., la fonction $f(x)$ ne doit pas être regardée comme transcendante : la fonction n'est *transcendante par rapport à* x que si, lorsqu'on suppose connues les quantités a, b, c, ..., la valeur de $f(x)$ ne peut pas se déduire de celle de x au moyen d'opérations algébriques (mais seulement au moyen d'opérations dont certaines sont exponentielles ou trigonométriques, voir la note 1, ci-dessous).

Lorsque la fonction $f(x)$ n'est pas transcendante par rapport à x, elle est dite *algébrique*. On peut en ce cas lui appliquer, *sans exception*, *toutes* les propositions établies aux § *4* et suivants au sujet des fonctions $f(x)$ d'une variable x. Ces propositions, en effet, sont indépendantes de la façon dont $f(x)$ est fonction des lettres qui représentent des quantités fixes.

(1) Nous dirons que ces expressions sont obtenues en effectuant une combinaison d'*opérations* algébriques, exponentielles et trigonométriques.

(2) Ainsi les expressions $\cos(a+b)$, $\cos^2\sqrt{a+b^2}$ c'est-à-dire $(\cos\sqrt{a+b^2})^2$, $\log.(b+a)$, etc. sont des fonctions de a et de b ou d'un seul de ces nombres si l'autre a une valeur fixe (déterminée).

(3) Voir la fin de la note 1, p. 2.

Dans le cas où $f(x)$ est transcendante, nous pourrons encore étendre à cette fonction les diverses considérations d'ordre général que nous avons développées aux §§ *3-9*, en exceptant seulement les définitions et propositions où il était spécifié que $f(x)$ avait une forme algébrique particulière (polynome en x, ou fonction rationnelle, etc.).

380. Equations transcendantes. — Appelons $f(x)$ une fonction qui soit effectivement fonction transcendante de x. L'égalité

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

est alors dite être une *équation transcendante* [1] par rapport à l'inconnue x. La valeur, ou les valeurs (exprimées *en fonction* [2] des lettres a, b, c, ..., figurent dans l'équation), qu'il faut donner à l'inconnue x pour que l'expression f prenne la valeur o, sont appelées « racines » ou « solutions » de l'équation (on dit que ces valeurs satisfont à l'équation, cf. p. 314). Une équation non-transcendante est dite *algébrique*.

Il n'est en général pas possible de calculer effectivement les racines d'une équation transcendante de la forme (1), c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'expressions algébriques ou transcendantes, composées avec des signes connus et avec les lettres a, b, c, ..., qui soient égales à ces racines (*comparer* n° **350**). On devra se contenter de déterminer — par des procédés dont nous ne nous occuperons pas, et à l'aide de tables logarithmiques ou trigonométriques (n°s **145** et **158**) — des valeurs approchées (arbitrairement approchées) des racines de l'équation.

Cependant, il arrivera dans certains cas particuliers que l'équation (1) puisse être ramenée à une équation algébrique ordinaire

[1] Toutes les définitions et règles générales du § 5 relatives aux transformations des équations, au changement d'inconnues, etc., s'appliquent manifestement aux équations transcendantes comme aux équations algébriques. *Exemples* : L'équation $2x - \log. x - 3 = 0$ est une équation transcendante ; posons $\log. x = t$ ou $x = e^t$; en effectuant ce changement d'inconnue, nous obtenons l'équation $2e^t - t - 3 = 0$, *équivalente* à l'équation en x. — Les équations $\dfrac{3x + e^x + 2}{\cos^2 x} = 0$ et $3x^2 + e^x + 2 = 0$ sont *équivalentes* ; etc.

[2] C'est-à-dire : *sous forme de fonction de*, voir n° 318.

au moyen d'un *changement d'inconnue* (n° **330**). Cette circonstance se présentera, par exemple, quand l'équation (1), outre les nombres connus ou considérés comme tels, ne contiendra que des *lignes trigonométriques* (**155**) du nombre inconnu x, ou des lignes trigonométriques de x et de nombres qui sont en relation simple avec x, comme $2x$ ou $\frac{x}{2}$ ou $x + \alpha$ (α étant connu). Nous étudierons tout à l'heure, à titre d'exemple, quelques équations de ce type. Auparavant il nous faut revenir un instant sur le calcul trigonométrique dont nous avons plus haut posé les bases (*Premier Livre*, Chap. II, § *10*) et montrer comment ce calcul donne lieu, comme le calcul algébrique proprement dit, à des transformations variées qui se traduisent par autant d'*identités*.

381. Rappel des formules trigonométriques fondamentales. Addition et soustraction des arcs. — De la définition des lignes trigonométriques nous avons immédiatement déduit les formules suivantes où a désigne un arc ou abcisse curviligne quelconque [1] :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \qquad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \sin(-a) = -\sin a, & \sin(\pi - a) = \sin a, & \sin(\pi + a) = -\sin a \\ \cos(-a) = \cos a, & \cos(\pi - a) = -\cos a, & \cos(\pi + a) = -\cos a \\ \operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a, & \operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg} a, & \operatorname{tg}(\pi + a) = \operatorname{tg} a \\ \multicolumn{3}{c}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a.} \end{array}\right. \tag{3}$$

Nous avons déjà donné, d'autre part, les identités relatives à l'addition des arcs :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(a + b) = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b \\ \operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Il convient d'observer ici que, si l'on suppose démontrée la pre-

[1] Rappelons aussi, que, quels que soient le nombre relatif a et l'entier *positif ou négatif*, k, on a

$$\sin a = \sin(a + 2k\pi), \qquad \cos a = \cos(a + 2k\pi), \qquad \operatorname{tang} a = \operatorname{tang}(a + 2k\pi)$$

mière de ces trois relations (4), les deux autres en résultent immédiatement en vertu des formules (2) et (3), car on a, par exemple

$$\sin(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] \text{ ou } \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + (-b)\right];$$

donc

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b)$$
$$= \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b$$

Les identités relatives à la soustraction des arcs se déduisent de la même manière des identités (4) : car, par exemple :

$$\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = \cos a \,.\, \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$
$$= \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b;$$

on obtient pareillement

$$\sin(a-b) = \sin a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \sin b$$
$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}.$$

Les formules (3), elles-mêmes, pourraient d'ailleurs inversement être considérées comme des conséquences des formules (4), car ces dernières formules montrent par exemple que

$$\sin(-a) \text{ ou } \sin(0-a) = \sin 0 \,.\cos a - \cos 0 \,.\sin a = -\sin a, \text{ etc.}$$

382. Multiplication d'un arc par un nombre entier. — Si nous y donnons à b la valeur a, les formules (4) nous font connaître les lignes trigonométriques de l'arc $2a$, c'est-à-dire de l'*arc a multiplié par* 2 ; nous avons :

$$(5)\quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a;\ \sin 2a = 2\sin a.\cos a;\ \operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

Si maintenant, nous faisons dans les formules (4) $b = 2a$, et remplaçons $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\operatorname{tg} 2a$ par les valeurs (5), nous obtenons :

$$\cos 3a = \cos a.\cos 2a - \sin a \sin 2a = \cos^3 a - 3\sin^2 a.\cos a,$$

et ainsi de suite.

Les formules ainsi obtenues [qui donnent les expressions de

cos na, sin na, tg na pour toute valeur entière positive de n] peuvent d'ailleurs être transformées de plusieurs manières. Ainsi, en tenant compte de la relation $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, on pourra déduire de (5) les identités

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \quad ou \quad = 2\cos^2 a - 1,$$

que l'on peut écrire sous les formes

$$(6) \qquad \sin^2 a = \frac{1}{2}[1 - \cos 2a]; \qquad \cos^2 a = \frac{1}{2}[1 + \cos 2a].$$

Ces formules peuvent être généralisées en les suivantes (valables pour toute valeur entière positive de l'exposant n), que nous établirons au chap. v du présent Livre :

$$\cos^n a = \frac{\cos na + n\cos(n-2)a + C_n^2\cos(n-4)a + C_n^3\cos(n-6)a + \ldots}{2^{n-1}}$$

les coefficients C_n^2, C_n^3, ... étant ceux que nous avons déjà rencontrés dans le développement du binome de Newton (n° **298**).

Si n est *impair*, le dernier terme de la somme figurant au numérateur sera $C_n^{\frac{n-1}{2}} \cos a$. Si n est pair, on arrêtera la somme au terme $C_n^{\frac{n}{2}-1} \cos 2a$ et on devra y ajouter le *terme complémentaire* $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}$. On établira une formule semblale pour le *sinus* :

$$\sin^n a = \frac{\cos na - \cos(n-2)a + C_n^2\cos(n-4)a - \ldots}{2^{n-1}}.$$

383. Transformations des sommes et produits de lignes trigonométriques. — Les transformations qui suivent ont pour objet de transformer un produit de lignes trigonométriques en une somme ou inversement. Elles donnent lieu (nous le verrons plus loin) à de nombreuses applications, de même que les formules (6) qui en sont un cas particulier [1].

En additionnant les expressions de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$, puis en soustrayant l'une de l'autre

[1] On obtient les formules (6) en faisant $b = a$ dans la seconde et dans la quatrième formule (7).

les expressions de sin $(a - b)$ et sin $(a + b)$, puis de cos $(a - b)$ et cos $(a + b)$, on obtient (toutes réductions faites) les formules suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} 2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b) \\ 2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b) \\ 2 \sin b \cos a = \sin(a + b) - \sin(a - b) \\ 2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b) \end{cases}$$

Désignons maintenant par p et q la somme $a + b$ et la différence $a - b$; nous aurons (voir p. 360, note 1) $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$ et pourrons écrire les formules (7) sous la nouvelle forme suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2}. \end{cases}$$

384. Expressions des lignes trigonométriques de l'arc a en fonction de tg $\frac{a}{2}$. — Nous avons vu que les lignes trigonométriques d'un même arc a sont fonctions les unes des autres; en d'autres termes toutes les lignes trigonométriques de a peuvent être exprimées sous forme de *fonctions* de l'une d'entre elles, par exemple :

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}, \qquad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}.$$

Mais ces fonctions sont en général *irrationnelles* (leurs expressions contiennent des radicaux). De là l'intérêt que présente la circonstance suivante : *les trois lignes trigonométriques fondamentales de l'arc a sont des fonctions rationnelles très simples de la tangente de l'arc* $\frac{a}{2}$.

Nous avons en effet [d'après (5)]

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}; \quad \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Divisons les deux seconds membres par l'expression $\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}$ qui *est égale à l'unité*, et posons, pour simplifier, $\frac{a}{2} = b$: il vient :

$$\sin a = \frac{2 \sin b \cos b}{\sin^2 b + \cos^2 b}; \quad \cos a = \frac{\cos^2 b - \sin^2 b}{\sin^2 b + \cos^2 b};$$

divisons encore chacun des deux termes de chacune de ces fractions par la même quantité $\cos^2 b$ [ce qui ne change pas les valeurs des factions]; nous obtenons

$$\sin a = \frac{2 \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 + \dfrac{\sin^2 b}{\cos^2 b}}; \cos a = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 b}{\cos^2 b}}{1 + \dfrac{\sin^2 b}{\cos^2 b}}$$

mais le rapport $\frac{\sin b}{\cos b}$ n'est autre chose tg b; d'où les formules

$$(9) \quad \sin a = \frac{2 \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg}^2 b}; \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2 b}; \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg}^2 b}.$$

385. Equations trigonométriques. — Après avoir signalé quelques-unes des *transformations* les plus importantes de la trigonométrie, voyons comment il sera possible de résoudre les équations transcendantes les plus simples où entrent des lignes trigonométriques (cf. n° **380**).

Cherchons, par exemple, à résoudre l'équation

$$(10) \qquad a \sin x + b \cos x = c,$$

où a, b, c sont trois nombres connus ; il est facile de transformer cette équation en une équation algébrique ordinaire en faisant le changement d'inconnue $\sin x = u$.

Nous aurons

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - u^2},$$

et l'équation (10) deviendra,

$$au + b\sqrt{1 - u^2} = c\,;$$

on peut l'écrire

$$b \,.\, \sqrt{1 - u^2} = c - au,$$

ou, en élevant au carré les deux membres :

$$b^2(1 - u^2) = c^2 - 2acu + a^2u^2,$$

ce qui est, par rapport à u une équation du second degré. Mais nous pouvons aussi, pour résoudre l'équation (10), employer une méthode purement trigonométrique qui nous permettra de *discuter* très simplement les solutions de l'équation, et aussi d'en calculer facilement la valeur numérique (si les valeurs numériques de a, b, c, sont données) au moyen d'une table trigonométrique.

Nous supposerons que a et b sont non-nuls [1].

Déterminons d'abord un arc φ tel que tang $\varphi = \frac{b}{a}$; cela est possible quels que soient a et b ; car quelle que soit la valeur de $\frac{b}{a}$, il existe toujours [2] des arcs φ dont la tangente a cette valeur (on trouvera les valeurs de ces arcs dans une table, si a et b sont connus).

Déterminons ensuite le nombre r égal à $\frac{a}{\cos\varphi}$. Nous aurons $r\cos\varphi = a$, donc $r\sin\varphi = a \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi = b$, et par conséquent :

$$a\sin x + b\cos x = r(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) = r\sin(\varphi + x).$$

L'équation (10) se réduit donc à

$$r\sin(\varphi + x) = c. \tag{11}$$

Elle aura des solutions si $-1 < \frac{c}{r} < 1$; en effet dans ce cas

[1] a et b ne peuvent être tous deux nuls, car si $a = b = 0$, il n'y a pas d'équation ; si a ou b est nul, l'équation se réduit à $a\sin x = c$, ou $b\cos x = c$, et se résout immédiatement au moyen d'une table donnant les arcs dont les sinus ou cosinus sont connus.

[2] Cela résulte immédiatement de la définition de la *tangente* qui prend toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$ lorsque l'arc prend toutes les valeurs comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (voir nos 152, 157).

(*voir* n° **154**) il existe une infinité d'arcs $\varphi + x$ ayant pour sinus le nombre $\frac{c}{r}$.

386. Autres exemples d'équations trigonométriques. — Considérons l'équation

$$(12) \qquad a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x + c = 0, \qquad (a, b, c \text{ connus}).$$

Pour la résoudre, remarquons qu'elle peut s'écrire (d'après la définition de tg x et cotg x) : $a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\sin x} + c = 0$, équation équivalente à

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \cos x \sin x = 0;$$

on aura donc, d'après les formules (6) et (5) [n° **382**] :

$$a \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{c}{2} \sin 2x = 0$$

ou

$$c \sin 2x + (b - a) \cos 2x + a + b = 0,$$

équation qui est du type (10) par rapport à l'inconnue $2x$ et se résout comme il a été dit plus haut.

On trouvera dans les traités de trigonométrie de nombreux exemples d'équations plus compliquées, que les *transformations* indiquées dans ce paragraphe permettent de ramener à des équations non transcendantes.

Considérons d'ailleurs une équation quelconque dont le premier membre soit un polynome en sin x, cos x, tg x, égalé à 0. En prenant comme inconnue auxiliaire $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ et remplaçant sin x, cos x, tg x par les expressions (9) du n° **384** [où l'on substitue x à u] nous serons ramenés à la résolution d'une équation algébrique dont l'inconnue sera u.

CHAPITRE II

CALCUL DES FONCTIONS

I. — *Étude des fonctions d'une variable.*

387. — La théorie des équations n'est qu'une application particulière d'une théorie plus étendue qui a pour objet l'étude générale des *fonctions* (n° **318**). Chercher, en effet, pour différentes valeurs de a, les valeurs de x qui sont racines de l'équation $f(x) = a$, ou bien se proposer d'étudier les valeurs de y [définies par l'égalité $y = f(x)$], qui correspondent aux différentes valeurs de x, ce sont là deux problèmes équivalents. Cependant l'état d'esprit du mathématicien qui entreprend d'étudier les fonctions pour elles-mêmes est quelque chose de nouveau en algèbre : il ne s'agit plus de combiner des formules, mais d'*analyser à priori*, afin d'en déterminer la signification et les lois, les divers modes de correspondance qui peuvent être établis entre des quantités variant simultanément. Nous reviendrons plus loin (*Troisième Livre*) sur cette étude analytique de la notion de fonction, qui resta fort longtemps vague et imprécise, et ne devint consciente qu'au XIXe siècle. Pour le moment, nous ne nous occuperons que de la technique des calculs relatifs aux fonctions ainsi que des quelques propositions d'ordre général qu'il est nécessaire d'établir pour étayer ces calculs.

C'est à l'occasion des problèmes posés par la géométrie et la mécanique [1] que l'idée de fonction fit son apparition au XVIIe siècle,

[1] Les premières fonctions que NEWTON étudia se présentèrent dans des problèmes de mécanique : c'étaient des quantités variant en fonction du *temps* (lequel, en mécanique, est considéré comme un nombre positif,

dans les écrits de Descartes, Leibniz, Newton. C'est pourquo l'interprétation géométrique de la théorie des fonctions fut originairement confondue avec la théorie elle-même. De nos jours encore, la figure géométrique est, pour la plupart d'entre nous, le vêtement obligé des relations fonctionnelles abstraites que notre esprit ne parviendrait pas à saisir directement. Le lecteur peu familiarisé avec la notion de fonction est donc invité à s'aider du chapitre III de ce *Livre* s'il veut suivre facilement le présent paragraphe et les suivants. Comme nous l'avons annoncé, nous irons ici droit au but, renvoyant à plus tard tout ce qui a trait à l'évolution historique de la fonction.

388. Fonctions algébriques d'une variable x. — Soit $f(x)$ une expression qui est algébrique au sens des nos **278** et **379** par rapport à x, et dépend d'ailleurs, d'une manière quelconque, de nombres connus ou de lettres représentant des nombres connus : cette expression est une *fonction algébrique* de x,

$$y = f(x).$$

Dans l'expression $f(x)$, x est la « variable » ; les nombres connus (ou fixes) qui ne varient pas avec x, et toutes les expressions formées avec ces nombres, sont appelés *constantes*.

Nous avons défini aux nos **311** et **315** les fonctions $f(x)$ les plus simples : fontions *entières* ou *polynomales* [polynomes en x dont

nombre de minutes ou de secondes ou de fractions de secondes écoulées depuis un instant initial donné, cf. *infra*, n° 396 et *Trois. Liv.*). Mais NEWTON observa tout de suite que tous les résultats qu'il obtenait restent exacts dans le cas où la *variable indépendante* n'est plus le *temps* (qui intervient dans les phénomènes physiques), mais bien une quantité variable quelconque dont dépendent d'autres quantités variables (cf. ch. I, § 4). « Idcirco in iis quæ sequuntur, tempus *formaliter* non considero, sed suppono quod una ex propositis quantitatibus homogena cum aliis crescat æquabili Fluxu, ad quam ceteræ tanquam ad Tempus referantur, quæ ideo per Analogiam non inconcinne dici potest *Tempus*. Quoties igitur vox *tempus* in sequentibus invenietur, .. hoc verbum sumendum est, non quasi Tempus intellexissem in sua *formali* significatione, sed tanquam significans quantitatem illam à Tempore diversam, cujus æquabili Incremento vel Fluxu Tempus exponitur et mensuratur » (*Methodus fluxionum*, apud *Opuscula Mathemat.*, t. I, 1744, p. 54).

les coefficients sont des constantes], et *fonctions rationnelles* [rapports (quotients) de polynomes en x, cf. **374**].

Considérons d'une manière générale une expression où n'entrent, en fait d'opérations effectuées sur x (*voir* **379**) que des additions, soustractions, multiplications et divisions : il résulte des règles de calcul données au § *9* du chapitre I que cette expression peut toujours être mise sous forme d'un quotient de polynomes (*comparer* n° **376**) : *elle définit donc une fonction rationnelle.*

Si par contre il entre, dans $f(x)$, parmi les opérations effectuées sur la variable, des extractions de racines (élévations à des puissances fractionnaires), la fonction $y = f(x)$ est une *fonction algébrique non-rationnelle* [*exemple* : la fonction $y = \sqrt{x^2 + 1}$].

389. Conventions relatives aux fonctions non-rationnelles. — Nous avons fait au n° **136** la convention suivante : *par le symbole* $a^{\frac{1}{q}}$, ou $\sqrt[q]{a}$ (*où* q *est un entier positif*), *est désignée celle des racines d'ordre* q *du nombre* a *qui a le même signe que* a.

Cette convention, fort naturelle dans le cas où a est un nombre déterminé et connu, n'a plus de raison d'être si la quantité sous le radical est une fonction d'une variable x ; une telle quantité, en effet, n'a pas de signe déterminé quand x varie. C'est pourquoi, lorsque nous écrirons (sans plus) le symbole $\sqrt[q]{f(x)}$ ou $[f(x)]^{\frac{1}{q}}$, nous l'interpréterons désormais comme pouvant représenter à volonté (si q est pair) une racine positive ou une racine négative.

Lorsque nous écrirons, d'autre part, une identité où entre l'expression $\sqrt[q]{f(x)}$, il sera entendu que l'identité est valable quelle que soit celle des racines q^{mes} de $f(x)$ que l'on y considère (à condition, bien entendu, que, dans une même identité où l'expression figure plusieurs fois, on ne lui attribue jamais qu'une seule valeur pour une même valeur de x).

Quant au symbole [1] $\pm\sqrt[q]{f(x)}$, nous l'emploierons quand nous désirerons spécifier que nous considérons *à la fois* la racine positive et la racine négative de $f(x)$.

390. Fonctions algébriques explicites ou implicites. — En combinant les cinq opérations fondamentales, nous pouvons

[1] Le symbole $\pm$ se lit *plus ou moins* (cf. n° 338).

construire des expressions $f(x)$, et par conséquent des fonctions algébriques, en nombre infini et d'une complexité croissante. Ce n'est point là d'ailleurs le seul moyen dont nous disposions pour former des fonctions, et la théorie des équations nous en suggère aussitôt un autre.

Appelant $F(x,y)$ une fonction de x et y, écrivons l'égalité

$$F(x,y) = 0. \tag{1}$$

Pour chaque valeur de x, cette égalité est une équation en y que nous supposerons *pourvue* (du moins pour certaines valeurs de x) *d'une racine* au moins; cette racine est une valeur de y, déterminée par la valeur donnée à x, et qui varie lorsque cette valeur varie : c'est donc une « *fonction* » de x. Ainsi la relation

$$(\sqrt{x} + 1)y^2 - 2xy + 3 = 0,$$

lorsqu'on la résout par rapport à l'inconnue y, définit les fonctions

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 3(\sqrt{x} + 1)}}{\sqrt{x} + 1}.$$

Lorsqu'une fonction est définie par l'égalité $y = f(x)$, où f est une expression dépendant de x, nous dirons que cette fonction est définie *explicitement*. Une fonction définie par une égalité telle que (1) est dite, par contre : *fonction définie implicitement*, ou *fonction définie par une « relation implicite »*, ou simplement *fonction implicite*.

On appelle, d'une manière générale, « fonction algébrique de x » toute fonction (explicite ou implicite) définie au moyen d'une égalité qui est formée d'expressions algébriques proprement dites (voir la note 1, de la p. 372) [1]. Il importe de remarquer qu'en parlant ainsi, on étend le sens que nous avons primitivement attribué au mot « fonction ». Au § 4 du chapitre 1, en effet, nous n'avons défini comme telles que les *fonctions* qui sont écrites ou *peuvent* [2]

[1] On démontre d'ailleurs qu'il est possible de définir une quelconque de ces fonctions par une relation implicite $P(x, y) = 0$ dont le premier membre est un polynome en x et y. Cela revient à dire que l'on peut toujours transformer l'équation $F(x, y) = 0$ en une équation équivalente dont le premier membre est un polynome. Cf. p. 326, note 1, et *infra*.

[2] Ces deux hypothèses sont équivalentes puisque la fonction est, par définition, indépendante de l'expression qui la représente (ch. 1, § 4).

être écrites sous forme explicite. Or il est clair que toute fonction implicite ne peut pas être écrite explicitement [1] : si, par exemple, la relation (1) est une équation du cinquième degré en y, nous ne pouvons former aucune expression algébrique qui représente les racines (en fonction des coefficients de l'équation, et, par conséquent, de x).

Qu'une fonction, cependant, soit explicite ou implicite, nous pouvons toujours, lorsque nous en énonçons les propriétés, convenir de la représenter par le symbole $f(x)$, — étant bien entendu que $f(x)$ ne désignera une « expression algébrique » que si la fonction est définie explicitement.

391. Fonction définie dans un intervalle. — Des définitions données plus haut il résulte qu'une fonction est une *loi de correspondance*, suivant laquelle à des valeurs variables indépendantes x répondent des valeurs de la variable dépendante y.

Il se peut qu'une telle loi de correspondance soit définie pour *toute* valeur de x; ainsi l'égalité $y = 2x^2 - 1$ détermine la valeur de y quel que soit x. Mais il est possible aussi que la loi ne soit définie que lorsque x varie entre certaines limites : ainsi l'égalité $y = \sqrt{1 - x^2}$ ne donne une valeur [2] de y que si $-1 < x < 1$: pour les autres valeurs de x, en effet, la différence $1 - x^2$ est négative et n'a pas de racine carrée.

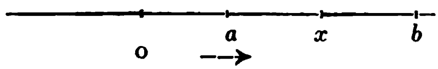
Ainsi donc, si nous voulons étudier une fonction en détail, il nous faut d'abord spécifier pour quelles valeurs de x elle est définie. Nons dirons qu'une fonction y est définie ou « existe » dans l'*intervalle* [3] a, b, si elle est définie pour $a < x < b$, c'est-à-dire pour x variant entre les valeurs a et b. Une valeur de x à partir de laquelle la fonction cesse d'exister (extrémité d'un intervalle où la fonction existe) sera appelée *valeur critique ou singulière*.

[1] *Vide supra*, n° 350.

[2] Elle en donne deux si l'on ne spécifie pas le signe dont on affecte le radical $\sqrt{1 - x^2}$.

[3] Lorsque nous disons simplement que nous *étudions* la fonction dans l'intervalle a, b, nous n'entendrons pas nécessairement dire par là que la fonction n'existe que dans cet intervalle : elle peut exister dans un intervalle plus grand que celui qu'il nous plaît de considérer.

392. — Le mot « intervalle » éveille dans notre esprit une image physique : c'est qu'en effet ce mot, comme la plupart de ceux qu'emploie la théorie des fonctions, fait allusion à la représentation géométrique des nombres-abscisses. Portons les valeurs de x, a et b, à partir d'une origine o, sur un axe orienté (n° **127**) : ces valeurs



sont alors des abscisses, et nous constatons que si $a < x < b$, l'extrémité de l'abscisse x est située *entre* les extrémités des abcisses a et b : c'est pourquoi nous disons que le point représentatif de x est « dans l'intervalle a, b ». C'est encore par allusion à la figuration des abscisses que nous dirons d'un nombre qu'il est « situé » dans un intervalle ou « au voisinage » d'un autre nombre. Ces locutions se comprennent d'elles-mêmes.

393. Fonction inverse. — Soit $y = f(x)$ une fonction de x. L'égalité qui la définit peut s'écrire $y - f(x) = 0$ et il nous est loisible, évidemment, de la considérer comme une relation implicite définissant x en fonction de y. Ainsi *la même loi de correspondance qui fait correspondre une valeur de y à une valeur de x, fait correspondre inversement une valeur de x à une valeur de y* : se donner une fonction y de x, c'est se donner du même coup une fonction [1] x de y : cette fonction est appelée « *fonction inverse* » de la fonction $f(x)$ ou $y(x)$.

Exemples. — La fonction inverse de la fonction $y = x^2$ est la fonction $x = \sqrt{y}$. La fonction inverse de $y = x^2 + x$ est

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4y}}{2}.$$

Remarque. — Il importe de se garder d'une confusion à laquelle pourrait prêter notre langage. On sait que l'on appelle *inverse* d'un nombre a le nombre $\frac{1}{a}$; on appellera, semblablement, *in-*

[1] La fonction inverse, naturellement, ne peut pas toujours être mise sous la forme : $x =$ expression algébrique de y (cf. n° 390).

verse d'une fonction $y(x)$ la fonction $\frac{1}{y(x)}$; ainsi l'*inverse d'une fonction* et sa *fonction inverse* sont choses tout à fait différentes.

394. Fonction de fonction. — Soit y une fonction de x et x fonction d'une variable indépendante z. Il est manifeste que la variable dépendante y se trouve être *fonction* de la variable z. En particulier, supposons que les fonctions y de x et x de z soient données explicitement : *si dans l'expression de y je remplace* [1] x *par son expression en fonction de z, j'obtiens l'expression de y en fonction de z.* Ainsi, les égalités $y = \sqrt{x}$, $x = \frac{z+1}{z+2}$ donnent l'égalité $y = \sqrt{\frac{z+1}{z+2}}$. Les fonctions définies de cette manière sont appelées « *fonctions de fonctions* », ou « *fonctions composées* ». Nous en rencontrerons de nombreux exemples dans la suite de cet ouvrage.

395. Branches de fonction. — Considérons l'égalité $y = f(x)$, où $f(x)$ est une expression algébrique quelconque contenant x. En vertu de cette égalité, et dans certains intervalles tout au moins (voir **391**), à chaque valeur de x correspond une valeur de y. Mais n'en correspond-il qu'une seule ?

La réponse variera suivant la forme de l'expression $f(x)$. Si $y = f(x)$ est une fonction rationnelle, il est certain qu'à une valeur de x ne correspond qu'une valeur de y. Au contraire l'égalité $y = \sqrt{x}$ qui définit y comme fonction de x pour $x > 0$ donne pour chaque valeur de x deux valeurs différentes de y, égales et de signes contraires. Nous dirons que nous avons là *deux « branches » différentes d'une même fonction*. La raison qui nous fait nous exprimer ainsi n'est point seulement que d'après le n° **389**, le symbole général $\sqrt{x}$ signifie, pour nous, à volonté $+\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x}$. Nous remarquons que les deux « branches de fonction » $y = +\sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$ sont fonctions inverses d'une même fonction, la la fonction $x = y^2$: c'est pourquoi nous regardons ces deux branches comme *appartenant* à une même fonction.

[1] L'opération ainsi effectuée est appelée « changement de variable algébrique ».

Ainsi, nous sommes avertis que l'égalité $y = f(x)$ peut définir une fonction pourvue de plusieurs branches. Mais nous n'allons point, pour l'instant, nous préoccuper de cette circonstance. En effet l'étude d'une fonction $y = f(x)$ est principalement l'étude de la variation concomitante des variables x et y à partir de valeurs données : la variable x part de la valeur x_0, y part de la valeur y_0 [telle que $y_0 = f(x_0)$], et il s'agit de savoir comment varie y *à partir de* y_0 lorsque x varie *à partir de* x_0 ; la variable dépendante y peut n'être qu'une branche de fonction, mais cette branche est en tout cas déterminée d'une manière unique (du moins dans un certain intervalle contenant x_0) par les valeurs x_0, y_0 d'où nous partons. Nous ne considérerons, jusqu'à nouvel avis, *que des intervalles* où *il ne cesse pas d'en être ainsi*, c'est-à-dire des intervalles ne contenant aucune valeur de x pour laquelle plusieurs branches de la fonction peuvent venir se confondre (en prenant la même valeur). Il n'y aura dès lors aucune ambiguïté dans notre langage si nous disons « fonction » au lieu de « branche de fonction » en spécifiant que nous suivons la fonction, *au voisinage de* x_0, à partir des *valeurs initiales* x_0, y_0. La fonction sera dite *univoque* [ou *uniforme*] dans les intervalles dont nous venons de parler.

326. Continuité. — Les fonctions algébriques sont, en général (¹), *continues au voisinage de toute valeur x_0 de x pour laquelle elles existent*. Nous entendons dire par là que ces fonctions y de x satisfont aux conditions suivantes : 1° lorsque x (à partir de x_0), varie très peu, y (partant d'une valeur déterminée y_0) varie également très peu : 2° soit y_1 la valeur de y qui correspond à une valeur x_1 voisine de x_0 : y prend au moins une fois, pour x variant entre x_0 et x_1, chacune des valeurs comprises entre y_0 et y_1. Une comparaison va nous aider à comprendre ces énoncés. Imaginons que dans le cours d'une après-midi la température varie : nous pouvons alors considérer que la température à un instant quelconque est *déterminée* par l'heure qu'il est, c'est-à-dire par le temps écoulé depuis midi : elle se comporte comme si elle était *fonction* de l'heure. La température peut varier plus ou moins vite, mais nous admettons qu'elle se modifie d'une manière continue,

(¹) Voir le n° 399.

elle ne fait pas de sauts brusques (*natura non facit saltus*) ; ainsi, pendant un temps très court, par exemple $\frac{1}{1\,000}$ de seconde, la température varie très peu ; et, d'autre part, si d'un instant à un autre la température est montée de 15 degrés à 15,02 degrés, nous sommes certains qu'il y a eu au moins un instant intermédiaire où la température a été de 15,01.

La théorie de la figuration des fonctions, que nous exposerons au chapitre III, ramène la notion de continuité à une notion géométrique élémentaire et intuitive : celle de courbe continue, ou *courbe pouvant être tracée sur le papier d'un trait continu.*

Si nous voulons, par contre, rester placés au point de vue de l'arithmétique et de l'algèbre, nous ferons appel — afin de préciser et de rendre tout à fait rigoureure notre définition de la continuité — à la notion de *limite* que nous avons introduite au § *6* du *Premier Livre.*

Nous dirons que la fonction ou branche de fonction $y = f(x)$ est continue pour la valeur x_0 de x si, lorsque l'on donne à x une suite *quelconque* de valeurs (en nombre infini) $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, se rapprochant de plus en plus de x_0 et tendant vers la limite x_0, les valeurs correspondantes de y forment une suite *tendant vers une limite déterminée* (*et toujours la même*) y_0, égale à $f(x_0)$.

Ceci signifie, d'après la définition de la limite, que : *quel que soit le nombre donné, arbitrairement petit,* ε, *on peut trouver un nombre* α *assez petit pour que, si* $|x_n - x_0| < \alpha$ [ce qui équivaut à dire que $x_0 - \alpha < x_n < x_0 + \alpha$], *il en résulte* [1] l'inégalité : $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, ou : $y_0 - \varepsilon < f(x_n) < y_0 + \varepsilon$.

Lorsque cette circonstance se présente, on peut (sans spécifier quelle est la suite de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, convergeant vers x_0, que l'on donne à x) dire que y *tend vers la « limite »* y_0 *lorsque* x *tend vers* x_0.

Cette définition de la continuité, est conforme à celle que nous avons donnée plus haut. *Les diverses propriétés qui caractérisent les fonctions continues en peuvent être déduites* [2].

Cela établi, nous dirons qu'une fonction $y = f(x)$, définie

[1] Par $f(x_n)$, $f(x_0)$ nous désignerons les valeurs prises par f pour $x = x_n$ $x = x_0$.

[2] Voir *infra* p. 422, note 2 et *Trois. Liv.*, chap. III, § 1.

dans un certain intervalle a, b est *continue dans cet intervalle* si elle est continue *pour* toutes les valeurs de x comprises entre a et b.

397. Croissance et décroissance des variables. — Pour pouvoir parler de la continuité d'une fonction, il faut naturellement que nous fassions varier d'une manière continue la variable indépendante x. J'entends par là que, pour passer de la valeur x_0 à une valeur voisine $x_0 + h$, nous faisons traverser à x toutes les valeurs intermédiaires telles que $x_0 + \frac{h}{2}$, $x_0 + \frac{h}{3}$, etc. Le nombre h peut d'ailleurs être positif ou négatif : si $h > 0$, on a $x_0 + h > x_0$, et, de x_0 en $x_0 + h$, x va en *croissant* (croît) ; si $h < 0$, on a $x_0 + h < x_0$ et x va en *décroissant* (décroît) de x_0 en $x_0 + h$.

Cela posé, nous voyons que dire d'une fonction y de x qu'elle est continue, c'est dire que *y croît ou décroît d'une manière continue à partir de y_0 lorsque x croît ou décroît d'une manière continue.*

398. Pôles et infinis des fonctions. — Pour un esprit non prévenu, la notion de continuité est intimement liée à celle de fonction algébrique. Aussi ce que tout d'abord nous devons nous attacher à comprendre, ce n'est pas qu'il y ait des fonctions continues, c'est au contraire que la loi de continuité puisse souffrir des exceptions.

Ces exceptions existent. Elles se présentent, en particulier, pour les valeurs *isolées* de x pour lesquelles les fonctions algébriques ont une *valeur infinie*.

Considérons la fonction $y = \frac{1}{x}$. Cette fonction est bien déterminée pour toutes les valeurs positives ou négatives de x. Pour $x = 0$, elle n'a pas de valeur. En effet, lorsque x est positif et se rapproche de 0, la fraction $\frac{1}{x}$ (tout en restant positive) devient plus grande que les nombres les plus grands ; lorsque x est négatif et se rapproche de 0, la fraction est négative et sa valeur absolue devient, elle aussi, infiniment grande. Nous exprimons ces faits en disant que, lorsque x tend vers 0, *y devient infiniment grand positivement ou négativement suivant que x est positif ou né-*

gatif (1). Il y a, en ce cas, *discontinuité de la fonction pour* $x = 0$.

Afin de pouvoir regarder la correspondance entre x et y comme définie *quel que soit* x, nous conviendrons de dire que la valeur de y correspondant à $x = 0$ est l'*infini* et nous écrirons :

$$y = \infty \text{ (pour } x = 0).$$

La valeur $x = 0$, pour laquelle la fonction rationnelle $y = \frac{1}{x}$ est infinie et discontinue, est appelée « *pôle* » de cette fonction.

On constatera semblablement que les fonctions

$$\frac{1}{x-1}, \quad \frac{3x+1}{(x-1)^2}, \quad \frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)}, \text{ etc.}$$

sont infinies (2) et discontinues pour $x = 1$. La valeur $x = 1$ est un pôle pour chacune de ces fonctions.

D'une manière générale, pour la fonction rationnelle $y = \frac{P(x)}{R(x)}$ [P et R étant des polynomes en x], *toute valeur de x qui annule* R, *sans annuler* P, *rend y infini et est un « pôle »*.

Nous parviendrions à des constatations analogues si nous étudiions, au voisinage de la valeur $x = 0$, des fonctions non rationnelles telles que $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $y = \frac{ax+b}{x^{\frac{1}{3}}(cx+d)}$, qui deviennent infiniment grandes en valeur absolue lorsque x tend vers (se rapproche de) la valeur 0. Nous dirons que, pour ces fonctions, la valeur $x = 0$ est un « *infini* » (c'est-à-dire : une valeur pour laquelle $y = \infty$). [Jusqu'à nouvel avis, nous réserverons le nom de *pôle* aux « infinis » des fonctions rationnelles (3)].

(1) Remarquons en outre que, lorsque x traverse la valeur 0, en passant du signe — au signe +, y saute brusquement d'une valeur négative infiniment grande à une valeur positive infiniment grande, Nous dirons alors que *y saute de la valeur* $+\infty$ à la *valeur* $+\infty$. Les choses se passent autrement pour la fonction $y = \frac{1}{x^2}$ qui est toujours positive (cf. *infra* n° 593).

(2) Pour $x = 1$, les dénominateurs des fractions sont nuls tandis que les numérateurs ne le sont pas; et l'on vérifiera facilement que, pour x voisin de 1 et inférieur à 1, les fractions sont négatives tandis qu'elles sont positives pour x voisin de 1 et supérieur.

(3) Voir au *Trois. Liv.*, chap. IV la définition générale des pôles.

399. Continuité des fonctions algébriques. — Les *pôles* et *infinis* étant ainsi caractérisés, on peut affirmer que : *Dans tout intervalle où elle existe, est univoque, et conserve une valeur finie* (c'est-à-dire n'a point de *pôle* ou *infini*), *une fonction algébrique quelconque de la variable x est nécessairement continue.*

On a pu démontrer ce théorème en toute rigueur en partant de la définition algébrique de la continuité donnée au n° **396** [1]. Nous nous contentons, pour le moment, de l'énoncer.

400. Fonctions croissantes ou décroissantes. Maxima et minima. — Poursuivons l'étude générale de la fonction algébrique $y = f(x)$, ou [2] $y(x)$, au voisinage d'une valeur quelconque x_0 de x. De part et d'autre de x_0, nous imaginons que x varie dans un intervalle où la fonction est supposée être définie, univoque et continue, et nous examinons comment varie y.

Supposons que x, croissant d'une manière continue (voir n° **397**) passe d'une valeur inférieure à x_0 à une valeur supérieure : pendant ce temps, y croît ou décroît et passe par la valeur y_0 pour $x = x_0$: si y croît, nous dirons que la fonction est *croissante pour* $x = x_0$; si y décroît, nous dirons que la fonction est *décroissante* pour $x = x_0$. Une fonction *croissante* est donc caractérisée par cette circonstance qu'elle varie dans le même sens que x. Une fonction *décroissante*, au contraire, varie en sens inverse du sens de x.

Il peut arriver qu'une fonction, qui est croissante, au voisinage de x_0, dans un certain intervalle $x_1' < x < x_1$, cesse d'être croissante pour la valeur x_1 et décroisse dès que $x > x_1$: nous dirons

[1] Ce théorème s'applique aux fonctions implicites aussi bien qu'aux fonctions explicites. Par contre, les fonctions transcendantes définies au § 10 du chapitre I peuvent être discontinues tout en restant finies. Considérons par exemple la fonction $y = \sin \frac{1}{x}$. Posons $x = z^{-1}$, d'où $y = \sin z$. Etudier y, au voisinage de $x = 0$, revient à étudier $\sin z$ pour les grandes valeurs de z. Or nous savons que lorsque z augmente indéfiniment, $\sin z$ oscille entre la valeur -1 et $+1$ sans admettre aucune limite [on aura, par exemple, $\sin z = 0$ pour les valeurs arbitrairement grandes $z = k\pi$ (k entier), $\sin z = 1$ pour les valeurs $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entier), etc.].

[2] Je désigne la fonction ainsi pour abréger, cf. n° 307.

alors que, pour $x = x_1$ la fonction *passe par un maximum* : le maximum est la valeur y_1 que prend y pour $x = x_1$ (valeur supérieure à toutes celles que prend la fonction au voisinage de $x = x_1$). — Si, au contraire, la fonction est décroissante pour $x < x_1$ et croissante pour $x > x_1$, nous disons qu'elle *passe par un minimum* pour $x = x_1$. — Ainsi la fonction $y = 3x^2$ passe par un minimum (égal à o) pour $x = 0$, puisque cette fonction, égale à un carré positif, ne peut pas descendre au-dessous de o. La fonction $y = -3(x-1)^2 + 2$ passe, pour $x = 1$, par un maximum égal à 2.

401. Remarque. — Il est bon de remarquer qu'un *maximum* ou *minimum* de la fonction $y(x)$ est une valeur critique de la fonction inverse $x(y)$ [valeur à partir de laquelle la fonction cesse d'exister, voir **391**]. En effet, soit, par exemple, y_1 un maximum obtenu pour $x = x_1$. Pour les valeurs de y voisines de y_1 et *inférieures*, nous avons deux branches de la fonction $x(y)$, dont l'une a des valeurs inférieures, et l'autre des valeurs supérieures à x_1 ; mais nous ne rencontrons pas de valeurs de x correspondant aux valeurs de y supérieures à y_1 (et voisines de y), puisque y_1 est, par hypothèse, la plus grande valeur possible de y pour la branche de fonction considérée. — Pour la valeur critique $y = y_1$, nous avons deux *branches de fonction* $x(y)$ *confondues*.

Ainsi, la valeur $y = 0$ est critique pour la fonction $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$, inverse de $3x^2$; la valeur $y = 2$ est critique pour la fonction $x = 1 + \sqrt{\frac{2-y}{3}}$ [fonction inverse de $y = -3(x-1)^2 + 2$].

402 Remarque. — Au cas où l'on considérerait la fonction y dans un intervalle où elle n'est pas continue, il se pourrait que la fonction passât d'une grande valeur à une valeur plus petite sans pour cela présenter un maximum. Cette circonstance se présente pour une fonction telle que $\frac{-1}{x-x_0}$ dont la valeur x_0 est un pôle, et qui *saute* de $+\infty$ à $-\infty$; croissante (jusqu'à $+\infty$) pour $x < x_0$, elle est encore croissante (mais repart de la valeur négative $-\infty$) quand x dépasse x_0.

403. — Ces remarques faites, proposons-nous de poursuivre l'étude de la croissance ou de la décroissance d'une fonction algébrique. Pour faciliter cette étude, nous allons être amenés à définir une opération nouvelle, dont la portée est considérable : l'opération de la *dérivation.*

2. — *Dérivées*

404 Le rapport $\frac{k}{h}$. — Considérons [1] une fonction de x, que je désignerai par le symbole $y(x)$, qui soit égale à y_0 pour x égale à x_0, et univoque et continue au voisinage de x_0. Je suppose que je fasse varier x avec continuité à partir de x_0 (nos **397** sqq.) : cela revient à donner à x un certain *accroissement h* (*d'ailleurs positif ou négatif*) : la variable x, en d'autres termes, passe de la valeur x_0 à la valeur $x = x_0 + h$. Pendant ce temps, la variable y subit, elle aussi, un accroissement k, positif ou négatif : elle passe de la valeur y_0 à la valeur $y = y_0 + k$.

D'après le n° **400**, la fonction y est croissante ou décroissante au voisinage de x_0 suivant que les accroissements k et h sont de même signe ou de signes contraires, et, par conséquent, suivant que le rapport $\frac{k}{h}$ est positif ou négatif. Ainsi *le signe de ce rapport indique le sens de la variation de la fonction.* Ce n'est pas tout : la valeur absolue du rapport $\frac{k}{h}$ peut être considérée comme donnant la mesure de *la rapidité avec laquelle la fonction y est croissante ou décroissante lorsque x varie de x_0 à $x_0 + h$.* En effet, si ce rapport

[1] La notion de dérivée est, comme nous le verrons au chap. III, § 3, intimement liée à celle de tangente à une courbe, et c'est sous ce vêtement géométrique qu'elle apparut d'abord dans la science ; elle fut définitivement tirée au clair par Newton et Leibniz [voir *infra*, *Trois. Liv.*, chap. II]. C'est de l'œuvre de ce dernier géomètre que procède historiquement le calcul des dérivées tel que nous le pratiquons aujourd'hui : les règles principales en sont exposées dans le traité « *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* » qui fut publié dans les *Acta eruditorum* en 1684. Le mot *derivare* est introduit par Leibniz dans sa *Réponse à Newton de* 1677 (*Mathem. Werk.*, t. I, p. 154-62).

est très grand (en valeur absolue), c'est que l'accroissement de y est très grand par rapport à celui de x : donc la croissance ou la décroissance de y est très rapide. Si la valeur absolue de $\frac{k}{h}$ est très petite, la croissance ou décroissance de y est très lente. A un double point de vue donc, la connaissance du rapport $\frac{k}{h}$ nous donnerait, sur la variation de $y(x)$, d'utiles indications.

Mais ces indications n'auront évidemment un intérêt que si h (et, par conséquent, k, d'après le n° **396**) est très petit (positif ou négatif). En effet, si h n'est pas très petit, nous ne pouvons rien dire de précis sur la rapidité avec laquelle varie y dans l'intervalle x_0 à x_0+h, puisque cette rapidité est susceptible de varier elle-même quand x parcourt [1] l'intervalle. Ainsi, dans le cours d'une heure la rapidité d'un train peut changer bien des fois, et si, parce que le train a parcouru finalement 90 kilomètres, je dis qu'il a « fait du 90 à l'heure » je ne définis ainsi qu'une vitesse moyenne et fictive : tantôt, en réalité, le train a fait plus et tantôt moins. Pendant une durée très courte, au contraire, — par exemple un millième de seconde, — je puis admettre que la rapidité n'a pas le temps de changer, en sorte que l'espace parcouru par le train me donne bien une idée de sa vitesse effective. Plus l'intervalle h sera petit, plus le rapport $\frac{k}{h}$ indiquera avec exactitude la rapidité [2] de la variation de la fonction *au moment précis où x passe par la valeur x_0.*

405. — Supposons donc que nous considérions des accroisse-

[1] Sur cette assimilation d'une variable x à un point (extrémité d'une abscisse) mobile sur une droite, voir *supra* n° 392.

[2] C'est en recourant ainsi à la considération du mouvement que Newton définissait la dérivée, qu'il appelait *fluxion*. Considérant les quantités fonctions de x (qu'il appelait *fluentes*) comme des points mobiles (voir la note précédente) il en calculait les vitesses pour une variation *arbitrairement* petite (et, à la limite, *infiniment* petite) de la variable : « velocitates quibus singulæ Fluentes augentur per motum generantem (quas velocitates appello *Fluxiones*, aut simpliciter *velocitates* vel *celeritates*) exprimuntur eisdem litteris puncto auctis, sic $\dot{u}$, $\dot{x}$. $\dot{y}$ et $\dot{z}$ [*la variable indépendante était désignée par t*] » (*Methodus fluxionum*, Opuscula Mathem., p. 54. Cf. *supra*, p. 383, note 1). La notation que propose ici Newton n'a point passé dans l'usage. — Sur la définition rigoureuse de la vitesse, voir *Trois. Liv.*, fin du ch. II.

ments h et k de plus en plus et *arbitrairement* [1] petits : alors, dans la fraction $\frac{k}{h}$, les deux termes deviendront plus petits que n'importe quel nombre donné ; mais la fraction $\frac{k}{h}$ pourra, quant à elle, se rapprocher d'un nombre déterminé (ni infiniment petit, ni infiniment grand); et ce nombre, alors, « *limite de* $\frac{k}{h}$ *pour* $h = 0$ », sera la *mesure* de la vitesse de la variation de y. Comment le rapport $\frac{k}{h}$ est en effet susceptible d'avoir une limite, c'est ce dont nous nous rendrons facilement compte en remarquant que puisque y est fonction algébrique de x, l'accroissement k est lui-même fonction algébrique de h, et fonction égale à o pour $h = 0$: ainsi k est égal à une expression algébrique telle que par exemple : $k = 2h + 3h^2$ ou $k = \frac{2h}{1 + h^2}$, etc. Les valeurs de $\frac{k}{h}$ correspondant à ces exemples sont :

$$\frac{k}{h} = \frac{2h + 3h^2}{h} = 2 + 3h, \qquad \frac{k}{h} = \frac{\frac{2h}{1 + h^2}}{h} = \frac{2}{1 + h^2};$$

on voit que, lorsque h se rapproche de o, ces valeurs se rapprochent d'une valeur déterminée, 2, bien que la fraction $\frac{k}{h}$ dont les deux termes deviennent arbitrairement petits, tende à prendre (si on ne la simplifie pas) la forme dépourvue de sens $\frac{0}{0}$.

Lorsque la limite de $\frac{k}{h}$ existe [2], elle est appelée *dérivée de la fonction y pour* $x = x_0$. La valeur de la dérivée peut naturellement varier, et varie en général, avec la valeur de x_0 : elle est donc *fonction* de x_0.

406. Exemples de dérivées. — Considérons la fonction $y = x^2$ au voisinage d'une valeur quelconque x_0 de x. Pour $x = x_0$, nous avons $y = y_0 = x_0^2$. Pour $x = x_0 + h$, nous avons

$$y = y_0 + k = (x_0 + h)^2.$$

(1) Au sens de la page 55, note 1.
(2) Voir au n° 407 (*Remarque*) ce qu'il faut au juste entendre par là.

En conséquence :

$$k = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h^2; \qquad \frac{k}{h} = 2x_0 + h;$$

lorsque h tend vers o, le rapport $\frac{k}{h}$ admet la limite $2x_0$: cette limite est la dérivée de la fonction pour $x = x_0$. D'ailleurs x_0 est une valeur *quelconque* de x : nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *pour toute valeur de x, la fonction $y = x^2$ admet une dérivée égale à $2x$.*

Considérons la fonction $y = \sqrt{x}$ au voisinage de x_0. Nous avons

$$y_0 = \sqrt{x_0}, \quad y_0 + k = \sqrt{x_0 + h}, \quad k = \sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}$$

d'où l'on déduit (¹) (d'après le n° **303**) $k = \frac{h}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$.
Lorsque h tend vers o, le rapport $\frac{k}{h}$ admet une limite égale à $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Nous énoncerons donc le résultat suivant : *pour toute valeur de x, la fonction $y = \sqrt{x}$ admet* (ou *a*) *une dérivée égale à $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.*

407. Définition générale de la dérivée. Notations. — Nous avons vu comment on définit la dérivée pour une valeur x_0 de x; cette valeur étant quelconque, il est permis de la désigner par la lettre x, *sans indice*, ainsi que nous l'avons fait dans les deux énoncés donnés ci-dessus. On formule alors, d'ordinaire, la définition de la dérivée dans les termes et avec les notations suivantes :

Soit x une valeur quelconque de la variable indépendante (au voisinage de laquelle la fonction est supposée univoque et continue) et y la valeur correspondante de la fonction. A partir de la valeur x je donne à la variable indépendante un accroissement (positif ou négatif) égal à Δx : il en résulte pour y un accroissement Δy. Si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ admet une *limite* (et une limite unique) lorsque

(¹) On le voit en faisant $\alpha = x_0 + h$ et $\beta = x_0$ dans l'identité $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$ qui se déduit immédiatement des identités (XV) du n° 303.

Δx prend une suite quelconque de valeurs tendant vers o, cette limite est la *dérivée de la fonction pour la valeur x de la variable.*

Remarque. — Aux termes de cette définition, on suppose toujours, lorsqu'on déclare que la fonction admet une dérivée, que la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et la même *que l'accroissement Δx tende vers* o *par valeurs positives ou par valeurs négatives.*

On désigne généralement la dérivée de y par la lettre y' affectée d'un accent (*on lit* : *y prime*), ou par y'_x, l'indice indiquant la variable par rapport à laquelle est prise la dérivée : on l'écrit aussi [1] : $\frac{dy}{dx}$, symbole qui rappelle que la dérivée est obtenue en prenant le rapport de deux accroissements Δy, Δx que l'on fait tendre vers o.

Si l'on veut rappeler que les variables dépendantes y et y' sont fonctions de x, on peut, au lieu de y et y', écrire : $y(x)$ et $y'(x)$; ou bien, si l'on a posé $y = f(x)$, on écrira : $y' = f'(x)$.

408. Dérivées d'ordre supérieur. — La dérivée y', étant fonction de x, peut avoir elle même une dérivée : cette dérivée sera appelée « *dérivée seconde* » ou « *dérivée d'ordre* 2 » de la fonction y : on la représentera par le symbole [2] y'' [*y seconde*], ou par le symbole $\frac{d^2y}{dx^2}$, symbole dont la forme sera justifiée ultérieurement.

La dérivée de y'' (dérivée *troisième* ou *d'ordre trois*) s'écrit y''', ou $\frac{d^3y}{dx^3}$. La dérivée d'ordre 4 s'écrit $y^{(4)}$ ou $\frac{d^4y}{dx^4}$, et ainsi de suite.

Le calcul de la dérivée d'une fonction peut être considéré comme une *opération* effectuée sur l'expression de la fonction. Nous appellerons cette opération : *dérivation*.

409. Dérivée d'une constante. — Une constante est une quantité qui reste fixe lorsque x varie. Son accroissement est donc nul quels que soient x et Δx : j'en conclus que *sa dérivée est toujours nulle.*

(1) Ces notations — dont les très grands avantages apparaîtront dans la suite — sont, à quelques modifications près, celles qu'employait LEIBNIZ, et qu'il définit dans son traité des *Acta eruditorum*, 1684 (*vide supra*, p. 396, note 1).

(2) Si l'on a posé $y = y(x)$ ou $y = f(x)$, on pourra écrire $y'' = y''(x)$ ou $f''(x)$.

410. Dérivée d'une somme. — *La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées des termes de cette somme.* Supposons, en effet, que la fonction y de x soit la somme de plusieurs fonctions, par exemple (1) de deux fonctions u et v. Appelons Δy, Δu, Δv les accroissements subis par y, u, v, lorsque x s'accroît de Δx : nous avons évidemment :

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

L'égalité subsiste lorsque nous divisons les trois accroissements par Δx : cela *quelque petit que soit* Δx.

Si donc nous faisons tendre Δx vers o, nous avons :

$$\textit{limite de } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \textit{limite de } \frac{\Delta u}{\Delta x} + \textit{limite de } \frac{\Delta v}{\Delta x}, \quad \text{donc} \quad y' = u' + v'.$$

411. Dérivée d'un produit (2).— 1° *Le produit d'une fonction y par une constante a a pour dérivée le produit ay'.* En effet, lorsque x s'accroît de Δx et y de Δy, l'accroissement de ay est $a\Delta y$ et le rapport de cet accroissement à Δx est $a\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2° *La dérivée du produit uv de deux fonctions u et v est égale à* $u'v + v'u$.

En effet, posons $y = uv$ et appelons Δu, Δv, Δy, les accroissements de Δu, Δv, Δy correspondant à l'accroissement Δx de x. Nous aurons

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u . \Delta v;$$

donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

égalité qui subsiste lorsque Δx tend vers o, et qui donne (Δv devenant nul) :

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = vu' + uv'. \tag{1}$$

(1) La même démonstration s'applique à la somme d'un nombre quelconque de fonctions,

(2) Leibniz énonce ces règles sous une forme un peu différente en considérant, au lieu des *dérivées*, les *différentielles*, dont nous parlerons dans notre *Troisième Livre*, ch. II.

412. Dérivée logarithmique. — On appelle dérivée logarithmique d'une fonction y (*vide infra* **432**) le rapport $\frac{y'}{y}$. L'intérêt de cette expression tient au théorème suivant :

La dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques des facteurs du produit.

Considérons d'abord, en effet, le produit y des deux fateurs u et v. Nous tirons de l'égalité (1) [en en divisant les deux membres par y] : $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$. Considérons maintenant le produit $z = uvw$; posant $y = uv$, nous avons $z = yw$, $\frac{z'}{z} = \frac{y'}{y} + \frac{w'}{w}$; mais, d'après ce qui précède : $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$; donc $\frac{z'}{z} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$.

De proche en proche, nous démontrerons ainsi que le théorème est exact, quel que soit le nombre des facteurs du produit.

413. Dérivée d'une puissance entière de x. — Soit $y = x^m$ une puissance entière de x. La dérivée logarithmique de x^m est égale à m fois la dérivée logarithmique du facteur x : or cette dernière dérivée logarithmique n'est autre que $\frac{1}{x}$ puisque la dérivée de x est (¹) 1. Donc nous avons :

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{x}; \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{mx^m}{x} = mx^{m-1}.$$

Dérivée d'un polynome. — Un polynome étant une somme de puissances de x multipliées par des constantes, nous saurons calculer la dérivée d'un polynome. Ainsi la dérivée du polynome

$y = 3x^3 - x^2 + ax + 2b^2$ est $y' = 3.3x^2 - 2x + a = 9x^2 - 2x + a$.

414. Dérivée d'un quotient. — *La dérivée du quotient $\frac{u}{v}$ de deux fonctions de x est égal à $\frac{u'v - vu'}{v^2}$.*

En effet, lorsque x subit l'accroissement Δx, nous avons :

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v};$$

(¹) Le rapport de l'accroissement Δx de x à cet accroissement — même est égal à 1.

réduisant au même dénominateur, il vient :

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}.$$

Lorsque Δx tend vers o, le numérateur de la dernière fraction se rapproche de plus en plus de $vu' - uv'$, tandis que le dénominateur se rapproche de v^2; donc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ admet une limite qui est $\frac{vu' - uv'}{v^2}$.

415. Application. — Soit à calculer la dérivée de l'inverse d'une puissance entière, x^m, de x : nous poserons $u = 1$, $v = x^m$, d'où $u' = 0$, $v' = mx^{m-1}$, et nous aurons :

$$\text{dérivée de } \frac{1}{x^m} = \frac{-uv'}{v^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}}.$$

En introduisant des exposants négatifs (n° **137**), nous présenterons comme il suit ce résultat. Posons $m' = -m$ (m' est alors négatif) : nous avons $\frac{1}{x^m} = x^{-m} = x^{m'}$ et $\frac{1}{x^{m+1}} = x^{m'-1}$; nous constatons donc que *la dérivée de $x^{m'}$ est $m'x^{m'-1}$* : la règle qui donne cette dérivée est celle même qui donne la dérivée de x^m pour m entier positif.

Dérivée d'une fonction rationnelle. — Sachant calculer la dérivée d'un quotient et la dérivée d'un polynome quelconque, nous saurons calculer la dérivée d'une fonction rationnelle quelconque.

416. Dérivée d'une fonction inverse. — Soit y fonction de x; sa dérivée est la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δx et Δy tendent tous deux vers o. D'autre part, la dérivée de la fonction inverse (n° **393**) x de y est la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Mais, *quels que soient* Δx et Δy, on a $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$; cette égalité subsistant [1] lorsque Δx

[1] Les théorèmes généraux sur les limites que nous énoncerons en détail dans notre *Troisième Livre*, conduisent immédiatement à cette conclusion.

et Δy tendent vers o, il en résulte : *dérivée de x par rapport à la variable y = inverse de la dérivée de y par rapport à la variable x*, ce qu'on écrit (l'indice indiquant la variable indépendante, cf. n° **407**) :

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad \text{ou} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

C'est ainsi que (comme nous l'avons vu au n° **406**) la dérivée de la fonction $y = \sqrt{x}$ est l'inverse $\frac{1}{2y}$ de la dérivée de la fonction de y, $x = y^2$.

Soit à calculer, plus généralement, la dérivée de $y = x^{\frac{1}{m}}$, m étant un entier positif ou négatif. Cette fonction est fonction inverse de la fonction de y, $x = y^m$, dont la dérivée est $x'_y = my^{m-1}$ (n° **413** et n° **415**). Donc, on a

$$y'_x = \frac{1}{my^{m-1}} = \frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}.$$

417. Dérivée d'une fonction de fonction (fonction composée). — Soit y fonction de x, et x fonction de z. Nous avons dit (n° **394**) qu'en ce cas y peut être considérée à volonté comme fonction de x ou comme fonction de z. Nous aurons donc aussi à considérer deux dérivées de y : l'une, limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, est la *dérivée de y par rapport à la variable x*; nous l'écrirons y'_x ou $\frac{dy}{dx}$. L'autre dérivée, limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, est la *dérivée de y par rapport à z*; nous l'écrirons y'_z ou $\frac{dy}{dz}$. Quant à la variable x, qui est fonction de z, elle admet une dérivée par rapport à z, savoir x'_z ou $\frac{dx}{dz}$.

Cela posé, nous remarquons que, quels que soient Δz, Δx et Δy, nous avons

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z};$$

cette égalité subsistant lorsque les accroissements Δx, Δy, Δz tendent vers o, nous avons à la limite

$$y'_z = y'_x \cdot x'_z \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz},$$

égalité qui nous donne la *règle de dérivation d'une fonction de fonction* (*ou fonction composée*).

Application. — Soit à calculer la dérivée de $y = \sqrt{1 + x^2}$. Je pose $1 + x^2 = u$, et j'ai alors

$$y = \sqrt{u}, \text{ d'où } y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ (n° 406)}, \quad u'_x = \text{dérivée de } 1 + x^2 = 2x,$$

donc : $$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{2x}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

La même méthode permettra de calculer la dérivée d'une racine d'ordre quelconque portant sur un polynome en x ou sur une fonction rationnelle.

418. Dérivée d'une puissance rationnelle de x. — Considérons la fonction $y = x^{\frac{p}{q}}$, où p et q sont des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs. Pour calculer sa dérivée, nous poserons $x^{\frac{1}{q}} = u$. Nous aurons d'après les nos **413, 415, 416** :

$$y = u^p, \text{ d'où } y'_u = pu^{p-1}; \quad u = x^{\frac{1}{q}}, \text{ d'où } u'_x = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1};$$

donc $$y'_x = \frac{p}{q} u^{p-1} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Posant dès lors $\frac{p}{q} = m$, nous pourrons énoncer la proposition suivante : *Quel que soit le nombre rationel (positif ou négatif) m, la dérivée de x^m est toujours égale à mx^{m-1}.* Cette règle ne diffère pas de celle qui a été donnée au n° **413** pour m entier positif.

419. Signe de la dérivée. Maxima et minima. — Nous venons d'exposer les méthodes au moyen desquelles on calculera les dérivées des fonctions algébriques explicites. Il nous faut voir maintenant (ou commencer à voir) quel usage nous pourrons faire de ces dérivées.

Soit y une fonction univoque, continue, et admettant une dérivée continue dans un *intervalle* a, b (*vide* **391**).

Il résulte de la définition même de la dérivée (n° **407**) que si, pour $x = x_0$, la fonction y admet une dérivée *positive*, elle est *croissante* ; si elle admet une dérivée *négative* elle est *décroissante*.

Ainsi le signe de la dérivée fait connaître le sens de la variation de la fonction.

Supposons maintenant que, pour $x = x_1$, la fonction passe par un maximum (n° **400**) : elle cesse de croître pour décroître : donc la dérivée y', qui était positive (au voisinage de x_1) pour $x < x_1$, devient négative pour $x > x_1$, et comme y' varie d'une manière continue, cette fonction est nulle pour $x = x_1$. Réciproquement, si la dérivée y' est nulle pour $x = x_1$, et si elle passe du signe + au signe — lorsque x, en croissant, traverse la valeur x_1, nous sommes assurés que la fonction y présente un maximum.

Supposons au contraire que, pour $x = x_1$: la fonction passe par un minimum ; elle cesse de décroître pour croître ; donc la dérivée s'annule et passe (lorsque x passe de $x < x_1$ à $x > x_1$) du signe — au signe +. Réciproquement, si la dérivée se comporte ainsi, la valeur $x = x_1$ donne un minimum de la fonction [1].

Cela étant, il nous sera facile de déterminer le sens de la variation de la fonction $y(x)$ pour une valeur quelconque x_0 de x. Si la dérivée $y'(x_0)$ est positive, la fonction, avons nous dit, est croissante ; si $y'(x_0) < 0$, la fonction est décroissante. Dans le cas où $y'(x_0) = 0$, considérons la dérivée seconde, y'', pour la valeur x_0 de x. Si $y''(x_0) > 0$, la fonction $y'(x)$ est croissante pour $x = x_0$; donc lorsque x passe de $x < x_0$ à $x > x_0$, la dérivée y' (nulle pour $x = x_0$) passe du signe — au signe + : donc y présente un *minimum*. Si, au contraire, $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$, la fonction présente un *maximum*.

Remarque. — La règle ainsi formulée est en défaut si l'on a en même temps $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$. En ce cas la fonction y', nulle pour $x = x_0$, passe, pour cette valeur, par un maximum ou par un minimum, suivant que la dérivée seconde, y''', est négative ou positive (en $x = x_0$). Si y' passe par un maximum, cette fonction est positive de part et d'autre de x_0 ; donc la fonction y ne cesse pas de croître lorsque x traverse la valeur x_0. Si y' passe par un minimum, la fonction y ne cesse pas de décroître. Dans le cas,

[1] Sans nommer expressément la dérivée — qui n'avait point encore, de son temps, été définie et étudiée — FERMAT indique très exactement, dans un opuscule communiqué à DESCARTES en 1638, la marche du calcul qui conduit à la détermination des maxima et des minima [voir *infra*, p. 521, note 2].

où l'on aurait $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$, $y'''(x_0) = 0$, on ferait intervenir la dérivée d'ordre 4 et ainsi de suite [1].

420. Théorème des accroissements finis. — L'application que nous venons d'indiquer n'est pas la seule, loin de là, à laquelle donne lieu le calcul des dérivées. Nous allons voir, en effet, sans tarder que la notion de dérivée joue un rôle de premier ordre dans tous les problèmes essentiels de l'algèbre et de l'analyse. Mais, avant d'aller plus loin, faisons tout d'abord une remarque qui se rattache directement à la définition de la dérivée.

Nous avons dit que la dérivée mesure, en quelque manière, la vitesse de la variation de la fonction dans un intervalle $x_0 - h$, $x_0 + h$; mais ensuite nous avons restreint cet intervalle et, en faisant tendre h vers 0, nous l'avons rendu « infiniment petit ». Ainsi la connaissance de la valeur de la dérivée pour une valeur déterminée x_0 de x ne pourra, semble-t-il, rien nous apprendre à elle seule sur la variation de la fonction dans un intervalle fini (non infiniment petit) contenant x_0.

Non, sans doute, nous ne pourrons rien déduire de cette valeur, si nous choisissons au hasard l'intervalle et la valeur x_0. Mais nous pouvons démontrer la proposition suivante qui est, nous le verrons plus tard, grosse de conséquences : *Si $f(x)$ est dans l'intervalle a, b, une fonction continue pourvue d'une dérivée, il existe un nombre x_0 de l'intervalle tel que l'on a l'égalité*

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(x_0),$$

Ainsi le rapport, à l'accroissement $b - a$ de la variable, de l'accroissement correspondant de la fonction, est mesuré par la valeur prise par la dérivée en un point (au moins) intérieur à l'intervalle a, b.

[1] La discussion qui précède est faite dans l'hypothèse où la fonction $y(x)$ et sa dérivée, — la fonction $y' = f(x)$ — sont toutes deux univoques et continues au voisinage de la valeur x_0. Dans le cas où il n'en est pas ainsi, une étude spéciale est nécessaire pour voir comment se comporte la fonction. Ainsi la fonction $y = x\sqrt{x}$, dont la dérivée, égale à $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, s'annule pour $x = 0$, ne présente, pour cette valeur de x ni maximum, ni minimum, et n'est ni croissante, ni décroissante : elle cesse d'exister pour x négatif et la valeur $x = 0$ est pour elle une *valeur critique* au sens du n° 391.

Pour démontrer ce théorème, nous ferons d'abord la remarque suivante : *Si une fonction* $F(x)$, *univoque, continue et admettant une dérivée continue, dans l'intervalle* a, b, *s'annule pour* $x = a$ *et* $x = b$, *sa dérivée s'annule pour une valeur* x_0, *au moins, entre* a *et* b.

En effet [1], si $F(x)$ était constamment nulle lorsque x varie de a à b, cette fonction serait constante et sa dérivée serait nulle dans tout l'intervalle. Si $F(x)$ n'est pas constamment nulle, elle prend entre a et b des valeurs positives ou négatives. Admettons qu'elle prenne des valeurs positives : devant redescendre vers o, lorsque x s'approche de b, elle prend nécessairement [2], pour une valeur de x comprise entre a et b, une valeur positive plus grande que toutes les autres ; elle passe, en d'autres termes, par un *maximum*, auquel correspond une valeur nulle de la dérivée. Pareillement, si $F(x)$ prend des valeurs négatives entre a et b, cette fonction doit passer par un *minimum*. Dans les deux cas, $F'(x)$ est nulle pour une valeur x_0 comprise entre a et b.

Ceci dit, posons $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$, et considérons la fonction [3] de x

$$F(x) = f(x) - f(a) - m(x - a).$$

Cette fonction est continue et admet une dérivée continue de même que $f(x)$. D'ailleurs elle s'annule (il est facile de le vérifier) pour $x = a$ et pour $x = b$. Donc sa dérivée, qui n'est autre que $F'(x) = f'(x) - m$, s'annule pour une certaine valeur x_0 de x comprise entre a et b ; pour cette valeur on a

$$f'(x_0) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ce qui démontre le théorème.

421. Racines multiples d'une équation. — La considération des dérivées simplifie considérablement, comme nous

[1] Nous nous bornons ici à esquisser une démonstration que seule la théorie complète de la continuité (telle que nous le présenterons dans notre *Troisième Livre*) permet de rendre tout à fait rigoureuse.

[2] Nous admettrons *a priori* ce fait qui paraît intuitif : il peut cependant et doit être établi par une démonstration.

[3] m est un nombre indépendant de x ; c'est une constante.

l'allons voir, l'étude des équations, polynomales ou autres, qui ont des racines multiples.

Soit $f(x) = 0$ une équation polynomale [1] dont un nombre x_1 est racine d'ordre α (**356**). Nous avons vu que lorsqu'il en est ainsi, le polynome $f(x)$ est *divisible* par $(x - x_1)^\alpha$: nous avons donc

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha . \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome. Nous en déduisons, en appliquant la règle de dérivation des produits

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(x - x_1)^{\alpha-1} . \varphi(x) + (x - x_1)^\alpha . \varphi'(x) \\ &= (x - x_1)^{\alpha-1} [\alpha\varphi(x) + (x - x_1) \varphi'(x)], \end{aligned}$$

égalité qui montre que $f'(x)$ est divisible par la puissance $(x - x_1)^{\alpha-1}$.

Réciproquement, si x_1 est racine commune aux équations $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$, cette racine est sûrement une racine multiple de $f(x)$. En effet nous aurons $f(x) = (x - x_1) . \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant un polynome. Donc, en dérivant :

$$f'(x) = \varphi(x) + (x - x_1) \varphi'(x);$$

mais on suppose $f'(x)$ est divisible par $(x - x_1)$; donc $\varphi(x)$, reste de la division de $f'(x)$ par $(x - x_1)$ [n° **372**], est aussi divisible par $(x - x_1)$. De là résulte que $f(x)$ est divisible par $(x - x_1)^2$ et admet x_1 comme racine multiple (double au moins).

On parviendra à des résultats analogues si l'on considère les racines imaginaires de $f(x)$ (*vide* **357**). Si le polynome $f(x)$ est divisible par l'expression $(x^2 + g_1x + k_1)^\beta$ [c'est-à-dire contient cette puissance dans sa décomposition en facteurs premiers, *vide* n° **373**], la dérivée $f(x)$ est divisible par l'expression $(x^2 + g_1x + k_1)^{\beta-1}$.

Nous exprimerons ces faits en disant que l'*équation* $f'(x) = 0$ — qui sera dite *équation dérivée* de l'équation $f(x) = 0$ — *admet*, parmi ses *racines toutes les racines*, *multiples*, *réelles* ou *ima-*

(1) Nous ne nous occuperons, pour simplifier, que des équations polynomales. Tout ce que nous allons dire dans ce numéro, pourra cependant être appliqué à des équations transcendantes $f(x) = 0$ dont le premier membre est fonction univoque et continue de x au voisinage des valeurs x_1, x_2, etc. : il suffira de remplacer partout le mot « polynome » par le mot « fonction continue » (cf. n° 426).

ginaires de $f(x)$: plus précisément, ces racines ont, pour l'équation dérivée, un *ordre de multiplicité* inférieur d'une unité à celui qu'elles ont dans l'équation proposée.

Il résulte de cette proposition que *si un nombre* x_1 *est une racine multiple d'ordre* α *(supérieur à* 1*) de l'équation* $f(x) = 0$, *elle est racine (d'ordre de multiplicité* $\alpha - 2$*) de* $f''(x)$, *racine (d'ordre* $\alpha - 3$*) de* $f'''(x)$, ... *et racine (d'ordre* 1*) de la dérivée d'ordre* $n - 1$, $f^{(n-1)}(x)$.

422. — Considérons, plus généralement, la décomposition du polynome $f(x)$, en produit de facteurs (*vide* **357**), et, parmi ces facteurs, ceux qui correspondent aux racines multiples, c'est-à-dire ceux qui figurent dans la décomposition avec un *exposant* supérieur à 1. Soit

$$(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} (x^2 + g_1 x + k_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + g_m x + k_m)^{\beta_m}$$

le produit de ces facteurs [1].

Il résulte, du numéro précédent [2] que $f'(x)$ est *divisible* par le produit

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x^2 + g_1 x + k_1)^{\beta_1 - 1} \dots (x^2 + g_m x + k_m)^{\beta_m - 1}.$$

Ainsi les *polynomes* $f(x)$ et $f'(x)$ *sont tous deux divisibles par le polynome* $p(x)$.

D'ailleurs on démontre facilement [3] qu'il ne peut exister aucun facteur polynomal autre que les facteurs de $p(x)$ par lequel $f(x)$ et $f'(x)$ soient tous deux divisibles ; c'est pourquoi l'on dit — par analogie avec la théorie arithmétique de la division — que le polynome $p(x)$ est le *plus grand commun diviseur* des polynomes $f(x)$ et $f'(x)$.

[1] Si toutes les racines de $f(x)$ étaient multiples, le produit que nous considérons coïnciderait avec $f(x)$; dans tous les cas, $f(x)$ est divisible par ce produit.

[2] Il est manifeste, en effet, que si un polynome est divisible par plusieurs facteurs premiers, il est divisible par leur produit. Comparer la démonstration du n° 353.

[3] C'est là, pour les facteurs de la forme $(x - x_1)$ une conséquence immédiate de la double proposition du n° 421. On étendra aisément cette conclusion aux facteurs de la forme $(x^2 + gx + k)^\beta$ qui correspondent à des racines imaginaires.

423. — Les racines multiples de $f(x)$ étant les racines du polynome $p(x)$, on voit que, pour obtenir ces racines, il suffira de *former et de résoudre l'équation* $p(x) = 0$. Or la formation de $p(x)$ est aisée : on l'obtient par une méthode de calcul simple qui est exactement celle qui est usitée en arithmétique pour la recherche du plus grand commun diviseur (voir p. 28, *note* 2) [nous nous dispenserons de l'exposer ici].

En appliquant cette méthode à l'équation donnée (quelconque) $f(x) = 0$, puis à l'équation $p(x) = 0$ [au cas où elle a elle-même des racines multiples (¹)] et ainsi de suite, on pourra toujours finalement ramener la recherche des racines multiples du polynome $f(x)$ à la *résolution d'équations qui n'ont que des racines simples.*

3. — Fonctions transcendantes classiques

424. — Nous appellerons « fonctions transcendantes classiques » les différentes fonctions d'une variable x que les formules considérées au chapitre I (§ *10*) nous permettent de définir et d'étudier. Ces fonctions peuvent toutes être obtenues par combinaison (²) des fonctions algébriques et des fonctions fondamentales énumérées ci-dessous :

Puissance transcendante de x. — J'appelle ainsi la fonction x^m, dont l'exposant a une valeur constante irrationnelle, positive ou négative. Cette fonction existe (est définie, n° **391**) pour les valeurs positives de x. — La fonction inverse d'une puissance transcendante est également une puissance transcendante, car si l'on a $y = x^m$, on en déduit $x = y^{\frac{1}{m}}$.

Fonctions exponentielles. — J'appelle ainsi les fonctions a^x où a est un nombre constant positif (³).

(¹) Ces racines ont, en tout cas, d'après ce qui précède, un *ordre de multiplicité moindre* dans $p(x)$ que dans $f(x)$.

(²) Voir les exemples du n° 425.

(³) La théorie des nombres imaginaires permettra de définir des fonctions exponentielles a^x, où le nombre a est négatif. Le plus souvent, d'ailleurs, ainsi que nous le verrons plus loin, on ramène l'étude des fonctions a^x à l'étude de la fonction e^x (voir n° 429), qui est la fonction exponentielle proprement dite.

Fonctions logarithmiques. — Ce sont les fonctions $\log_a x$ (*vide* **143**), inverses des fonctions exponentielles, que l'on définit comme on a défini les fonctions inverses des fonctions algébriques [si l'on pose $y = \log_a x$, on en déduit, par définition $x = a^y$]. Les fonctions logarithmiques existent pour les valeurs positives de x. — En particulier, les fonctions $\log_e x$ sont des logarithmes qui ont pour base le nombre e défini au n° **122** (*logarithmes népériens*, voir n° **145**). On les désigne d'ordinaire, pour simplifier l'écriture, par l'un des symboles $\log x$, sans indice, ou Lx.

Fonctions trigonométriques ou circulaires. — On appelle ainsi les fonctions

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x$$

et leurs combinaisons.

Fonctions circulaires (ou **trigonométriques**) **inverses.** — J'appelle ainsi les fonctions inverses des fonctions trigonométriques (la définition des fonctions inverses étant toujours la même).

Posons par exemple $x = \sin y$; la fonction inverse de cette fonction de y est désignée par le symbole : $y = arc\ sin\ x$ [qui s'énonce : *arc sinus* x, c'est-à-dire : valeur (mesure) de l'arc ou abscisse curviligne dont le sinus a pour valeur x].

Pareillement, la fonction inverse des cosinus sera appelée *arc cosinus* (*arc cos x*).

La fonction inverse de la tangente sera appelée *arc tangente* (*arc tang x ou arc tg x*).

425. — Les combinaisons des fonctions transcendantes fondamentales et de fonctions algébriques seront, par exemple, les fonctions de la forme

$$e^{f(x)}, \quad \sin [f(x)]$$

où $f(x)$ est une fonction algébrique ou transcendante fondamentale de x [*exemples* [1] : $e^{\frac{x+1}{x+2}}$, $e^{\sin x}$, $\sin (5x^2 - 1)$, $\sin e^x$, etc.].

[1] Ces fonctions peuvent être considérées comme des *fonctions composées* (*fonctions de fonctions*, n° 394) : ce sont des fonctions [e^u ou $\sin u$] de la variable u, laquelle est fonction connue de x.

La fonction x^x est, elle aussi, une fonction de cette forme. En effet, choisissant arbitrairement un nombre positif fixe a, on aura [1], pour *toute* valeur positive de x :

$$x = a^{\log_a x}; \text{ donc } x^x = (a^{\log_a x})^x = a^{x \log_a x}.$$

426. — Les définitions et théorèmes généraux des §§ *1* et *2* se laissent immédiatement étendre aux nouvelles fonctions que nous adjoignons aux fonctions algébriques : définition de l'intervalle d'existence et des valeurs singulières ou critiques, définition des fonctions inverses, des fonctions de fonctions, des branches de fonction, des fonctions implicites ; définition et propriétés de la continuité ; définition des pôles ; définition de la croissance et de la dérivée, des règles de dérivation des sommes, produits, quotients, fonctions de fonctions, etc.

Remarquons en particulier que les fonctions circulaires inverses sont des fonctions à plusieurs branches (à *une infinité* de branches). Ainsi, il y a un *arc sinus* qui est nul pour $x = 0$ (car $\sin 0 = 0$) et qui croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand x croît de 0 à 1 (on a $\sin \frac{\pi}{2} = 1$) ; cet *arc sinus* est une branche de fonction. Il y a un autre arc sinus qui part de π (car $\sin \pi = 0$) et décroît de π à $\frac{\pi}{2}$ quand x croît de 0 à 1 ; un troisième *arc sinus* part de la valeur 2π (car $\sin 2\pi = 0$) et croît jusqu'à $\frac{5\pi}{2}$ quand x croît de 0 à 1 ; et ainsi de suite.

Les fonctions *arc sin x* et *arc cos x*, d'autre part, admettent les valeurs $x = -1$ et $x = +1$ comme *valeurs critiques* ; elles n'existent pas en dehors de l'intervalle $-1, +1$; car il n'existe aucun arc dont le sinus ou le cosinus soit inférieur à -1 ou supérieur à $+1$.

Nous allons maintenant apprendre à calculer les dérivées des fonctions transcendantes fondamentales.

(1) Voir aux nos 137 et 144 les règles relatives au calcul des exponentielles et des logarithmes.

427. Dérivée [1] **de a^x.** — Soit a un nombre positif, que nous prendrons, pour fixer les idées, supérieur à 1. Afin de calculer la dérivée de la fonction $y = a^x$, donnons à x, à partir d'une valeur quelconque de cette variable, un accroissement h. L'accroissement k de y est

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1), \quad \text{d'où} \quad \frac{k}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}.$$

Donc *pour que la fonction a^x ait une dérivée, il faut et il suffit que le rapport $\frac{a^h - 1}{h}$ tende vers une limite déterminée lorsque la valeur de h* tend vers zéro (par valeurs positives ou négatives, voir n° **407**). *Appelant* [2] l_a cette limite (qui est constante par rapport à x, puisque $\frac{a^h - 1}{h}$ ne dépend pas de x), *nous aurons pour expression de la dérivée de a^x* :

$$y' = l_a \cdot a^x.$$

Nous admettrons ici sans démonstration l'*existence* de la limite l_a (ce qui revient si l'on veut, à admettre *a priori* [3] que la fonction a^x a une dérivée). La valeur de l_a, d'ailleurs, est nécessairement *positive*. En effet, supposons, par exemple, que h tende vers 0 en restant positif ; pour $h > 0$, on a $a^h - 1 > 0$; donc le rapport $\frac{a^h - 1}{h}$ ne cesse [4] pas d'être positif.

[1] Jean BERNOUILLI expose la règle de dérivation des exponentielles a^x dans le mémoire cité *supra*, p. 376, note 2. (*Acta erudit.*, 1697, *Œuv.*, I, p. 183 sqq.)

[2] L'indice a rappelle que nous raisonnons sur une puissance du nombre a.

[3] *A priori*, l'existence de cette limite n'est nullement évidente : nous verrons en effet ultérieurement qu'il existe des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée.

[4] On démontre facilement que si h tend vers 0 en restant négatif, la limite de $\frac{a^h - 1}{h}$ est la même (l_a) que pour h positif. Posons, en effet, $h = -h'$ (en supposant $h' > 0$) ; nous avons

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1 - \frac{1}{a^{h'}}}{h'} = \frac{1}{a^{h'}} \cdot \frac{a^{h'} - 1}{h'};$$

lorsque h' (positif) tend vers 0, $\frac{1}{a^{h'}}$ tend vers 1 et $\frac{a^{h'} - 1}{h'}$ tend vers l_a ; donc $\frac{a^h - 1}{h}$ tend aussi vers l_a.

428. Dérivées de a^{mx} et de a'^x. — La dérivée de $y = a^{mx}$, dérivée d'une fonction composée, est

$$y' = m \cdot \frac{d(a^{mx})}{d(mx)} = m \cdot l_a \cdot a^{mx}.$$

Pour avoir la dérivée de $y = a'^x$, posons $a' = a^{\log_a a'}$ en désignant par $\log_a a'$ le logarithme de base a du nombre a' : nous aurons

$$y = a'^x = a^{\log_a a' \cdot x} \quad \text{et} \quad y' = l_a \cdot \log_a a' \cdot a'^x.$$

Remarque. — Au lieu de nous servir du nombre a pour calculer la dérivée de a'^x, nous aurions pu raisonner directement sur a'^x comme nous l'avons fait plus haut sur a^x. Nous aurions ainsi obtenu comme dérivée de a'^x, l'expression $l_{a'} \cdot a'^x$, où $l_{a'}$ eût désigné la limite du rapport $\frac{a'^h - 1}{h}$ pour h tendant vers zéro. Les deux expressions $l_a . \log_a a' . a'^x$ et $l_{a'} . a'^x$ ont donc la même valeur, et l'on a, par conséquent : $l_a . \log_a a' = l_{a'}$, d'où l'on déduit :

$$a^{\log_a a' \cdot l_a} = a^{l_{a'}}, \quad \text{ou} \quad a'^{l_a} = a^{l_{a'}}, \quad \text{ou} \quad a^{\frac{1}{l_a}} = a'^{\frac{1}{l_{a'}}}.$$

En d'autres termes, *les valeurs de l'expression $a^{\frac{1}{l_a}}$ est indépendante du choix du nombre a d'où l'on est parti* (cette valeur ne change pas si on remplace a par a' ou par tout autre nombre).

429. La fonction e^x. — Le nombre $a^{\frac{1}{l_a}}$ qui a, d'après ce qui précède, une valeur numérique déterminée *indépendante du nombre a* est appelé e $\left[\text{d'où } \log_a e = \frac{1}{l_a}\right]$; on trouvera (en effectuant le calcul pour une valeur arbitraire de a) $e = 2{,}7182\ldots$ Ce nombre (¹) est exactement celui que nous avons déjà introduit au n° **122** : l'équivalence des deux définitions que nous nous trouvons ainsi donner du nombre e sera démontrée plus loin.

Proposons-nous de calculer la dérivée de e^x. Nous pouvons écrire :

$$y = e^x = a^{\log_a e \cdot x}, \quad \text{d'ou} \quad y' = l_a . \log_a e . e^x.$$

(¹) Le symbole e a été introduit par EULER (Lettre à Goldbach 1731. *Correspondance*, éd. Fuss, t. I, p. 58).

Mais, par définition, $l_a.\log_a e = 1$. Donc **la dérivée de la fonction e^x est la fonction e^x elle-même.**

430. Nouvelle expression de la dérivée de a^x. — Elevant à la puissance l_a les deux membres de l'égalité $e = a^{\frac{1}{l_a}}$, nous obtenons $a = e^{l_a}$; exprimant que les logarithmes népériens des deux membres égaux sont égaux, nous avons (*voir la notation introduite* au n° **424**) : $\log a$ ou $La = l_a$. Donc, d'après le n° **428**, la dérivée de a^x est $La \,.\, a^x$.

431. Dérivée de Lx (ou $\log x$). — Posons $x = e^y$; cette fonction de y a pour dérivée $x'_y = e^y$ d'après le n° **429**. La fonction $y = Lx$ ou $\log x$ est la fonction inverse de $x = e^y$. Donc, d'après le n° **416**, sa dérivée est

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{e^y} \quad \text{ou} \quad y'_x = \frac{1}{x}:$$

Ainsi, la dérivée de la fonction Lx est $\frac{1}{x}$.

432. Dérivée du logarithme (1) **népérien d'une fonction quelconque.** — Soit $y = L[f(x)]$ le logarithme népérien d'une fonction quelconque de y. En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient la dérivée

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

C'est, d'après la définition du n° **412** la *dérivée logarithmique* de la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$, dont le nom se trouve ainsi justifié.

433. Dérivée de la fonction x^m. — Considérons la puissance transcendante de x, d'exposant *irrationnel*, x^m. Pour en calculer la dérivée, remarquons que $x = e^{Lx}$, donc $x^m = e^{mLx}$. C'est là

(1) La dérivée du logarithme a été donnée par Jean BERNOUILLI dans une note insérée aux *Acta eruditorum* en novembre 1694 (cf. *Œuv.*, t. I, p. 125) : le calcul effectué par BERNOUILLI lui avait d'ailleurs peut-être été inspiré par une lettre de LEIBNIZ (voir *Acta eruditorum*, avril 1693).

une fonction composée : $y = e^u$, $u = m\mathrm{L}x$, dont la dérivée est

$e^u . u'_x$ ou $e^u . \frac{m}{x}$ ou $m\frac{y}{z}$, c'est-à-dire mx^{m-1}.

Ainsi l'expression de la dérivée de x^m est celle-là même que nous avions déjà trouvée au n° **418** en nous plaçant dans l'hypothèse où m était un nombre rationnel.

434. Dérivée de la fonction sin x. — Pour obtenir l'expression de cette dérivée, nous établirons d'abord un lemme.

Lemme. — Le rapport $\frac{\sin a}{a}$ *tend vers la valeur limite* 1, *lorsque la valeur de* a *se rapproche indéfiniment de la valeur* 0.

C'est là un fait que nous avons admis implicitement dès l'origine de nos spéculations sur la longueur du cercle ; car, étant donné que 2 sin a est la longueur de la corde de l'arc égal à $2a$ (*vide supra* p. 168, note 1), notre lemmme n'affirme autre chose sinon que l'arc de cercle infiniment petit est assimilable à sa corde (qui est avec lui dans un rapport égal à 1). — Le lemme pourra d'ailleurs être démontré de la façon suivante.

Considérons le cercle trigonométrique de rayon 1 (n° **150**) et l'abscisse curviligne positive (voisine de 0) AM $= a$ (voir fig. 75, p. 168). Puis imaginons (le lecteur fera aisément la figure) que nous menions en M la tangente au cercle (tangente perpendiculaire au rayon OM) jusqu'à sa rencontre en N avec OA prolongé. Dans le triangle rectangle MON, nous avons (n° **215**) MN = OM . tg MOA ou (puisque le rayon OM = 1), MN = tg a. D'ailleurs (fig. 75) OP = cos a, PM = sin a. Considérons alors les trois surfaces suivantes : *triangle* OMP, *secteur circulaire* OMA, *triangle* MON. La seconde contient la première et est contenue dans la troisième ; donc

$$(1) \qquad \textit{aire}\ \mathrm{OMP} < \textit{aire}\ \mathrm{OMA} < \textit{aire}\ \mathrm{MON}.$$

Or, puisque les deux triangles sont rectangles :

$$\textit{aire}\ \mathrm{OMP} = \frac{1}{2} . \mathrm{OP} . \mathrm{PM} = \frac{1}{2} \cos a . \sin a,$$

$$\textit{aire}\ \mathrm{MON} = \frac{1}{2}\ \mathrm{OM}\ .\ \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\ \mathrm{tang.}\ a.$$

D'autre part l'aire du secteur circulaire OMA est égale (n° **84**) à

la demi-longueur de l'axe AM, soit $\frac{a}{2}$, multipliée par l'unité (longueur du rayon). L'égalité (1) s'écrit donc

$$\frac{1}{2}\cos a \,.\, \sin a < \frac{a}{2} < \frac{1}{2}\,\text{tg}\, a \quad \textit{ou} \quad \frac{1}{2}\frac{\sin a}{\cos a};$$

multipliant chaque membre par $\frac{2}{\sin a}$, il vient : $\cos a < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}$.

Lorsque a se rapproche indéfiniment de zéro, $\cos a$ tend vers la valeur-limite 1. Donc le rapport $\frac{a}{\sin a}$, compris entre deux nombres dont la valeur tend vers 1, tend aussi vers 1 ; il en est de même de son inverse $\frac{\sin a}{a}$ $\left(\text{puisque } \frac{1}{1} = 1\right)$.

435. — Cela posé, donnons à x, à partir d'une valeur quelconque de cette variable, un accroissement h. L'accroissement k de $\sin x$ est $\sin(x + h) - \sin x$, ou (d'après le n° **163**)

$\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x$ *ou* $\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h$;

donc, lorsque h *tend vers* 0,

$$(2) \qquad \text{limite}\, \frac{k}{h} = \sin x \,.\, \text{limite}\, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \,.\, \frac{\sin h}{h}.$$

Je dis que la limite du rapport $\frac{\cos h - 1}{h}$ est *zéro*. En effet nous avons d'après le (n° **382**) l'identité $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$. Donc

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \sin \frac{h}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} = \sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Lorsque h tend vers 0, la dernière fraction tend vers la limite 1 d'après le lemme du n° **434** $\left(\text{où l'on fait } a = \frac{h}{2}\right)$; donc son produit par le facteur $\sin \frac{h}{2}$, qui tend vers 0, tend aussi vers 0. —

Le rapport $\frac{\sin h}{h}$, d'autre part, qui figure au second terme du second membre de (2), tend vers 1 d'après le lemme, donc : $\lim \frac{k}{h} = \cos x$. En conséquence :

La dérivée de la fonction $y = \sin x$ est $y' = \cos x$.

436. Dérivée de cos x. — Nous avons $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Nous pouvons donc considérer le cosinus comme une fonction composée : $y = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$. D'où

$$y'_x = \cos u \,.\, u'_x = -\cos u, \text{ ou } -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \text{ donc } y' = -\sin x$$

La dérivée de cos x est — sin x.

437. Dérivée de tang x. — En appliquant la règle de dérivation des quotients à la fonction $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, nous obtenons

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \text{ ou (voir n° } \mathbf{153}) \; y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

ce qu'on peut aussi écrire (¹) $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

438. Dérivées des fonctions circulaires inverses. — Posons $x = \sin y$: nous avons $x'_y = \cos y$. La fonction $y = \operatorname{arc} \sin x$, fonction inverse de $\sin y$, a pour dérivée (n° **416**)

$$y' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La dérivée de arc sin x est donc $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Remarquons que cette dérivée devient infinie pour les valeurs $x = -1$ et $x = +1$, pour lesquelles $x^2 = 1$. Ces valeurs sont, nous l'avons vu, des *valeurs critiques* pour la fonction arc sin x.

Soit maintenant $x = \cos y$; nous en déduisons

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad \text{donc} \quad \frac{\pi}{2} - y = \operatorname{arc} \sin x,$$

$$\text{ou } y = \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin x.$$

Les dérivées de arc sin x et arc cos x sont donc *égales et de signes contraires*.

(¹) On a, en effet, $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

Posant de même $x = \text{tg}\, y$, nous aurons (nº **437**) $x'_y = 1 + \text{tg}^2 y$; **la dérivée de la fonction $y = \text{arc tg}\, x$ est donc**

$$\frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. — Fonctions de plusieurs variables. Fonctions implicites

439. La théorie des fonctions de plusieurs variables [1] suit pas à pas la théorie des fonctions d'une variable, et nous ne nous y arrêterons que brièvement.

Soit $f(x, y, z)$, par exemple, une expression algébrique dépendant de trois variables indépendantes et de nombres connus ou de lettres représentant des nombres connus (*constantes*) : cette expression définit une *fonction algébrique* (*explicite*) des trois variables x, y, z. Telles sont les fonctions entières polynomales (voir nº **291**) et les *fonctions rationnelles* qui sont, par définition, des quotients de deux polynomes en x, y, z. Une expression algébrique telle que

$$\sqrt{x^2 + y^3 + z}, \quad \text{ou} \quad \left(x + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

[1] « Les quantités variables que nous avons considérées jusqu'ici — dit EULER (*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748, chap. v) — avaient entre elles une telle liaison qu'elles étaient toutes fonctions d'une seule variable, et que la détermination d'une seule emportait celle des autres ; mais nous allons traiter à présent des quantités variables qui n'ont aucune dépendance réciproque, de manière qu'en substituant à l'une d'elles une valeur déterminée, les autres restent encore indéterminées et variables. Ces sortes de quantités que je représente par x, y, z, ne changent point de nature quant à leur signification, chacune renfermant comme à l'ordinaire toutes les valeurs déterminées ; mais en les comparant on remarquera que si l'on met pour z, par exemple, une valeur quelconque déterminée, les autres x et y auront une signification aussi indéfinie qu'auparavant. La différence entre les quantités variables dépendantes ou indépendantes les unes des autres consiste donc en ce que, pour les premières, la valeur déterminée d'une seule donne celles des autres, et que pour les dernières la détermination de l'une ne limite nullement la signification de celles qui restent. — Donc une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables x, y, z est une expression composée de ces quantités de quelque manière que ce soit ».

qui ne peut pas être mise sous forme de quotient de deux polynomes, définit une *fonction non rationnelle.*

Si dans l'expression de la fonction entrent des puissances d'exposant irrationnel, des logarithmes, ou des lignes trigonométriques de *quantités variables* (cf. n° **379**), la fonction $u = f(x, y, z)$ est dite *transcendante.*

Considérons, d'autre part, une *relation* ou égalité de la forme

$$F(x, y, z, u) = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre $F(x, y, z, u)$ est une fonction algébrique ou transcendante quelconque des quatre quantités x, y, z, u. Cette relation — qui est (lorsque l'on considère x, y, z comme connus) une équation en u, — définit *implicitement* [1] une fonction u (*fonction implicite algébrique* ou *transcendante*) des trois variables x, y, z.

Les fonctions explicites ou implicites d'un nombre quelconque de variables se définiront exactement comme les fonctions de trois variables.

440. — Une fonction [2] $u = f(x, y, z)$ des trois variables x, y, z, n'est pas toujours définie pour toutes les valeurs de x, y et z. Avant donc d'étudier la fonction, nous devrons indiquer les intervalles dans lesquels nous faisons varier x, y et z. Si par exemple la fonction est définie pour x, y et z tels que

$$a' < x < a, \quad b' < y < b, \quad c' < z < c,$$

nous dirons que la fonction *existe* dans le *domaine* (a', a), (b', b) (c', c), et nous pourrons nous proposer de l'étudier dans ce domaine.

Si x, y, z sont des fonctions de certaines variables, $v, \ldots w$, la variable dépendante peut être regardée comme une *fonction composée* de ces variables (*fonction de fonction*). Supposons, en parti-

[1] Inversement cette relation définit implicitement x comme fonction de y, z, u, ou y comme fonction de x, z, u, etc. Ces fonctions sont analogues aux fonctions inverses que l'on considère dans la théorie des fonctions d'une variable.

[2] Je continue à prendre pour exemple une fonction de 3 variables ; tout ce qui va être dit s'applique aux fonctions de n variables (quel que soit le nombre n).

culier, que les variables x, y, z soient toutes trois fonctions d'une même variable t ; alors u peut être regardée comme fonction (composée) de la variable unique t.

Une fonction $u = f(x, y, z)$ peut avoir plusieurs branches ; c'est le cas, par exemple, de la fonction $\sqrt{1 + xyz}$. Une fonction qui n'a qu'une seule branche dans un domaine donné y est dite *univoque*.

441. Continuité. — La fonction u de x, y, z est *continue* au voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0 de x, y et z lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes : 1° lorsque x, y, z varient très peu à partir de leurs valeurs respectives x_0, y_0, z_0, u (partant d'une valeur déterminée u_0) varie également très peu ; plus précisement, si une fonction u est *continue pour les valeurs* ou « *pour le système des valeurs* » x_0, y_0, z_0, c'est que l'on peut définir un *domaine* — contenant le système de valeurs x_0, y_0, et z_0 — tel que pour x, y, z variant dans ce domaine, $u - u_0$ *reste inférieure, en valeur* absolue, *à un nombre donné* ε *aussi petit qu'on* voudra (1) ; 2° soient u_0, u_1 les valeurs prises par u pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, d'une part, et pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, d'autre part : lorsque (2), faisant varier x, y, z d'une manière continue (n° **397**) on passe du système de valeurs x_0, y_0, z_0 au système de valeurs x_1, y_1, z_1, la fonction u prend au moins une fois chacune des valeurs comprises entre u_0 et u_1.

Si la fonction u, — égale à u_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, — est continue *pour* ces valeurs des variables, on dit qu'elle tend vers la *limite* u_0 lorsque x, y, z tendent respectivement vers les valeurs x_0, y_0, z_0 (cf. **396**).

(1) Quelque petit que soit ε, en d'autres termes, on peut toujours trouver un nombre α assez petit pour que les trois inégalités, $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| < \alpha$, $|z - z_0| < \alpha$ (supposées satisfaites simultanément) entraînent comme conséquence $|u - u_0| < \varepsilon$ (cf. n° 396).

(2) On peut démontrer que cette seconde propriété des fonctions continues est une conséquence de celle qu'énonce la note précédente, qui suffit, par conséquent, à définir les fonctions continues (voir *Trois. Liv.*, ch. I). — Il y a, remarquons-le, une infinité de manières de passer des valeurs x_0, y_0, z_0 aux valeurs x_1, y_1, z_1 : on peut, par exemple, faire d'abord varier x de x_0 à x, en laissant les quantités y et z égales à y_0, z_0, puis faire varier ensuite ces deux quantités seules ; ou bien on peut commencer par faire varier y seul, etc. Notre énoncé s'applique à tous ces cas.

Une fonction qui est continue pour tous les systèmes de valeurs intérieures à un certain domaine (a, a'), (b, b'), (c, c') [*vide* n° **440**] est dite *continue dans le domaine*.

Les propriétés générales des fonctions continues se laissent étendre aux fonctions de plusieurs variables. On établira en particulier que les fonctions polynomales sont continues pour toutes valeurs (finies) des variables. Les fonctions rationnelles (non polynomales) seront, au contraire, discontinues et infiniment grandes pour certains systèmes de valeurs de variables. Ainsi la fonction $u = x + \frac{1}{y - z}$ est infinie lorsque y et z prennent des valeurs égales quelconques. D'une manière générale, on peut démontrer (cf. **399**) que dans tout domaine où elle existe, est univoque, et conserve une valeur finie, une fonction *algébrique* est nécessairement continue [1].

442. Dérivées partielles du premier ordre. — Considérons une fonction univoque et continue, $u = f(x, y, z)$, au voisinage d'un système de valeurs de x, y, z. Supposons que, y et z ne changeant pas, x subisse un accroissement (positif ou négatif) Δx. La variable u subit un accroissement correspondant que je désignerai par $(\Delta u)_x$. Faisons tendre Δx vers o (en ne touchant toujours pas à y et z) et considérons le rapport $\frac{(\Delta u)_x}{\Delta x}$. Si ce rapport se rapproche de plus en plus d'une valeur-limite, cette limite est

[1] On démontre, plus particulièremert, le théorème suivant, dont nous nous contentons de donner l'énoncé (il s'applique aux fonctions transcendantes comme aux fonctions algébriques).

Si la fonction $u = f(x, y, z)$ *est continue dans un domaine donné* (a, a'), (b, b'), (c, c'), *et varie, dans ce domaine entre d' et d, les diverses fonctions implicites* [*fonction* x *de* y, z, u, *fonction* y *de* x, z, u, *etc.*], *définies par la relation* $u - f(x, y, z) = 0$, *sont continues pour tous les systèmes de valeurs correspondant à ce domaine pour lesquels elles sont univoques* (nous ne nous occupons que de ces systèmes de valeurs-là, car nous n'avons défini la continuité que des seules fonctions univoques).

C'est en partant de là que l'on établit par une démonstration rigoureuse la continuité d'une fonction implicite définie par une relation $F(x, y) = 0$ dont le premier membre est fonction continue de x et y).

Plus particulièrement encore nous pouvons déduire de la proposition qui précède que la fonction inverse d'une fonction continue est continue.

appelée : *dérivée partielle de u par rapport à x* ; c'est la dérivée de la fonction de x que définit l'égalité $u = f$ *lorsqu'on y laisse invariables les quantités y et z*. On désigne la dérivée partielle relative à x par le symbole u'_x, ou f'_x, ou (avec la notation dite *différentielle*) par le symbole [1] $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$.

On définira de même la *dérivée partielle par rapport à y*, $\left[\text{que l'on écrira } u'_y, f'_y, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}\right]$ et la *dérivée partielle par rapport à z*. Ces définitions s'étendent d'ailleurs au cas où la fonction est fonction de variables indépendantes en nombre quelconque. Le calcul des dérivées partielles se ramène immédiatement au calcul des dérivées ordinaires, puisque, pour calculer f'_x, il suffit dans l'expression f, de traiter y et z comme des constantes.

Les trois dérivées partielles sont en général des fonctions des variables x, y, z (cf. n° **407**).

Exemple. — Pour un système quelconque de valeurs de x, y, z, la dérivée partielle de la fonction $u = \frac{x}{\sqrt{y + z^2}}$ par rapport à x est $u'_x = \frac{1}{\sqrt{y + z^2}}$; la dérivée partielle de la même fonction par rapport à y est $-\frac{1}{2} x (y + z^2)^{\frac{-3}{2}}$; la dérivée partielle par rapport à z est

$$-\frac{1}{2} x (y + z^2)^{\frac{-3}{2}} . 2z, \quad \text{ou} \quad -xz(y + z^2)^{\frac{-3}{2}}.$$

443. Dérivée d'une fonction composée. — Raisonnons, cette fois, pour simplifier l'écriture, sur une fonction de deux variables, $u = f(x, y)$, considérée dans un domaine où la fonction u et ses dérivées partielles sont des fonctions continues, et supposons que x et y soient toutes deux fonctions d'une même variable t :

$$x = x(t), \quad y = y(t) :$$

alors u est relativement à la variable t, une *fonction composée*. Partons d'un système de valeurs correspondantes de t, x, y et u,

[1] Dans ce symbole, nous arrondissons le ∂ afin de distinguer la dérivée partielle d'une dérivée ordinaire.

et donnons à t un accroissement Δt : il en résulte pour x, y, u des accroissements Δx, Δy, Δu.

D'ailleurs, on peut évidemment poser :

$$(2) \quad \Delta u = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] + [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)].$$

Appliquons le théorème des accroissements finis (nº **420**) à chacune des différences écrites entre crochets. La première différence est égale au produit de Δy par la valeur que prend la dérivée $f'_y(x + \Delta x, y_0)$ pour une certaine valeur y_0 comprise entre y et $y + \Delta y$: nous poserons $y_0 = \theta\Delta y$, où θ désignera un nombre positif et inférieur à 1. La seconde différence est, pareillement égale au produit $\Delta x \,.\, f'_x(x + \theta_1\Delta x, y)$ où θ_1 est un certain nombre compris entre 0 et 1. Divisant alors Δu par Δt, nous aurons

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} f'_y(x + \Delta x, y + \theta\Delta y) + \frac{\Delta x}{\Delta t} f'_x(x + \theta_1\Delta x, y).$$

Faisons maintenant tendre Δt vers 0 ; les accroissements Δx, Δy, Δu tendent alors tous vers 0 ; la valeur de la dérivée $f'_x(x + \theta_1\Delta x, y)$ tend vers la valeur de la dérivée $f'_x(x, y)$; la valeur de la dérivée $f'_y(x + \Delta x, y + \theta\Delta y)$ tend vers la valeur de la dérivée $f'_y(x, y)$, et l'on a, par conséquent, à la limite : *dérivée de u par rapport à t*, ou : $u'_t = f'_x(x, y) \,.\, x'_t + f'_y(x, y) \,.\, y'_t$, égalité que l'on peut écrire ainsi

$$(3) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

444. Dérivée d'une fonction implicite de x. — Considérons la fonction implicite y de x définie par la relation $F(x, y) = 0$. Nous plaçant dans un domaine où $F(x, y)$ et ses dérivées partielles sont continues, appelons Δy l'accroissement de y qui correspond à l'accroissement Δx de x. Nous aurons, en définissant θ et θ_1 comme au numéro précédent, *l'accroissement* de F

$$\Delta y \,.\, F'_y(x + \Delta x, y + \theta\Delta y) + \Delta x \,.\, F'_x(x + \theta_1\Delta x, y).$$

Mais l'accroissement de F est nul, puisque la fonction F de x

et y reste nulle lorsque y est égale à la fonction implicite de x que nous considérons. Donc nous avons, en divisant par Δx :

$$o = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot F'_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) + F'_x(x + \theta_1 \Delta x, y),$$

d'où
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F'_x(x + \theta_1 \Delta x, y)}{F'_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y)}.$$

Lorsque Δx et Δy tendent vers o, F'_x tend vers la valeur $F'_x(x, y)$ F'_y tend vers la valeur $F'_y(x, y)$. Si donc cette dernière valeur n'est pas nulle, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a aussi une limite qui est la dérivée y' [ou y'_x] de y par rapport à x, et l'on a (¹)

$$(4) \qquad y' = \frac{-F'_x}{F'_y}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Si F'_y est nul sans que F'_x le soit, y' est *infini*. [Voir, sur le cas où F'_x et F'_y sont tous deux nuls le Chap. IV, du présent *Livre*].

Exemple. — L'égalité $x^2 + y^2 - 1 = 0$ définit une fonction implicite y de x. Pour avoir sa dérivée, posons $F = x^2 + y^2 - 1$. Nous avons $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$; d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$ ou $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, puisque $y = \sqrt{1 - x^2}$.

445. Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables. — Les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction $u = f(x, y, z)$ sont en général des fonctions de x, y, z : elles ont donc, à leur tour, des dérivées partielles relatives aux trois variables x, y, z. Nous appellerons ces nouvelles dérivées : *dérivées partielles du second ordre de la fonction* u, et nous les

(¹) Cette égalité vaut pour une valeur quelconque de x, mais la valeur qu'il y faut donner à y n'est point arbitraire lorsque x est donné ; y est en effet la valeur de la fonction, laquelle satisfait toujours à la relation $F(x, y) = 0$. Ainsi pour avoir explicitement la valeur de y' pour une valeur déterminée, x_0 de x, il faut : 1° calculer la valeur correspondante y_0 de y [définie par la relation $F(x, y) = 0$] ; 2° calculer la valeur du second membre de (4) pour $x = x_0$ et $y = y_0$.

désignerons respectivement : 1° les dérivées partielles de f'_x par les symboles [1] :

$$f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{xz} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z};$$

2° les dérivées partielles de f'_y par les symboles :

$$f''_{yx},\ f''_{y^2},\ f''_{yz} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z};$$

3° les dérivées partielles de f'_z par les symboles f''_{zx}, ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, ...

De la même manière, nous définirons les dérivées partielles d'ordre 3, d'ordre 4, ... de la fonction et nous les représenterons par les symboles $f^{(3)}_{x^3}, \ldots f^{(4)}_{x^4}, \ldots$ ou $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ldots \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \ldots$

446. — Je dis que, dans le calcul d'une dérivée partielle d'ordre supérieur, on a le droit d'intervertir l'ordre des dérivations, c'est-à-dire que l'on a, par exemple :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}, \text{ etc.}$$

Démontrons tout d'abord ce théorème dans le cas où la fonction $u = f$ ne dépend que de deux variables x et y : je dis que l'on a en ce cas : $f''_{xy} = f''_{yx}$.

En effet, en considérant $f(x, y)$ comme fonction de x, nous avons, d'après le théorème des accroissements finis (n° **420**) :

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y) \tag{5}$$

où $0 < \theta_1 < 1$ (cf., pour les notations, le n° **443**). Considérons la fraction du premier membre comme une fonction de y et appliquons-lui le théorème des accroissements finis par rapport à cette quantité, à laquelle nous donnons un accroissement Δy : nous obtenons :

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - (fx + \Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x . \Delta y} \tag{6}$$
$$= f''_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta \Delta y)$$

[1] La lettre f peut être remplacée partout par la lettre u.

(avec $0 < \theta < 1$), le second membre étant *la dérivée par rapport à y* de la fraction figurant dans (5) [que l'on remplace, dans ce dernier calcul [1], par la fonction égale $f'_x(x + \theta_1\Delta x, y)$] *prise pour la valeur $y + \theta\Delta y$ de la variable.*

Faisons maintenant le même calcul en intervertissant les rôles de x et y. Nous pouvons poser

$$\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x, y+\theta'\Delta y) \quad \text{ou} \quad 0 < \theta' < 1.$$

Considérant le rapport du premier membre comme fonction de x, et opérant comme ci-dessus, nous retrouvons au premier membre la *fraction qui figure au premier membre de l'égalité* (6) et constatons, cette fois, que cette fraction est égale à $f''_{yx}(x+\theta'_1\Delta x, y+\theta'\Delta y)$ ou $0 < \theta'_1 < 1$. Ainsi $f''_{xy}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta\Delta y) = f''_{yx}(x+\theta'_1\Delta x, y+\theta'\Delta y)$ quels que soient les accroissements Δx et Δy. Faisant tendre ces accroissements vers 0, nous obtenons l'égalité

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y). \tag{7}$$

447. — La même démonstration s'applique, évidemment, au cas où f dépend de trois, quatre, ... variables, puisque, lorsqu'on effectue des dérivations relatives à x et y, on traite toutes les autres variables comme des constantes.

D'autre part, on déduit de l'égalité (7) que, si f est une fonction de x, y, z, on a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z};$$

car la première égalité s'obtient en appliquant le résultat ci-dessus démontré à *la fonction* $\frac{\partial f}{\partial z}$; la seconde égalité s'obtient en dérivant par rapport à z les deux fonctions identiques $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

D'ailleurs les raisonnements faits sur x et y peuvent être répétés

[1] Les deux membres de (5) étant des fonctions identiques, leurs dérivées par rapport à y le sont aussi et j'ai donc le droit, lorsque j'applique le théorème des accroissements finis au premier membre, de remplacer sa dérivée par celle du second membre.

sur x et z, sur y et z, etc. Nous reconnaissons ainsi que l'énoncé donné plus haut est bien exact dans le cas le plus général.

Ainsi *toute dérivée partielle d'ordre n d'une fonction* $f(x,y,z)$ *pourra être écrite sous la forme* $\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, *où* p,q,r *sont trois nombres entiers ayant pour somme n.*

448. Formule des accroissements finis. — On peut établir une formule — dite des accroissements finis — qui est, pour les fonctions de plusieurs variables, l'équivalent de la formule du n° **420**.

Considérons pour simplifier, — la démonstration est la même dans le cas général — une fonction $f(x,y)$ de *deux* variables, supposée continue ainsi que ses dérivées partielles dans le domaine (a, A), (b, B) [voir **440**]. Je dis que l'on a l'égalité

$$(8) \qquad f(A,B) - f(a,b) = (A-a)f'_x(\alpha,\beta) + (B-b)f'_y(\alpha,\beta),$$

où les nombres α,β sont un certain système de valeurs appartenant au domaine considéré, c'est-à-dire comprises : α entre a et A, et β entre b et B.

Remarquons que, pour passer du système de valeurs a,b au système de valeurs A,B, nous pouvons régler comme nous le voulons la variation concomitante de x et de y. Réglons alors cette variation en introduisant une variable auxiliaire t et faisant

$$(9) \qquad x = a + (A-a)t; \qquad y = b + (B-b)t.$$

Les nombres x et y sont en ce cas des fonctions de t : lorsque t varie de 0 à 1, x varie de a à A et y de b à B. D'ailleurs, quand on remplace x et y par les expressions (9), $u = f(x,y)$ devient une fonction de t, que nous allons désigner par $\varphi(t)$.

La dérivée de $u = \varphi(t)$ est $\varphi'_t = f'_x(x,y)x'_t + f'_y(x,y)y'_t$ (n° **443**). En remarquant que $x'_t = A - a$ et $y'_t = B - b$, on aura

$$(10) \qquad \varphi'_t = (A-a)f'_x + (B-b)f'_y$$

où f'_x et f'_y sont des fonctions composées de t par l'intermédiaire des variables x et y, soit : $f'_x(x,y) = \varphi_1(t) \quad f'_y(x,y) = \varphi_2(t)$.

Appliquons à la fonction $\varphi(t)$ la formule des accroissements finis (nº **420**) relative à l'intervalle o, 1 : nous avons

$$(11) \qquad \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1,$$

donc, d'après (10) :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (A - a)\varphi_1(\theta) + (B - b)\varphi_2(\theta).$$

Les valeurs α et β de x et y qui correspondent à la valeur θ de t sont $\alpha = a + (A - a)\theta$ et $\beta = b + (B - b)\theta$;
elles sont manifestement comprises respectivement entre a et A, et entre b et B; d'ailleurs, par définition des fonctions φ_1, φ_2 et φ,

$$\varphi_1(\theta) = f'_x(\alpha,\beta), \quad \varphi_2(\theta) = f'_y(\alpha,\beta), \quad \varphi(1) = f(A,B), \quad \varphi(0) = f(a,b).$$

L'égalité (11) n'est donc autre chose que l'égalité (8), que l'on se proposait de démontrer.

5. — Recherche des fonctions primitives

449. — L'étude d'une opération algébrique appelle l'étude de l'opération inverse : ainsi en a-t-il été pour l'addition et la soustraction, pour la multiplication et la division, pour l'élévation aux puissances entières et l'extraction des racines ; nous ne pouvons manquer de porter, pareillement, notre attention sur l'opération inverse de la dérivation et de nous poser la question suivante : *Peut-on toujours trouver une fonction* F (x) *d'une variable qui admette pour dérivée une fonction donnée (connue)* $f(x)$?

450. — Faisons d'abord une remarque préliminaire. Il résulte du nº **409** que si une fonction F (x) a pour dérivée $f(x)$, la fonction F (x) + C, où C est une *constante quelconque*, a la même dérivée. Ainsi le problème que nous nous sommes posé ne peut comporter une solution unique. *S'il existe une fonction* F (x), *il en existe une infinité, différant les unes des autres par des constantes ajoutées à leurs expressions.* Ces fonctions seront appelées

« *fonctions primitives* » de la fonction $f(x)$. On les appelle aussi « *fonctions intégrales* » ou « *intégrales* » ; plus précisément, si F (x) est une fonction primitive de $f(x)$, on dit que la fonction F (x) + C, — où C est une *constante arbitraire* dont je ne définis pas la valeur, — est l'*intégrale indéfinie* de la fonction $f(x)$. L'opération que nous effectuons lorsque nous formons l'intégrale indéfinie d'une fonction s'appelle : *intégration* ou *quadrature* [1].

451. — Ces définitions données, nous remarquons que nous pouvons immédiatement former les fonctions primitives (ou intégrales indéfinies) d'un grand nombre de fonctions : autant de dérivées, en effet, calculables d'après les règles des §§ *2* et *3*, autant de fonctions primitives connues. C'est ce qui apparaît dans le tableau suivant [2] où nous plaçons en regard les règles de dérivation établies plus haut et les règles d'intégration correspondantes :

Fonctions	Dérivées	Fonctions	Fonction primitive
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = x^m$ pour m différent de -1	$Y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$y = Lx$ ou $\log x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \frac{1}{x}$	$Y = Lx + C$ [3]
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$Y = \sin x + C$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \sin x$	$Y = -\cos x + C$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$Y = \operatorname{tg} x + C$
$y = \operatorname{arc} \sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$Y = \operatorname{arc} \sin x + C$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = \frac{1}{1 + x^2}$	$Y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x + C$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$Y = e^x + C$

[1] Ce mot s'oppose au mot *différentiation* qui était employé au XVIIe siècle pour désigner l'opération de la dérivation (ou, du moins une opération exactement équivalente, voir *supra* p. 401, note 2).

[2] Ce tableau constitue les *Canones* que LEIBNIZ proposait de dresser dès 1673. Cf. la fin du *De Quadratura* de NEWTON.

[3] Nous pouvons aussi écrire cette fonction primitive sous la forme $Y = L(Cx)$, C étant une constante arbitraire; en effet $L(Cx) = Lx + LC$ (*vide* n° 144). Or si C est une *constante arbitraire* il en est de même de LC.

Les fonctions y considérées ne sauraient d'ailleurs avoir d'autres fonctions primitives que celles qui figurent dans notre tableau ; en effet, soient Y_1 et Y_2 deux fonctions primitives d'une même fonction y ; la différence $Y_1 - Y_2$ a pour dérivée $y - y$, donc o ; j'en conclus que $Y_1 - Y_2$ est une constante par rapport à x, car il n'y a que les constantes (dont l'accroissement est toujours nul) qui aient une dérivée nulle.

452. — Pour désigner simplement les fonctions primitives, ou intégrales indéfinies, on emploie souvent une notation spéciale dont nous expliquerons plus loin l'origine et la signification (*Trois. Liv.*, chap. II) : cette notation est fondée sur l'emploi du signe $\int$ (*originairement* un S), que l'on lit : *intégrale* ou *somme*, et du signe dx, que nous avons déjà introduit dans la théorie des dérivées. Ainsi le symbole

$$\int f(x)\,dx$$

représentera la fonction primitive de $f(x)$: ce symbole, par conséquent, ne désigne pas une fonction déterminée, mais bien une infinité de fonctions différant les une des autres par des valeurs constantes.

Nous écrirons en conséquence

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \qquad \int \cos x \,.\, dx = \sin x + C, \text{ etc.}$$

Le lecteur traduira facilement dans ce nouveau système de notations les formules du n° **451**. A ces formules nous ajouterons les suivantes que l'on obtient immédiatement en appliquant les règles de la dérivation :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} + C.$$

En effet, dérivons les seconds membres. Nous avons par exemple :

$$\textit{dér. de} \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \text{dér. de}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

c'est-à-dire
$$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right];$$

réduisant au même dénominateur la quantité entre crochets, et effectuant la multiplication, nous obtenons la première formule écrite ci-dessus. On vérifiera semblablement les deux autres.

453. — Ainsi il nous sera facile d'allonger le tableau des intégrales connues à l'avance, mais nous ne serons pas pour cela beaucoup plus avancés. Si en effet nous nous donnons *a priori* certaines fonctions très simples, telles que $\sqrt{x^3+1}$, $(\mathrm{L}x)^{-1}$, nous nous apercevrons vite que notre tableau ne nous est d'aucun secours pour trouver les intégrales de ces fonctions. Pour résoudre effectivement le problème de l'intégration, il faudrait donner une méthode directe et régulière qui permît de former à *coup sûr* les intégrales des fonctions connues, de même que nous en savons toujours calculer les dérivées. Malheureusement il n'existe pas de semblable méthode et l'évènement a prouvé qu'il ne saurait en exister ; si l'on se borne en effet au domaine des fonctions algébriques et transcendantes classiques [1] — et, pour le moment, nous ne connaissons point, nous n'avons aucun moyen d'étudier, d'autres fonctions, — si l'on se borne, dis-je, à ce domaine, on pourra affirmer (nous l'avons vu plus haut) que toute fonction a une dérivée, mais *il ne sera point vrai que toute fonction ait une intégrale :* il n'existe par exemple aucune fonction (algébrique ou transcendante classique) de x qui soit fonction primitive de $\sqrt{x^3+1}$. Ainsi les règles d'intégration que nous pourrons trouver ne s'appliqueront jamais qu'à des cas spéciaux, à des types particuliers de fonctions : elles ne sauraient avoir la même généralité que les règles de dérivation.

Nous déclarerons-nous satisfaits, cependant, lorsque nous aurons reconnu que la fonction intégrale d'une certaine fonction donnée est impossible à former ? Affirmerons-nous, sans restriction d'au-

[1] C'est-à-dire des fonctions définies aux §§ 1 et 3 de ce chapitre.

cune sorte, que la fonction n'a pas d'intégrale parce que cette intégrale n'est pas exprimable au moyen des symboles et des signes d'opérations dont nous disposons? Cela reviendrait à prétendre que la science mathématique est incapable de définir et d'étudier d'autres fonctions que les fonctions algébriques ou transcendantes classiques. Or une telle prétention serait plus que téméraire. C'est une maxime banale que nul ne saurait assigner des bornes à la science ; et effectivement, nous rencontrerons bientôt un problème fondamental (le problème des aires) [1] qui nous forcera à accepter comme un fait l'existence de fonctions intégrales dont nous ne savons pas former l'expression, et à faire entrer ces fonctions dans nos raisonnements (*vide infra*, chap. III, § *5*, et surtout *Trois. Liv.* chap. II).

Mais contentons-nous pour l'instant de cet avertissement et bornons-nous à indiquer les principales règles et méthodes qu'il conviendra d'appliquer pour effectuer aussi commodément que possible le calcul des intégrales qui sont des fonctions algébriques ou transcendantes classiques.

454. Intégrale de la fonction $af(x)$. — *L'intégrale indéfinie du produit $af(x)$ où a est un nombre indépendant de x* (une constante) *positif ou négatif est évidemment le produit par a de l'intégrale indéfinie de $f(x)$.* En d'autres termes :

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

455. Intégrale indéfinie d'une somme. — *L'intégrale indéfinie d'une somme de fonctions est la somme des intégrales indéfinies de ces fonctions.*

Ainsi

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Et en effet, si nous appelons $F(x)$ et $G(x)$ des fonctions primi-

[1] Nous constaterons (chap. III, § 5) que ce nouveau problème est exactement équivalent au problème de la recherche des fonctions primitives. Cette constatation, fut à la fin du XVII[e] siècle, le point de départ du calcul intégral.

tives de f et g, la somme F + G a pour dérivée $f(x) + g(x)$, et est, par conséquent, fonction primitive de cette somme.

Application. — L'intégrale indéfinie d'un polynome en x est un polynome en x. Ainsi le polynome $ax^2 + bx + c$ a pour intégrale indéfinie :

$$\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d, \qquad (d \text{ constante arbitraire}).$$

456. Intégration par parties. — Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de x. Nous savons que le produit uv a pour dérivée (n° **411**) l'expression $u'v + v'u$ où u' et v' sont les dérivées de u et v. Il en résulte que *l'intégrale indéfinie de la fonction $u'v$ est égale au produit uv moins l'intégrale indéfinie de la fonction $v'u$.* En d'autres termes :

$$\int u'(x).v(x).dx = u(x).v(x) - \int v'(x).u(x).dx.$$

Cette formule permet de calculer commodément les intégrales indéfinies d'un grand nombre de fonctions.

Exemples. — Pour calculer l'intégrale de $\log x$, posons $u = x$ (d'où $u' = 1$) et $v = \log x$; nous aurons :

$$\int \log x.dx = uv - \int v'udx = x \log x - \int x.\frac{1}{x}dx = x \log x - x + \text{C}.$$

Pour calculer l'intégrale de $x \log x$, posons $u = \frac{x^2}{2}$ (d'où $u' = x$) et $v = \log x$; nous aurons :

$$\int x \log x.dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + \text{C}.$$

On pourra calculer de même, de proche en proche, l'intégrale de $x^m \log x$, quel que soit l'entier m.

Soit encore à calculer l'intégrale indéfinie de xe^x. Posons $e^x = u$ (d'où $u' = e^x$) et $x = v$; nous aurons :

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

La méthode d'intégration par parties a été employée pour la première fois dans des cas particuliers par Fermat [1] et par Pascal [2], mais cette méthode se présentait chez eux sous une forme géométrique qui en masquait la généralité. Comme les règles que nous allons donner aux numéros suivants, elle ne fut formulée définivement qu'au XVIIIe siècle.

457. Changement de variable. — Soit à calculer l'intégrale indéfinie d'une fonction $y = f(x)$; je suppose que x soit fonction d'une variable t, que je prends comme nouvelle variable ou variable auxiliaire ; alors y devient une *fonction composée* de t. Appelons $Y = F(x)$ l'une des fonctions primitives de $f(x)$; la variable Y sera fonction de t, et l'on aura (n° **417**) :

$$Y'_t = Y'_x \cdot x'_t,$$

et, par conséquent : $Y'_t = y \cdot x'_t$. J'en conclus que Y est fonction primitive de la fonction de t, yx'_t.

En d'autres termes, *lorsqu'on remplace x, dans $f(x)$, par son expression en fonction de t, on a* [3] :

$$Y + \textit{constante}, \text{ ou} \int f(x)dx = \int [f(x) \cdot x'_t]dt$$

Cette formule permet de calculer l'intégrale indéfinie $Y + C$ de $f(x)$; Y sera obtenue en fonction de t, mais pour la mettre sous la forme d'une fonction de x, il suffira de remplaçer t par son expression en fonction de x [4].

[1] Principalement dans le traité intitulé *De æquationum localium transmutatione*, dont la rédaction fut achevée en 1657 (*Œuv, de Fermat* t. I, p. 255–299).

[2] En particulier dans le *Traité des trilignes et de leurs onglets* (1658).

[3] Si l'on se sert de la notation différentielle en posant $x'_t = \frac{dx}{dt}$ (voir 407), on voit que *tout se passe comme si dx* et *dt* étaient des nombres ordinaires, $\frac{dx}{dt}$ une fraction, et $f(x)dx$ un produit : si l'on admet cela, il est évident que $f(x)\frac{dx}{dt} \cdot dt = f(x)dx$.

[4] On a supposé x fonction de t ; donc inversement t est fonction de x.

458. Applications. — Soit à calculer l'intégrale indéfinie de $\frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}}$, où k est une constante ; je prends une variable auxiliaire t égale à $\frac{x}{k}$; j'ai alors $x = kt$, $x' = k$, et par conséquent :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} \text{ ou } \int \frac{1}{k} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2}}} = \frac{1}{k} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} kdt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

L'intégrale indéfinie cherchée est donc arc sin t, ou (en remplaçant t par $\frac{x}{k}$), arc sin $\frac{x}{k}$.

On utilisera le même changement de variable pour calculer les intégrales indéfinies ([1]) de

$$\frac{1}{x^2 + k^2}, \quad \frac{1}{x^2 - k^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 - k^2}}.$$

On aura par exemple :

$$\int \frac{dx}{x^2 + k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{k} + C \qquad \int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \log \frac{x - k}{x + k} + C$$

Soit maintenant à calculer l'intégrale indéfinie de $(ax + b)^m$ où a, b et m sont des constantes : nous poserons $ax + b = t$, d'où $x = -\frac{b}{a} + \frac{t}{a}$, $x'_t = \frac{1}{a}$, et nous obtiendrons (d'après les formules du n° **451**) $\frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{m+1}}{m + 1}$ si m est différent de -1, ou $\frac{1}{a} \log (ax + b)$ si $m = -1$.

459. Intégrale d'une fonction rationnelle de x. — Pour intégrer une fonction rationnelle de x, c'est-à-dire le quotient $\frac{B(x)}{A(x)}$ de deux polynomes en x, nous nous servirons de la formule de décomposition qui a été donnée au chapitre I.

Nous supposerons que le degré de $B(x)$ est inférieur au degré

([1]) Je désigne par k^2 un nombre constant *positif* : cette notation est justifiée par le fait que k^2 est un nombre toujours positif (quel que soit le signe de k).

de $A(x)$ [s'il n'en était pas ainsi, on n'aurait qu'à retrancher de la fonction un polynome en x, quotient de B par A, pour avoir une fonction rationnelle qui satisfasse à la condition voulue (voir le début du n° **374**)]. Nous pourrons alors transformer notre fonction en une somme [voir la formule (3) du n° **374**] et tout reviendra à calculer les intégrales des termes de la somme, c'est-à-dire les intégrales des fonctions des types suivants :

$$\frac{1}{(x - x_1)^n}, \quad \frac{ax + b}{(x^2 + gx + k)^n},$$

où x_1, a, b, g et k sont des nombres constants quelconques et n un exposant *entier positif* quelconque supérieur ou égal à 1.

Voyons donc comment nous obtiendrons ces diverses intégrales.

460. — Nous avons vu à la fin du n° **458** comment on calculera la première.

Pour obtenir la seconde, remarquons d'abord que, d'après l'identité (XVII) (n° **305**) :

$$x^2 + gx + k = \left(x + \frac{g}{2}\right)^2 + k - \frac{g^2}{4}.$$

Désignons par h le nombre constant $k - \frac{g^2}{4}$ et faisons le *changement de variable* $x + \frac{g}{2} = t$, d'où $x'_t = 1$. En appliquant la règle du n° **457**, le lecteur vérifiera aisément que nous sommes ramenés au calcul d'une intégrale de la forme $\int \frac{lt + m}{(t^2 + h)^n} dt$, ($l$ et m nombres constants).

Cela posé, nous avons

$$\frac{lt + m}{(t^2 + h)^n} = l \frac{t}{(t^2 + h)^n} + \frac{m}{(t^2 + h)^n};$$

nous sommes donc ramenés (d'après les numéros **454-55**) au calcul des deux intégrales $\int \frac{tdt}{(t^2 + h)^n}$ $\int \frac{dt}{(t^2 + h)^n}$.

Pour calculer la première, observons qu'elle peut s'écrire $\frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2 + h)^n}$ ce qui n'est autre chose que $\frac{1}{2} \frac{(t^2 + h)^{-n+1}}{-n+1} + C$

comme on le voit immédiatement en prenant la dérivée de cette dernière fonction.

Quant à la seconde intégrale, nous ne pouvons pas rassembler dans une seule et même formule les diverses expressions qu'elle aura suivant les valeurs de l'exposant n. Mais nous allons indiquer la méthode qui permettra de la calculer en établissant une formule d'un type que nous avons déjà rencontré plus haut : le type *récurrent*.

461. Calcul de $\int \frac{dt}{(t^2+h)^n}$. — Désignons cette intégrale par I_n, l'indice indiquant la valeur de l'exposant du dénominateur. Nous aurons

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+h} = \int \frac{dt}{t^2+k^2} \text{ si (}^1\text{) } h > 0 \quad \text{ou} \quad \int \frac{dt}{t^2-k^2} \text{ si } h < 0.$$

Or nous avons appris au n° **458**, à calculer ces deux intégrales.

Nous allons établir d'autre part une égalité ou relation [*formule récurrente*] qui permet de calculer I_{n+1} si l'on connaît I_n. Puisque nous connaissons I_1, cette formule (appliquée au cas où $n = 1$) nous donnera I_2 ; ayant I_2, nous saurons calculer I_3 (en faisant dans la formule $n = 2$) et ainsi de suite ; de proche en proche nous pourrons calculer I_n, quelque grand que soit l'exposant n.

Appliquons à I_n la formule de l'intégration par parties. En posant

$$u = t, \quad \text{d'où} \quad u' = 1\ ; \quad v = \frac{1}{(t^2+h)^n}, \quad \text{d'où} \quad v' = \frac{-2nt}{(t^2+h)^{n+1}},$$

nous avons

$$I_n = \int u'.v.dt = uv - \int v'.u.dt = \frac{t}{(t^2+h)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2+h)^{n+1}}.$$

Cela posé, on peut écrire

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+h)^{n+1}} = \int \frac{t^2+h}{(t^2+h)^{n+1}} dt - h \int \frac{dt}{(t^2+h)^{n+1}}$$

(1) Voir *supra* p. 437, note 1.

ce qui n'est autre chose [1] que $I_n - h\,I_{n+1}$. D'où la formule

$$I_n = \frac{t}{(t^2+h)^n} + 2nI_n - 2nhI_{n+1},$$

ou $$2nh\,.\,I_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{t}{(t^2+h)^n},$$

formule qui, comme nous l'avons annoncé, fait connaître I_{n+1} lorsque l'on a déjà l'expression de I_n.

Ainsi, en effectuant des calculs plus ou moins longs, nous saurons toujours calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle supposée décomposée comme il a été dit au n° **374**. Lorsque, par contre, la décomposition de la fonction n'est pas pratiquement réalisable [voir n° **374**], l'intégration en général, ne pourra pas être faite.

462. Intégrale d'une fonction rationnelle de sin x, cos x, tang x. — Pour calculer une telle intégrale, on emploiera en général la méthode du changement de variable. Divers changements pourront être utilisés, qui se trouveront spécialement appropriés aux diverses fonctions que l'on désirera intégrer. Mais il est un changement de variable qui doit être distingué de tous les autres, car, s'il n'est pas toujours celui qui conduit aux calculs les plus simples, il présente l'immense avantage de pouvoir servir en tous cas : c'est le changement

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \qquad \text{ou} \qquad x = 2\operatorname{arc\,tg} t; \qquad \text{d'où} \qquad x'_t = \frac{2}{1+t^2}.$$

En effet, sin x, cos x et tg x, sont tous trois fonctions *rationnelles* de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (voir les formules du n° **384**). Remplaçant sin x, cos x, tg x par leurs valeurs $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{2t}{1-t^2}$ (n° **384**) dans la fonction rationnelle proposée, et multipliant par x'_t, c'est-à-dire par $\frac{2t}{1+t^2}$, nous obtenons une fonction rationnelle de t que nous intégrons par la méthode du n° **459** : dans le résultat nous remplaçons t par $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

[1] Les deux termes de la première fraction du second membre étant divisés par $t^2 + h$.

Exemple. — Soit à calculer $\int \frac{dx}{\sin x}$. Posant $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, il devient :

$$\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \mathrm{L}t + \mathrm{C}.$$

Donc
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \mathrm{C}.$$

463. Intégrales des puissances et produits de cosinus et de sinus. — Pour calculer les intégrales

$$\int \cos^m x \,.\, dx, \qquad \int \sin^m x \,.\, dx,$$

où l'exposant m est un entier positif, il est commode de se servir des formules trigonométriques établies au n° **382**. Les puissances $\cos^m x$, $\sin^m x$, peuvent être remplacées par des sommes dont les termes [1] sont (à des facteurs numériques près) des cosinus d'arcs multiples de x, soit $\cos x$, $\cos 2x$, ... $\cos mx$. Ainsi tout revient à calculer les intégrales de ces dernières fonctions, ce qui est facile si l'on prend pour nouvelles variables $2x$, $3x$, ... au lieu de x.

Exemple.— Nous avons (**382**) : $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos 2x]$. Donc [2]

$$\int \cos^2 x \,.\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \,.\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \mathrm{C}.$$

464. — Supposons maintenant que nous ayons à calculer l'intégrale

$$\int \cos^m x \,.\, \sin^p x \, dx,$$

où m et p sont deux exposants entiers. Appliquant les formules du n° **382**, nous serons ramenés au calcul d'intégrales de la forme

[1] Nous ne parlons pas des termes qui sont des constantes comme le premier terme dans la somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ égale à $\cos^2 x$ [voir n° 382].

[2] On a $\int \cos 2x . dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x . d(2x)$, en prenant $2x$ pour nouvelle variable (vu la simplicité du calcul, il est inutile de désigner ici cette nouvelle variable par une lettre spéciale) ; la nouvelle intégrale est égale à $\sin 2x$ + *constante* d'après le tableau du n° 451.

$\int \cos mx \,.\, \sin nx \,.\, dx$, où m et n sont deux entiers quelconques. Or, appliquons la première formule (7) du n° **383**. Nous avons

$$\cos mx \,.\, \sin nx = \frac{1}{2} \sin (m+n)\, x + \frac{1}{2} \sin (n-m)\, x,$$

nous sommes donc ramenés au calcul d'intégrales de sinus d'arcs multiples de x; elles se calculent comme les intégrales des cosinus du n° précédent.

465. Fonction rationnelle de x et d'un radical portant sur un polynome du second degré. — Proposons-nous d'intégrer une fonction de la forme

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$$

qui se présente comme une fonction *rationnelle* de deux variables, dont l'une est x, et l'autre la quantité $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, où a, b, c sont des coefficients constants. Cette fonction dépend de la seule variable x, mais on peut la considérer comme une fonction composée (**440**) en l'écrivant

$$R(x, y) \quad \text{avec} \quad y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Voici comment l'on pourra, en tout cas [1], ramener l'intégration de la fonction R à l'intégration d'une fonction rationnelle d'une variable unique (**459**) :

Posons, pour simplifier l'écriture, $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, en sorte que

$$y = \sqrt{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{x^2 + px + q}.$$

puis faisons un changement de variable en posant

$$(1) \qquad y = \sqrt{a}\,(x - u),$$

[1] D'autres méthodes pourront être plus rapides dans certains cas particuliers : celle que nous indiquons a l'avantage d'être toujours applicable.

c'est-à-dire

(1 bis) $$\sqrt{x^2 + px + q} = x - u.$$

ce qui revient à remplacer la variable x par la variable u qui est liée à x par la relation (1 bis). Pour avoir x en fonction de u, nous éléverons au carré les deux membres de (1 bis); cela nous donne : $x^2 + px + q = x^2 - 2ux + u^2$, d'où l'on tire, toutes réductions faites : $x = \frac{u^2 - q}{p + 2u}$; ainsi x est une fonction rationnelle de u ; il en est par conséquent de même de la dérivée x'_u, et aussi de y, puisque, par hypothèse, $y = \sqrt{a}\,(x - u)$. Donc, lorsque l'on remplace x et y par leurs valeurs en fonction de u, l'intégrale à calculer $\int R(x, y) . x'_u . du$ devient une intégrale de fonction rationnelle de u.

466. Intégrales définies. — Nous nous contenterons ici de donner une définition de l'intégrale définie dont nous nous occuperons à plusieurs reprises dans la suite de cet ouvrage.

Soit $F(x)$ une fonction primitive d'une fonction $f(x)$, et a, b un intervalle où cette dernière fonction existe et est continue. On appelle « *intégrale définie, étendue à l'intervalle a, b* », de la fonction $f(x)$ la différence $F(b) - F(a)$.

Cette différence remarquons-le est toujours la même quelle que soit la fonction primitive de $f(x)$ que l'on considère. Soit, en effet, $G(x)$ une autre fonction primitive. On aura, $G(x) = F(x) + C$, C étant une constante indépendante de x. Donc

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

Nous conviendrons de représenter l'intégrale définie de $f(x)$ étendue à l'intervalle (a, b) par la notation $\int_a^b f(x)\,dx$.

6. — *Equations différentielles*

467. — La résolution des « équations différentielles » (1), tant à cause des développements théoriques dont elle est le point de départ qu'en raison des appplications géométriques et mécaniques auxquelles elle donne lieu, est l'un des problèmes fondamentaux de l'algèbre.

Soit y ou $y(x)$ une fonction inconnue d'une variable x, et $y', y'', \ldots$ ses dérivées successives : si l'on sait que les quantités $x, y, y', y'' \ldots$ — dont la variation est déterminée par celle de x — satisfont, quel que soit x, à une relation implicite (n° **439**)

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0, \tag{1}$$

dont on connaît la forme, on peut parfois se servir de cette relation pour déterminer la nature de la fonction inconnue y. L'égalité ou relation (1) est appelée « *équation différentielle* entre y est x » : la fonction $y(x)$ est une *solution* ou *intégrale* de cette équation (2) : si l'on a trouvé toutes les solutions d'une équation différentielle. on dit qu'on l'a *intégrée*.

Exemples. — Les relations

$$y'^2 - xy + y'' \sin x = 0 \tag{2}$$

$$y' - yf(x) - g(x) = 0, \tag{3}$$

où f et g désignent des fonctions *connues* de x sont des équations différentielles. La relation $y' - f(x) = 0$, qui ne contient pas y, est aussi une équation différentielle, et d'un type particulièrement simple : elle admet comme solutions les fonctions primitives de $f(x)$.

468. — Une relation implicite entre *plusieurs* fonctions de x, leurs dérivées, et la variable x, sera, elle aussi, appelée *équation différentielle*. Mais cette relation à elle seule ne suffit pas à déter-

(1) Mot introduit par LEIBNITZ, en même temps que le mot *derivare*, dans une lettre à Newton, 1677, apud *Mathemath. Werk.* I, 154-62.

(2) On dit qu'elle « satisfait » à l'équation (1) ou « vérifie » cette équation.

miner les fonctions qui y figurent, dans le cas où ces fonctions sont toutes inconnues. Pour calculer plusieurs fonctions inconnues y, z, u, ..., au moyen d'équations différentielles, il faudra que l'on connaisse plusieurs équations auxquelles satisfont simultanément (quel que soit x) les fonctions y, z, u, ... et leurs dérivées. Ces équations forment alors [*comparer* la théorie des équations algébriques ordinaires] un *système d'équations différentielles simultanées*.

Ainsi l'on peut trouver des couples de fonctions y et z de x satisfaisant aux deux relations simultanées :

$$(4) \qquad \begin{cases} y' - xz + x^2y = 0 \\ z'' + z'y + 2xy' = 0 \end{cases}$$

469. Ordre. — On appelle *ordre* d'une équation différentielle (relativement à une ou à plusieurs fonctions inconnues figurant dans l'équation) l'ordre de celle des dérivées de ces fonctions qui se trouve avoir l'ordre le plus élevé. Ainsi l'équation (2) est du *second ordre* (par rapport à la seule fonction inconnue qu'elle contienne : y) : en effet y'' figure dans cette équation et il ne s'y trouve pas de dérivée d'ordre supérieur à 2. L'équation (3) [qui ne contient d'autre dérivée que y'] est du *premier ordre*. Les équations (4) sont respectivement du premier et du second ordre par rapport aux deux fonctions y et z.

470. Réduction d'un système d'équations à une équation unique. — Nous nous bornerons à considérer, dans les pages qui suivent, des équations différentielles à une fonction inconnue. Nous en avons le droit, car *on démontre que l'on peut toujours — théoriquement tout au moins — ramener la résolution d'un système de n équations différentielles à n inconnues à la résolution de plusieurs équations séparées* (*d'ordre plus élevé, il est vrai*) *dont chacune ne contient qu'une fonction inconnue* (et ses dérivées).

Montrons, en nous plaçant dans le cas le plus simple, comment se pourra faire la réduction du système. Considérons un système de deux équations du premier ordre

$$(5) \qquad F(x,y,z,y',z') = 0, \qquad G(x,y,z,y',z') = 0$$

contenant deux fconctions inconnues de x et leurs dérivées.

Des deux équations (5) — **traitées** comme des équations ordinaires ayant pour inconnues y' et z' — **on tire** [1] certaines expressions de y' et z' en fonction de x, y, z, soit :

$$y' = f(x,y,z), \qquad z' = g(x,y,z), \tag{6}$$

nouveau système d'équations différentielles qui équivaut évidemment au système (5) [voir le n° **479**].

Raisonnons donc sur le nouveau système et écrivons que les dérivées par rapport à x des deux membres de la première équation sont égales [2]. Nous obtenons (d'après la règle du n° **443**).

$$y'' = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \cdot z',$$

ou, en tenant compte de la seconde équation (6) :

$$y'' = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} y' + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \cdot g(x,y,z), \tag{7}$$

équation de la forme

$$y'' = \varphi(x,y,z) \cdot y' + \psi(x,y,z), \tag{7bis}$$

φ et ψ étant deux fonctions de x, y, z. Nous devons satisfaire à la fois à la première équation (6), $y' = f(x,y,z)$, et à l'équation (7bis). Or regardons ces deux équations comme deux équations ordinaires par rapport aux quantités x, y, z, y', y'' et *éliminons* z entre les deux (*voir* n° **329**) : nous obtenons, comme résultat de l'élimination, une nouvelle relation ou équation, où n'entrent plus que les lettres x, y, y' et y'' : c'est *une équation du second ordre*

$$F(x,y,y',y'') = 0,$$

dont l'intégration donnera les fonctions y *qui satisfont à notre problème*. Une fois y (et par suite y') connus, la relation implicite $y' = f(x,y,z)$ fera connaître z.

[1] En d'autres termes, nous ***résolvons*** le système des équation (5) par rapport aux deux lettres ou quantités y' et z' [voir chap. I, §§ 4 et 8].

[2] Les deux membres sont des fonctions de x (puisque les quantités y et z sont elles-mêmes fonctions (inconnues) de x) et comme ils sont égaux quel que soit x, leurs dérivées sont égales aussi.

471. Intégrale générale. — L'équation différentielle $y' = f(x)$, ou $y' - f(x) = 0$, dans laquelle $f(x)$ est la dérivée d'une fonction $F(x)$, admet comme solutions (**467**), les fonctions primitives de $f(x)$, obtenues en donnant à la constante C, dans l'intégrale $F(x) + C$, toutes les valeurs possibles [voir § *5*]. Nous conviendrons d'appeler *intégrale générale de l'équation* l'intégrale indéfinie $F(x) + C$, (dans laquelle la valeur de C reste indéterminé), et *intégrale* ou *solution particulière* toute fonction primitive particulière de $f(x)$ [obtenue en donnant à C une valeur déterminée]. Pour indiquer la présence de la constante C (appelée *constante d'intégration*) dans l'expression de l'intégrale générale, nous dirons que cette intégrale générale *dépend d'une constante d'intégration arbitraire.*

Considérons maintenant l'équation

$$y'' - f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad y'' = f(x).$$

Elle nous donne (puisque y'' est la dérivée de y') : $y' = F(x) + C$, où C est une constante arbitraire. Supposons que nous connaissions l'intégrale indéfinie, $F_1(x) + C_1$, de $F(x)$: nous saurons alors que y, fonction primitive de $F(x) + C$, a pour expression

$$F_1(x) + Cx + C_1$$

où C et C_1 sont deux constantes qui ont des valeurs arbitraires : cette expression est encore appelée *intégrale générale* de l'équation : elle dépend, cette fois, de *deux* constantes d'intégration.

Nous étendrons facilement les remarques et définitions qui précèdent à l'équation d'ordre n, $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$. Si l'intégrale générale de cette équation est calculable, elle dépend de n constantes d'intégration arbitraires.

472. — Cela dit, considérons une équation quelconque du premier ordre entre y et x,

$$F(x, y, y') = 0; \tag{8}$$

si je trouve *une* fonction y de x qui satisfasse à l'équation (8), je dirai que cette fonction en est une *intégrale* ou *solution particulière*. Si je trouve une solution dans l'expression de laquelle entre une constante arbitraire C [c'est-à-dire **une fonction dépendant de**

C, qui satisfasse à l'équation quelle que soit la valeur donnée à cette quantité], je dirai que *cette solution* (*où je laisse* C *indéterminé*) est l'*intégrale générale* de l'équation (8). On a prouvé rigoureusement, — mais par des procédés de démonstration que nous ne pouvons pas exposer ici — qu'une équation différentielle ne saurait avoir plusieurs intégrales générales. Si donc une équation avait d'autres solutions que les intégrales particulières déduites de l'intégrale générale en particularisant la valeur de C, ces solutions seraient nécessairement en nombre fini (leur expression ne contiendrait aucune constante arbitraire, *vide infra*, n° **491**).

473. — Il nous est facile d'illustrer ces définitions en formant autant d'équations différentielles du premier ordre, qu'il nous plaira, dont l'intégrale générale nous soit connue. Considérons en effet une relation implicite quelconque entre y et x,

$$f(x,y,C) = 0, \tag{9}$$

dans l'expression de laquelle entre une constante C.

Nous avons, par dérivation (n° **444**), la relation

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0, \tag{10}$$

où les dérivées partielles f'_x et f'_y dépendent en général de C : cette relation est satisfaite, *quel que soit* C, lorsque l'on prend pour y la valeur de la fonction implicite définie par (9).

Regardons alors, pour un moment, la relation (9) comme une équation algébrique ou transcendante dont l'inconnue est C, et supposons que nous sachions *éliminer* la quantité C entre les deux équations (9) et (10) : nous obtenons ainsi une relation entre x, y et y' qui est une équation différentielle (ne contenant pas C) : la fonction implicite définie par la relation (9), pour une valeur arbitraire de C, est l'intégrale générale de cette équation.

474. *Exemple*. — Considérons les fonctions y de x définies par la relation $y^2 - 2Cx = 0$ où C est arbitraire. En dérivant par rapport à x, nous en tirons, $-2C + 2yy' = 0$; ou $C = yy'$. Portant dans la relation proposée, nous avons l'équation différentielle.

$$y^2 - 2xyy' = 0 \quad \text{ou} \quad 2xy' - y = 0,$$

dont la relation $y^2 - 2Cx = 0$ définit l'*intégrale générale*. En donnant à C une valeur particulière, par exemple 2, nous aurons une *intégrale particulière* $y^2 - 4x = 0$ ou $y = 2\sqrt{x}$.

475. — L'*intégrale générale* d'une équation du second ordre (à une fonction inconnue) sera, par définition [1], une solution dans l'expression de laquelle entrent *deux* constantes d'intégration qui restent indéterminées. En éliminant les constantes C et C_1 entre une relation implicite $f(x,y,C,C_1) = 0$ et les relations obtenues par dérivation [2]

$$f_x' + f_y' \cdot y' = 0, \quad f''_{x^2} + f''_{xy} \cdot y' + f''_{y^2} \cdot y'^2 + f_y' \cdot y'' = 0,$$

on forme une équation différentielle du second ordre dont l'intégrale générale est la fonction implicite $y(x)$ définie par la relation d'où l'on est parti.

Exemple. — Considérons l'ensemble des fonctions définies par la relation

$$y = A(x + Bx^2) \tag{11}$$

où A et B sont deux constantes arbitraires. Les variables y et x figurant ici séparément dans les deux membres de l'égalité, la dérivation par rapport à x se fait immédiatement sans qu'il soit nécessaire de recourir à la théorie des dérivées partielles. Nous avons :

$$y' = A(1 + 2Bx) = A + 2ABx, \quad y'' = 2AB.$$

Etant donné cette valeur de $2AB$, nous pouvons écrire

$$y' = A + y''x \quad \text{ou} \quad A = y' - y''x.$$

[1] On démontre ici encore que cette intégrale est nécessairement unique.

[2] La première dérivation se fait comme au n° 473. Je dérive ensuite par rapport à x l'expression $f'_x + f'_y . y'$. La dérivée de f'_x est f''_{x^2} [ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, voir n° 445]. La dérivée du produit $f'_y . y'$ est égale à $\frac{df'_y}{dx} y' + f'_y \frac{dy'}{dx}$. Or $\frac{dy'}{dx} = y''$, et, d'autre part, d'après la règle du n° 443 : $\frac{df'_y}{dx} = \frac{\partial f'_y}{\partial x} + \frac{\partial f'_y}{\partial y} y'$; or $\frac{\partial f'_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$, et $\frac{\partial f'_y}{\partial y} = f''_{y^2}$ par définition.

Donc, en portant dans (11) : $y = (y' - y''x)\,x + \frac{y''}{2}\,x^2$, ce qui donne, toutes réductions faites

$$y''x^2 - 2y'x + 2y = 0.$$

Les fonctions (y) constituent l'intégrale générale de cette équation. Toute fonction (y) particulière, obtenue en donnant à A et B des valeurs déterminées, — par exemple :

$$y = x - 7x^2 \quad \text{ou} \quad y = 3\,(x + 2x^2),$$

est une « intégrale particulière ».

476. — On étendra facilement les considérations et définitions qui précèdent à une équation d'ordre quelconque. D'une manière générale, *l'intégrale générale d'une équation d'ordre n contiendra n constantes arbitraires*.

477. Conditions initiales. — On établit dans la théorie générale des équations différentielles qu'une équation (8) du premier ordre possède en général une *intégrale particulière et une seule qui prend une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable*.

Nous ne sommes pas actuellement en mesure de démontrer ce théorème qui d'ailleurs — au point où en est notre théorie des fonctions — ne saurait même être regardé comme vrai sans exceptions (voir **478**) : nous pouvons, cependant indiquer la voie à suivre pour obtenir, *en admettant qu'elle existe*, l'intégrale de (8) qui satisfait aux conditions requises.

L'expression de l'intégrale générale est, d'après le n° **472**, de la forme $y = \varphi\,(x, C)$, l'expression de y dépendant à la fois de la variable x et de la constante d'intégration C. Il s'agit donc de déterminer une valeur de C telle que pour $x = x_0$ on ait $y = y_0$, c'est-à-dire telle que $\varphi\,(x_0, C) = y_0$. Or cette dernière relation, où x_0 et y_0 sont connus, peut être considérée comme une équation algébrique ou transcendante dont l'inconnue est C. Elle détermine donc la ou les valeurs de C qui répondent à la question posée.

Pour exprimer que les quantités x_0 et y_0 sont les conditions qui déterminent une intégrale particulière, on dit que ces valeurs ou

quantités sont des *conditions initiales* (cf. n° **395**) *définissant l'intégrale*.

On démontre pareillement qu'une équation du second ordre (supposée intégrable) possède en général une intégrale particulière et une seule qui prend une valeur donnée et dont la dérivée prend une valeur donnée pour une valeur donnée x_0 de la variable. Les trois valeurs données, que je désignerai par exemple par x_0, y_0, y'_0, constituent les *conditions initiales* définissant une intégrale particulière de l'équation.

L'étude des équations d'ordre quelconque conduira à des conclusions semblables.

478. Le problème de l'intégration. — L'intégration d'une équation différentielle

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

où F est une fonction connue de x, y, y', y'', ... est-elle une opération toujours possible ? Non, évidemment : car la simple détermination d'une intégrale indéfinie n'est point, elle-même, toujours possible. Ainsi nous sommes avertis à l'avance que nous ne réussirons pas à intégrer toutes les équations différentielles que nous pourrons imaginer. Il n'en est que plus intéressant de noter et de mettre à part les équations que nous pouvons regarder comme « intégrables ».

Mais nous ne voulons pas répéter ici l'étude qui a été faite au § *5*. Nous ne nous arrêterons donc point aux calculs d'intégrales indéfinies que peut supposer l'intégration des équations, et nous nous poserons simplement la question suivante : *Comment peut-on ramener le problème de l'intégration d'une équation différentielle au calcul d'une ou de plusieurs intégrales indéfinies ?* Si, pour un type donné d'équation, nous connaissons un moyen d'atteindre ce résultat, nous déclarerons que ce type est *soluble* ou *intégrable* [1] : nous ne pourrons, en effet, être arrêtés dans l'intégration d'une équation de ce type que par une difficulté relevant du § *5*.

[1] On dit souvent en précisant « intégrable par des quadratures », le mot *quadrature* signifiant « calcul d'une intégrale indéfinie » (450).

479. Transformation des équations différentielles. — Pour intégrer les équations différentielles il faut en général, comme il arrive d'ordinaire en algèbre, prendre des détours : il est le plus souvent nécessaire de commencer par *transformer* les équations proposées en des équations *équivalentes*.

Deux équations différentielles relatives aux mêmes variables [par exemple x et y] sont dites équivalentes si elles admettent la même intégrale générale (c'est-à-dire si elles sont satisfaites par les mêmes fonctions y de x). Envisageons une équation de la forme $F(x, y, y') = 0$ dont le premier membre soit une fonction algébrique [1] de x, y, y' : il est clair que, si nous considérons pour un instant cette équation comme une équation algébrique contenant trois variables x, y, y', et si nous remplaçons cette équation par une équation équivalente au sens du n° **326**, nous obtenons une nouvelle équation différentielle équivalente à la première. Nous dirons alors que celle-ci a subi une *transformation algébrique*.

Ainsi les équations

$$y' = xy'^2 + y^2, \quad y' - xy'^2 - y^2 = 0, \quad 3(y' - xy'^2 - y^2) = 0$$

sont des équations équivalentes.

L'une des transformations algébriques les plus usitées, dans le cas où l'équation est du premier ordre, est celle qui consiste à [2] « résoudre l'équation par rapport à y' », c'est-à-dire à former l'expression dépendant de x et y à laquelle doit être égale la quantité y' pour que la relation $F(x, y, y') = 0$ ait lieu.

Ainsi l'équation

$$y'^2 + xy' + x^2y = 0$$

[1] Nous nous bornons à ce cas pour simplifier notre exposé; on étendrait aisément les considérations qui vont suivre au cas où F serait fonction transcendante; si F était transcendante, il est vrai, on ne saurait plus parler, au sens rigoureux des mots d'une « transformation algébrique » de l'équation; cependant, pour simplifier le langage, nous nous permettrons d'appeler en tous cas « algébrique » (par convention spéciale) toute « transformation » qui change l'équation en une équation équivalente au sens du n° 326.

[2] Ou « tirer » y' de l'équation, que l'on résout comme une équation algébrique dont y' serait l'inconnue.

se transforme en

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3y}}{2}.$$

· Les équations différentielles d'ordre supérieur au premier se prêtent à des transformations semblables.

Mais les transformations les plus fécondes seront (comparer le n° 325), des transformations indirectes, lesquelles font intervenir des variables auxiliaires prenant provisoirement la place des variables proposées (variables principales). Ces transformations sont généralement dénommées « changements de variables ».

480. Changement de variables. — Considérons une équation différentielle entre x et y, par exemple l'équation du premier ordre ordre

$$F(x, y, y') = 0. \tag{12}$$

Un changement de variables relatif à cette équation peut porter, soit sur la variable dépendante y, soit sur la variable indépendante, soit sur toutes deux.

Supposons d'abord que nous conservions la variable x et prenions comme fonction inconnue de x une nouvelle variable v, définie en tant que fonction de x et y par une *relation connue*, $v = g(x, y)$. Cette relation définit inversement y comme fonction de v et de x. Supposons en particulier (le changement de variable ne sera d'ordinaire praticable qu'en ce cas) que nous sachions exprimer *explicitement* y en fonction de x et v : y s'exprimera par une égalité de la forme

$$y = \varphi(x, v). \tag{13}$$

Dérivons cette égalité par rapport à x, en nous rappelant que v est une fonction de x dont la dérivée peut être désignée par v' : nous obtenons

$$y' = \varphi'_x + v'\varphi'_v. \tag{14}$$

Remplaçant alors, dans l'équation (12) y et y' par leurs expressions (13) et (14) en fonction de x, v et v' nous aurons une équation différentielle entre x et v, qui équivaut à l'équation proposée. Si

l'on trouve une solution de cette équation, il suffira de remplacer v par cette solution dans la relation (13) pour avoir une fonction y de x qui soit solution de l'équation (12). L'opération sera donc avantageuse *toutes les fois que l'équation en x et v sera plus simple que l'équation en x et y*. Or la fonction φ qui définit le changement de variable (13) est arbitraire. Le tout sera donc de la choisir d'une manière convenable.

481. — Pour passer des variables x et y à *deux nouvelles variables* u et v, il faut se donner deux relations de la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v) \tag{15}$$

définissant x et y comme fonctions de u et v [et inversement u et v comme fonctions de x et y]. Considérons, par exemple, la variable u comme la variable indépendante : la dérivation des égalités (15) par rapport à u nous donne

$$x'_u = f'_u + v' f'_v, \qquad y'_u = \varphi'_u + v' \varphi'_v.$$

Or $y'_x = y'_u u'_x = \dfrac{y'_u}{x'_u}$. Donc :

$$y'_x = \frac{\varphi'_u + v'\varphi'_v}{f'_u + v' f'_v}. \tag{16}$$

Remplaçant, dans l'équation différentielle (12), x, y et y' par leurs expressions en fonction de u, v, v' données par les égalités (15) et (16), nous obtenons une équation différentielle entre x, v et v' qui équivaut à l'équation (12).

482. Cas d'une équation du second ordre. — On définira de la même manière le changement de variable ou de variables relatif à une équation du second ordre ou d'ordre supérieur.

Proposons-nous, par exemple, d'effectuer le changement de variable (13) sur une équation de la forme

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{17}$$

En dérivant l'égalité (13), nous obtenons l'égalité (14) ; en dérivant celle-ci [d'après les règles du n° **443**] nous avons :

$$y'' = \varphi''_{x^2} + 2v'\varphi''_{xv} + v'^2\varphi''_{v^2} + v''\varphi'_v.$$

L'équation (17) se transforme donc en une équation du second ordre

$$F[x, \varphi(x, v), \varphi'_x + v'\varphi'_v, \varphi''_{x^2} + \ldots + v''\varphi'_v] = 0,$$

dont le premier membre est devenu une fonction de x, v, v' et v''.

Tel est le principe de la méthode du changement de variables, dont le lecteur trouvera de nombreuses applications dans les deux paragraphes qui vont suivre. Ces paragraphes contiennent le relevé des équations différentielles intégrables les plus classiques du premier ordre et d'ordre supérieur.

7. — *Équations classiques du premier ordre*

483. Equations à variables séparées. — On appelle ainsi une équation qui se présente sous la forme, ou qu'une transformation algébrique[1] permet de ramener à la forme [2] :

$$y' \cdot \psi(y) = \varphi(x), \tag{1}$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant respectivement des fonctions de la variable indépendante x et de la variable dépendante y.

Supposons que nous puissions former une fonction primitive $\Phi(x)$ de $\varphi(x)$ et une fonction primitive[3] $\Psi(y)$ de la fonction de y, $\psi(y)$. D'après la règle du n° **417**, le produit $y' \cdot \psi(y)$ sera la dérivée *par rapport à x* de $\Psi(y)$ [qui est une fonction composée de x, puisque, y est, par hypothèse, une fonction de x, solution inconnue de l'équation (1)].

[1] Je donne ici à la locution « transformation algébrique » le sens général qui a été indiqué p. 452, note 1.

[2] Le procédé qui consiste à mettre une équation différentielle sous la forme (1) et à l'intégrer comme nous l'expliquons ci-dessous, est appelé par JEAN BERNOUILLI : séparation des variables (*separatio indeterminatarum*) [*Acta eruditorum*, novembre 1694, *Œuv.*, t. I, p. 123-25].

[3] J'entends : fonction primitive par rapport à la variable y, c'est-à-dire telle que la dérivée par rapport à y, $\frac{d\Psi}{dy}$ soit égale à $\psi(y)$.

Les deux fonctions de x, $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$, ayant des dérivées égales d'après (1), diffèrent d'une quantité constante; donc :

$$\Psi(y) = \Phi(x) + C. \tag{2}$$

Toute fonction y de x solution de l'équation (1) satisfera à la [1] relation (2) (quel que soit x) pour une certaine valeur particulière de C; et réciproquement l'on vérifie immédiatement que toute fonction y définie par la relation (2), (pour une valeur particulière quelconque de C) est solution de (1). Donc, conformément à la définition du n° **472**, nous dirons que la relation (2) nous donne *l'intégrale générale* de l'équation (1).

Remarque. — Si l'on se sert des notations introduites au n° **452**, on peut écrire la relation (2) sous la forme

$$\int \psi(y)\, dy = \int \varphi(x)\, dx + C.$$

484. *Exemple.* — L'équation $\frac{y'}{y} = 3x^2 + 1$ a pour intégrales les fonctions définies par la relation

$$Ly = x^3 + x + C \quad \text{(C constante arbitraire)},$$

ou, si l'on préfère,

$Ly + LC' = x^3 + x$, (C' constante arbitraire), d'où $C'y = e^{x^3+x}$.

485. Equation homogène. — On appelle ainsi une équation qui, par transformation algébrique, peut être mise sous la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3}$$

le second membre étant une fonction connue du rapport $\frac{y}{x}$. On démontrera facilement que dans le cas où l'équation est mise sous forme polynomale, soit

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{ou encore} \quad \varphi(x, y, y') = \psi(x, y, y'),$$

[1] La relation (2) peut être regardée comme une relation implicite définissant y comme fonction de x.

F, φ, ψ étant des polynomes, il faut et suffit pour que la condition énoncée soit remplie *que* F *soit homogène par rapport aux deux variables* x *et* y, *ou que* φ *et* ψ *soient tous deux homogènes* (¹) *par rapport à* x *et* y *et de même degré.* D'où le nom d' « équation homogène ».

Pour intégrer l'équation (3) prenons comme variable auxiliaire (variable v) le rapport $\frac{y}{x}$ en posant $y = vx$. Dérivant par rapport à x, nous avons $y' = v + xv'$; l'équation (3) devient donc

$$v + xv' = f(v) \quad \text{ou} \quad xv' = f(v) - v,$$

ou enfin $\frac{v'}{f(v) - v} = \frac{1}{x}$, équation à variables séparées qui s'intègre comme nous l'avons vu au n° **483**.

486. *Exemple.* — Considérons l'équation

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}. \tag{4}$$

En divisant les deux membres par x, nous avons l'équation équivalente

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

Effectuant le changement de variable ci-dessus indiqué, $y = xv$, nous obtenons l'équation

$$v + xv' = v + \sqrt{1 - v^2} \quad \text{ou} \quad \frac{v'}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{x}.$$

Appliquant à cette dernière équation la méthode du n° **483**, nous obtenons l'intégrale générale

$$\text{arc sin } v = \text{L}x + \text{const.} = \text{LC}x, \quad \text{(C constante) (²)},$$

(¹) *Vide supra*, n° 292. Ainsi, dans l'exemple du n° 486, l'équation (4) peut s'écrire $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$ ou, en s'élevant au carré : $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$, équation dont les deux membres sont des polynomes homogènes du second degré en x et y.

(²) Voir la remarque faite p. 431 note 3).

d'où, d'après la définition de l'arc sinus :

$$v = \sin(Cx) \quad \text{ou} \quad y = x \sin(Cx).$$

503. Type d'équation se ramenant à une équation homogène. — Soit proposée une équation de la forme

$$(6) \qquad y' = F\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \qquad [a, b, \dots c' \text{ constantes}],$$

dont le second membre est supposé être une fonction connue du rapport $\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$. Pour intégrer cette équation, commençons par déterminer les solutions du système d'équations linéaires à deux inconnues

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0;$$

ce sont ([1]) (voir n° **365**) $x = \alpha = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$, $y = \beta = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$; puis effectuons le double changement de variable défini (cf. n° **481**) par les égalités

$$x = f(u, v) = \alpha + u, \qquad y = \varphi(u, v) = \beta + v.$$

Nous avons $f'_u = 1$, $\varphi'_u = 0$, $f'_v = \varphi'_u = 0$; donc, d'après la règle du n° **481**, l'équation (6) devient :

$$v' = F\left[\frac{a(\alpha + u) + b(\beta + v) + c}{a'(\alpha + u) + b'(\beta + v) + c'}\right].$$

Mais, d'après la définition de α et β, la fraction entre crochets se réduit à $\frac{au + bv}{a'u + b'v}$; nous aurons donc en divisant les deux termes de cette dernière fraction par la même quantité u, l'équation homogène de forme (3) :

$$v' = F\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{a' + b'\frac{v}{u}}\right).$$

([1]) Nous nous plaçons dans l'hypothèse où le système des deux équations admet un et un seul système de solutions $x = \alpha$, $y = \beta$.

504. Equations différentielles linéaires. — Une équation différentielle du premier ordre est dite *linéaire* si elle se présente ou peut être mise sous forme

$$(7) \qquad y' \cdot f_1(x) + y \cdot f_2(x) + f_3(x) = 0,$$

le premier membre étant un *polynôme du premier degré en y et y'*, dont les coefficients $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ peuvent être d'ailleurs des fonctions quelconques de x.

Posant $\varphi(x) = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$, $\quad \psi(x) = -\frac{f_3(x)}{f_1(x)}$, nous pouvons écrire ainsi l'équation (7) :

$$(8) \qquad y' = y \cdot \varphi(x) + \psi(x), \text{ ou :}$$

$$(8^{bis}) \qquad \frac{y'}{y} = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y}.$$

Nous allons faire un changement de variable défini comme il suit. Posons

$$(9) \qquad y = uz,$$

u étant tel que

$$\frac{u'}{u} = \varphi(x), \quad \text{d'où} \quad \log u = \int \varphi(x)\,dx, \quad \text{et par suite} \quad u = e^{\int \varphi(x)dx},$$

expression dans laquelle nous donnerons à la constante arbitraire une valeur déterminée quelconque [ce qui revient à dire que nous prenons pour Lu une fonction primitive quelconque de $\varphi(x)$]. Dans ces conditions, — u étant une fonction connue de x, — l'égalité (9) définit un changement de variable [passage de la variable y à la variable z] au sens du n° **480** ; d'ailleurs l'égalité (9), où l'on considère y, u, z comme trois fonctions de x, nous donne, d'après la propriété fondamentale des dérivées logarithmiques (**412**).

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{z'}{z}.$$

Portant dans l'équation (8 bis), nous avons

$$\frac{u'}{u} + \frac{z'}{z} = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y}.$$

ou, d'après la définition de u et de z :

$$\frac{z'}{z} = \frac{\psi(x)}{y} = \frac{\psi(x)}{uz}, \qquad \text{donc} \qquad z' = \frac{\psi(x)}{u}.$$

Ainsi nous connaissons la dérivée de z puisque u est une fonction connue de x ; donc nous aurons z en calculant l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x)}{u}\, dx \qquad \text{ou (1)} \qquad \int \left[\psi(x) \cdot e^{-\int \varphi(x) dx}\right] dx.$$

Nous obtiendrons ainsi finalement (2)

$$y = uz = e^{\int \varphi(x) dx} \cdot \int \left[\psi(x) e^{-\int \varphi(x) dx}\right] dx.$$

489. Equation de Bernouilli. — Jacques Bernouilli posa en 1695, à propos d'une question de mécanique, le problème suivant (3) : *Aequationem* $ay' = y \cdot p + b \cdot y^n \cdot q$, *— ubi a et b quantitates datas et constantes, n potestatem quamvis literæ y, p et q*

(1) D'après la valeur de u et en nous rappelant que, quel que soit l'exposant α, $\frac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha}$.

(2) *Exemple.* — Considérons l'équation

$$xy' + y - \cos x = 0, \qquad \text{ou} \qquad y' = -\frac{y}{x} + \cos x.$$

Je pose

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{x}, \qquad \text{d'où} \qquad \log u = -\log x,$$

égalité à laquelle on satisfait en prenant $u = x^{-1}$. Posant alors $y = uz$, j'ai

$$z = \int \frac{\cos x}{u}\, dx = \int x \cos x dx.$$

Intégrons par parties (n° 456) en posant

$$u = \sin x, \quad v = x, \quad \text{d'où} \quad u = \cos x. \quad v' = 1,$$

j'aurai

$$\int x \cos x dx = \int u'v dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

D'où $\quad y = uz = \sin x + \dfrac{\cos x + C}{x}.$

On vérifiera facilement que les fonctions y ainsi définies satisfont bien à l'équation proposée.

(3) *Acta eruditorum*, déc. 1695, p. 553. Conformément à la notation différentielle que nous exposerons plus loin (*Trois. Liv.*, chap. II), Bernouilli écrit $ady = ypdx + by^n qdx$.

quantitates utcumque datas per x denotant — *construere* [c'est-à-dire : résoudre l'équation $ay' = yp + by^nq$, où a et b sont deux constantes, y^n une puissance de y et p et q deux fonctions de x]. Ce problème (1) fut repris en 1697 par Jean Benouilli (*Acta eruditorum*, Mars 1697) : on en ramène fort aisément la solution à l'intégration d'une équation linéaire. En effet, l'équation de Jacques Benouilli peut s'écrire :

$$a.\frac{y'}{y^n} = p(x).y^{1-n} + b.q(x). \tag{10}$$

Faisons alors un changement de variable en prenant pour nouvelle fonction inconnue la quantité $z = y^{1-n}$; nous avons $z' = (1 - n)y^{-n}y'$; donc l'équation (10) équivaut à

$$\frac{a}{1-n}z' = p(x).z. + b.q(x), \tag{11}$$

équation linéaire que l'on sait intégrer (n° **488**).

490. Equation de Riccati (2). — On appelle ainsi les équations de la forme

$$y' = \varphi_0(x) + y.\varphi_1(x) + y^2.\varphi_2(x), \tag{12}$$

dont le second membre est un polynome du second degré en y, ayant pour coefficients des fonctions quelconques de x. L'équation (12) n'est intégrable au sens du n° **478** que si l'on en connaît déjà une *intégrable particulière* ; en ce cas elle peut être ramenée à une équation de Bernouilli.

Supposons en effet que nous connaissions une fonction u qui

(1) Si l'on veut écrire la forme générale de l'équation de Bernouilli, il est inutile d'y introduire des coefficients constants a et b ; on écrira :

$$y' = p(x).y + q(x).y^n,$$

$p(x)$ et $q(x)$ désignant deux *fonctions* quelconques de x.

(2) Le comte vénitien Jacopo Riccati (1676-1754) n'étudia en réalité qu'une équation particulière du type (12), l'équation

$$nx^{m+n-1} = \frac{du}{dx} + u^2x^{-n},$$

oú m et n sont des nombres connus (*Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus*, apud *Actorum eruditorum supplementa*, t. VIII, 1724, p. 73).

satisfasse à l'équation (12), et faisons le changement de variable $y = u + z$ [c'est-à-dire passons de la variable y à la variable $z = y - u$]. L'égalité (12) nous donne

$$y' = u' + z' = \varphi_0(x) + (u + z)\,\varphi_1(x) + (u + z)^2\,\varphi_2(x).$$

Développant le dernier membre, et remarquant que

$$u' = \varphi_0(x) + u\,.\,\varphi_1(x) + u^2\,.\,\varphi_2(x),$$

puisque u est par hypothèse solution de l'équation, j'ai finalement

$$z' = z\,.\,\varphi_1(x) + 2uz\,.\,\varphi_2(x) + z^2\,.\,\varphi_2(x), \text{ ou : } z' = [\varphi_1(x) + 2u\,.\,\varphi_2(x)]z + z^2\,.\,\varphi^2(x),$$

ce qui est, par rapport à z une équation de Bernouilli.

491. Equation de Clairaut. — Nous n'avons étudié jusqu'ici que des équations rationnelles [1] par rapport à y et résolues par rapport à y', — où par conséquent ne figurait que la première puissance de la dérivée y'. Il en est autrement de l'équation de Clairaut, et l'étude de cette équation va nous conduire à certaines constatations nouvelles et intéressantes.

Considérons une équation de la forme [2]

$$y - xy' = f(y') \tag{13}$$

où le second membre est une fonction arbitraire de la dérivée de la fonction inconnue.

Dérivons par rapport à x, les deux membres de l'égalité (13). Remarquant que la dérivée de y' est la dérivée seconde y'', et que la dérivée de $f(y')$ par rapport à x est par suite [3] $(y')\,.\,f'y''$, nous obtenons :

$$y' - (xy'' + y') = f'(y')\,.\,y'', \quad \text{donc} \quad -xy'' = f'(y')\,.\,y'', \quad \text{ou}$$

$$y''\,.\,[x + f'(y')] = 0. \tag{14}$$

[1] Je veux dire : des équations dont les deux membres, *considérés comme fonctions de y seule*, étaient fonctions rationnelles.

[2] Cette équation fut étudiée par CLAIRAUT en 1734 [*Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée*, Mém. de l'Ac. Royale des Sciences, 1734, p. 196 suiv.].

[3] En désignant par $f'(y')$ la dérivée de $f(y')$ par rapport à y', c'est-à-dire $\dfrac{df(y')}{dy'}$.

Toute fonction y de x qui satisfait à l'équation (13) satisfera nécessairement à l'équation (14). Quelles sont donc les solutions de l'équation (14)?

Ce sont d'abord les fonctions y dont la dérivée seconde y'' est nulle, dont par conséquent la dérivée première y' est constante. Il est facile de voir, que parmi ces fonctions, une infinité vérifient l'équation (13). En effet si $y' = C$ (C *constante*) il suffit que $y - Cx = f(C)$ pour que l'équation (13) soit satisfaite. Donc les fonctions $y = Cx + f(C)$ où C est une constante arbitraire sont toutes solutions de l'équation (13) : elles en constituent *l'intégrale générale*.

Mais l'équation (14) n'admet pas seulement les solutions que nous venons de considérer. Elle est encore satisfaite si y est une fonction telle que $x + f'(y') = 0$: si donc l'on peut déterminer une fonction y vérifiant à la fois les deux égalités

$$(15) \qquad \begin{cases} x + f'(y') = 0 \\ y - xy' = f(y'), \end{cases}$$

cette fonction sera solution de l'équation (13). Or considérons les équations (15) comme deux équations algébriques ou transcendantes entre lesquelles nous *éliminerons* la quantité y' [voir n° **329**] : il nous restera une relation entre x et y (ne contenant d'ailleurs pas de constante arbitraire) qui définit implicitement une intégrale de l'équation (13) : cette intégrale ne fait pas partie des intégrales déjà trouvées (ces dernières sont des polynomes du premier degré en x, tandis que la nouvelle intégrale sera en général une fonction bien plus compliquée) ; elle est appelée « *intégrale singulière* ».

Nous voyons, par cet exemple, qu'une équation différentielle est susceptible d'admettre d'autres solutions que celles qu'on obtient en particularisant la valeur de la constante C dans l'expression de l'intégrale générale.

On peut d'ailleurs démontrer que l'équation de Clairaut n'a pas d'autres intégrales que son intégrale singulière et les intégrales $y = Cx + f(C)$.

492. *Exemple*. — Considérons l'équation

$$y = xy' + \frac{a}{y'},$$

où a est une constante. D'après ce qui précède, cette équation admet pour intégrale générale les polynomes $y = Cx + \frac{a}{C}$ (C quelconque). Elle admet pour intégrale singulière la fonction obtenue en éliminant y' entre les relations

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{a}{y'^2} &= 0 \\ y = xy' + \frac{a}{y'} & \end{aligned}\right\} \qquad \text{puisqu'ici} \quad f(y') = \frac{a}{y'}, \quad f'(y') = \frac{-a}{y'^2}.$$

Or élevons au carré la seconde relation ; elle donne

$$y^2 = x^2y'^2 + 2ax + \frac{a^2}{y'^2}.$$

Remplaçant y'^2 par sa valeur $\frac{a}{x}$ tirée de la première relation, j'ai la relation implicite cherchée :

$$y^2 = x^2 \cdot \frac{a}{x} + 2ax + a^2 \cdot \frac{x}{a}, \qquad \text{ou} \qquad y^2 = 4ax,$$

qui définit l'intégrale singulière.

8. — Equations classiques du second ordre et d'ordre supérieur.

493. Equations ne contenant pas y. — Les plus simples des équations du second ordre (à une fonction inconnue) sont celles qui ne contiennent pas la fonction inconnue y, mais seulement ses dérivées première et seconde, et qui, par conséquent, se présentent sous la forme de relations entre x, y' et y'' :

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{1}$$

Une telle équation peut toujours être regardée comme une équation du premier ordre relative à la fonction inconnue y', puisque y'' est la dérivée de y'. Son intégration relève donc du paragraphe précédent. Si la résolution est possible, nous obtiendrons y' sous

forme d'une fonction de x et d'une constante arbitraire, soit $y' = \varphi(x, C)$, et nous aurons par conséquent, $y = \int \varphi(x, C)\,dx$.

Ce sera là l'intégrale générale (1) de l'équation (1).

494. Equations ne contenant pas x. — Une équation du second ordre ne contenant pas explicitement la variable x est de la forme

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{2}$$

le premier membre étant fonction de y et des deux premières dérivées.

Nous allons effectuer un changement de variables en prenant comme nouvelle variable dépendante la quantité y', que je désignerai par z, et comme nouvelle variable indépendante la variable y.

Si nous posons $z = y'$, nous aurons par définition $\frac{dz}{dx} = y''$; d'ailleurs si l'on désigne par z'_y ou $\frac{dz}{dy}$ la dérivée de z par rapport à y, on aura $z'_x = z'_y \,.\, y'_x$, d'après la règle des fonctions composées (n° **417**) donc, d'après la définition de z :

$$y'' = z'_y \,.\, z.$$

Remplaçons y'' par cette expression, et y' par z, dans l'équation (2) : elle devient une relation entre y, z et z'_y, donc une équation différentielle du premier ordre qui définit z comme fonction de y.

(1) *Exemple.* — Considérons l'équation

$$xy'' = -y' + x.$$

Par rapport à y', cette équation est linéaire du premier ordre. On trouvera, en appliquant la méthode du n° 488, qu'elle a pour intégrale générale

$$y' = \frac{x}{2} + \frac{C}{x} \qquad \text{(C constante arbitraire)};$$

nous aurons donc

$$y = \frac{1}{2}\int x\,dx + C\int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{4} + C \log x + C_1,$$

C_1 étant une seconde constante arbitraire.

Si l'on sait intégrer cette équation, on trouvera une expression de z de la forme

$$z = \varphi(y, C), \qquad \text{(C constante arbitraire)};$$

on aura donc $\quad y' = \varphi(y, C) \quad$ ou $\quad \dfrac{y'}{\varphi(y, C)} = 1,$

équation différentielle à variables séparées par rapport à y et x (nº **483**) qui donne [1] [puisque la fonction primitive de 1 est x]

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C)} = x + C_1 \qquad (C_1 \text{ constante arbitraire}).$$

495. Exemple. — Considérons l'équation

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 1.$$

Posant $z = y'$, nous avons, d'après ce qui précède :

$$z \,.\, (1 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \,.\, z'_y = 1$$

or on vérifie sans peine que le premier membre de cette égalité est la dérivée par rapport à y de la fonction $-(1 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$; le second membre est la dérivée de y ; donc (en remplaçant z par y') :

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = y + C \qquad \text{(C constante arbitraire)}$$

on tire de là :

$$y' = \frac{\sqrt{1 - (y + C)^2}}{y + C}; \quad x = \int \frac{y + C}{\sqrt{1 - (y + C)^2}} dy + C_1,$$

et l'on peut calculer l'intégrale indéfinie du second membre en appliquant la méthode du nº **465**.

Citons encore, à titre d'exemples, les équations

$$y'' = g - \frac{1}{g} y', \quad y'' = g - \frac{1}{g} y'^2$$

[1] Voir la *Remarque* à la fin du nº 483.

qui ont été étudiées par Newton [1], et intégrées par une méthode semblable à celle que nous avons indiquée ci-dessus.

496. Equations linéaires. — Un troisième type d'équation du second ordre que l'on peut quelquefois intégrer est l'équation

$$(3) \qquad y'' f_1(x) + y' f_2(x) + y f_3(x) + f_4(x) = 0,$$

polynome du premier degré en y, y', y'' dont les coefficients sont des fonctions de x.

Telle est l'équation

$$y'' + \mu y = 0 \qquad (\mu \text{ constante})$$

que l'on rencontre dans la théorie de l'attraction universelle et qui a été étudiée par Newton. Nous ne nous arrêterons pas à cette équation, car nous allons pouvoir étudier d'emblée, et tout aussi simplement, les équations linéaires, plus générales, dont l'ordre est quelconque. La théorie de ces équations est l'un des chapitres les plus achevés et les plus riches de l'algèbre, l'un de ceux qui ont conduit aux résultats les plus harmonieux. C'est pourquoi nous allons le développer avec quelques détails.

497. Equations linéaires d'ordre n. — Une équation différentielle d'ordre quelconque n est dite *linéaire* [2] lorsqu'elle est un po-

[1] *Philosophiæ naturalis Principia mathemathica*, 1686-8, *De motu corporum*, sect. II, p. 246 et suiv. Les deuxéquations définissent le mouvement d'un point pesant, d'ordonnée y, descendant le long d'un axe vertical Oy (tourné vers le bas) dans un milieu résistant, la résistance étant proportionnelle à la vitesse y' ou au carré de la vitesse (la variable indépendante est ici supposée être le *temps*, t, dont la position du mobile — c'est-à-dire y — est fonction).

[2] La théorie des équations linéaires fut constituée, dans ses parties principales, au cours de la seconde moitié du XVIIIe siècle. Son principal artisan fut EULER [voir les *Institutiones calculi integralis*, *Volum. secund.*, St-Pétersbourg, 1769, *Pars secunda*, cap. II : *De resolutione æquationum hujus formæ* :

$$Ay + B.\frac{dy}{dx} + C.\frac{d^2y}{dx^2} + D.\frac{d^3y}{dx^3} + E.\frac{d^4y}{dx^4} + \text{etc.} = 0,$$

p. 375 et suiv.; voir aussi *Miscellanea Berolinensia*, 1743]. D'ALEMBERT étudia également les équations linéaires (voir les Mémoires de l'Académie de Turin, *Miscellanea Taurinensia*, 1762, p. 380 et suiv.).

lynome du premier degré par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées successives du premier, du second, ...du $n^{\text{ième}}$ ordre. Une telle équation peut-être écrite sous forme

$$(4)\ f_n(x)\cdot\frac{d^ny}{dx^n}+f_{n-1}(x)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+f_1(x)\cdot\frac{dy}{dx}+f_0(x)\cdot y=X$$

où X et les f sont des fonctions de x (appelées *coefficients* de l'équation).

Les équations linéaires jouissent de remarquables propriétés dont quelques-unes apparaissent immédiatement.

Convenons d'écrire, pour abréger :

$$(5)\qquad \Phi\{u\}=f_n(x)\cdot\frac{d^nu}{dx^n}+\ldots+f_1(x)\cdot\frac{du}{dx}+f_0(x)\cdot u,$$

égalité symbolique dans laquelle u peut désigner une variable quelconque fonction de x. De cette égalité nous tirons aussitôt les suivantes :

$$(6)\qquad \Phi\{Cu\}=C\cdot\Phi\{u\},\qquad \Phi\{u+v\}=\Phi\{u\}+\Phi\{v\}$$
$$\Phi\{C_1u_1+C_2u_2+\ldots+C_pu_p\}=C_1\Phi\{u_1\}+C_p\Phi\{u_p\}.$$

où nous désignons par C, C_1, ... C_p des *constantes* (indépendantes de x) et par u, v, u_1 u_2, .., u_n des fonctions quelconques de x ; en effet, d'après la définition du symbole $\Phi\{\ \}$:

$$\Phi\{Cu\}=f_n(x)\cdot C\cdot\frac{d^nu}{dx^n}+\ldots+f_0(x)\cdot C\cdot u,$$
$$\Phi\{u+v\}=f_n(x)\cdot\left(\frac{d^nu}{dx^n}+\frac{d^nv}{dx^n}\right)+\ldots+f_0(x)\cdot(u+v),\text{ etc.}$$

Appliquées à l'étude de l'équation différentielle (4) les égalités (6) conduisent aux constatations suivantes :

498. Propriétés générales de l'équation linéaire. — I. Supposons que nous connaissions une intégrale particulière, u, de l'équation (4), et que nous ayons déterminé, d'autre part, une intégrale, $v(x)$, de l'équation

$$(7)\qquad \Phi\{y\}=0\ ;$$

Je dis que *la fonction* $u+v$ [ou, plus généralement, $u+Cv$, C étant une *constante* arbitraire] *est une intégrale de l'équation* (4).

En effet, le premier membre de (4) étant, par hypothèse, égal à X pour $y=u$, nous avons $\Phi\{u\}=X$ et nous supposons d'autre part que $\Phi\{v\}=0$; d'ailleurs $\Phi\{u+Cv\}=\Phi\{u\}+C\Phi\{v\}$ donc $\Phi\{u+Cv\}=0$.

L'équation (7) est dite « équation *sans second membre* correspondant à l'équation (4) ».

II. Supposons que nous connaissions plusieurs solutions [1] ou intégrales particulières, y_1, y_2, ... y_p de l'équation sans second membre (7) : je dis que *la fonction* $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_py_p$, où C_1, C_2, ... C_p *sont des constantes arbitraires, est elle aussi une intégrale de l'équation* (7). — C'est là, en effet, une conséquence immédiate des égalités (6).

III. — Supposons enfin que nous connaissions une intégrale particulière, u, de l'équation (4) et p intégrales particulières, y_1, y_2, ..., y_p de l'équation sans second membre correspondante (7) : alors *la fonction* $u+C_1y_1+\ldots+C_py_p$, *où* C_1, ..., C_p *sont* p *constantes arbitraires, est, elle aussi, une intégrale de l'équation* (1).

[1] *Si nous connaissons une intégrale particulière* y_1, *d'une équation de la forme* (7), *nous pouvons effectuer un changement de variable qui ramène cette équation à une équation de même forme et d'ordre moins élevé.* Si, en effet, nous posons $y=y_1z$, en supposant y_1 connu et appelant z une fonction inconnue, nous avons :

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\text{dérivée de}\left[z\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{dz}{dx}\right]=z\frac{d^2y_1}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{d^2z}{dx^2},\ \text{etc.}$$

Remplaçant, dans l'équation (7), y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... par les valeurs ainsi calculées, nous avons une équation différentielle en z, qui est linéaire, d'ordre n, et sans second membre par rapport à n. D'ailleurs, un calcul facile montre que dans cette équation, le coefficient de z est $\Phi\{y_1\}$; ce coefficients est donc nul, puisque y_1 est solution de l'équation $\Phi\{y\}=0$, et l'équation en z est de la forme :

$$(e)\qquad g_n(x)\cdot\frac{d^nz}{dx^n}+g_{n-1}(x)\cdot\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+g_1(x)\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

Si maintenant nous prenons pour fonction inconnue $t=\frac{dz}{dx}$, l'équation (e) devient, par rapport à t, une équation linéaire qui est de la même forme que l'équation (7), mais d'ordre $n-1$ seulement.

Cette propriété est une conséquence des deux précédentes.

De la proposition III nous déduisons la méthode qu'il convient de suivre pour trouver l'intégrale générale d'une équation linéaire d'ordre n telle que (4). L'intégrale générale d'une telle équation est, par définition, une fonction de x et de n constantes arbitraires. Supposons alors que nous calculions, d'une part, *une* intégrale particulière, u, de l'équation (4), et, d'autre part, n intégrales particulières y_1, y_2, ..., y_n de l'équation sans second membre (7). Alors la fonction

$$(8) \qquad u + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

sera une solution de (4) qui dépend de n constantes arbitraires : ce sera, sous certaines conditions que nous allons préciser, l'intégrale générale.

499. Intégrale générale de l'équation sans second membre. Solutions indépendantes. — Supposons que nous connaissions une première intégrale particulière, y_1, de l'équation sans second membre d'ordre n, équation que nous écrirons symboliquement sous la forme (7). Une seconde intégrale ou solution, y_2, sera dite *indépendante* de la première, si elle n'est pas de la forme $C_1 y_1$ [c'est-à-dire si elle n'est pas le produit de la fonction y_1 par une constante]. Une troisième intégrale y_3, sera dite *indépendante des deux premières y_1 et y_2 (supposées connues) si elle n'est pas de la forme* $k_1 y_1 + k_2 y_2$ [où k_1 et k_2 sont des constantes]. Et ainsi de suite. — D'une manière générale, nous dirons que les n solutions y_1, ..., y_n sont indépendantes [on dit aussi : *linéairement indépendantes* ou *distinctes*], s'il n'y en a aucune, parmi elles, qui soit égale à la somme des autres (ou de certaines autres) respectivement multipliées par des constantes k_1, k_2, ...

Cela posé, on peut démontrer rigoureusement que *si les n solutions y_1, y_2, ..., y_n sont indépendantes* [1] *l'expression* (8) *est l'intégrale générale de l'équation* (4).

[1] Il résulte des théorèmes du n° 498 que la fonction (8) est sûrement intégrale de l'équation (4) : on démontre que, réciproquement, *toute* intégrale de (4) est sûrement l'*une* des fonctions (8) [obtenue en donnant aux nombres C certaines valeurs particulières]. — On voit facilement que, si les n so-

500. Equation sans second membre à coefficients constants. — C'est une équation de la forme

$$(9) \qquad \Phi\left\{y\right\} = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 y = 0,$$

où $a_n, \dots, a_0$ sont des constantes (indépendantes de x). Nous allons montrer qu'il est possible de déterminer une constante r telle que la fonction $u = e^{rx}$ soit une solution de l'équation. En effet, une telle fonction u a pour dérivées successives :

$$\frac{du}{dx} = re^{rx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = r^2 e^{rx}, \dots, \quad \frac{d^n u}{dx^n} = r^n e^{rx}.$$

J'en conclus que

$$\Phi\left\{u\right\} = e^{rx}.\psi(r),$$

où $\psi(r)$ est le polynome de degré n en r :

$$\psi(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0.$$

Pour que l'égalité $e^{rx}.\psi(r) = 0$ ait lieu pour toute valeur de la variable x, il faut et il suffit que le nombre r soit une racine du polynome $\psi(r)$.

Ainsi, si nous connaissons des racines $r_1, r_2, \dots, r_p$, du polynome $\psi(r)$, nous en déduisons immédiatement les fonctions de x :

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \dots, \quad y_p = e^{r_p x},$$

qui sont autant d'intégrales particulières de l'équation (9).

lutions $y_1, \dots y_n$ n'étaient pas indépendantes, la fonction (8) pourrait être mise sous la forme d'une fonction qui contiendrait moins de n constantes arbitraires. Supposons, en effet, que

$$y_n = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \dots + K_{n-1} y_{n-1},$$

$K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ étant des constantes ; en remplaçant y_n par cette valeur dans (8) et réunissant les termes en y_1, les termes en y_2, etc., nous obtiendrions

$$y = (C_1 + K_1 C_n) y_1 + (C_2 + K_2 C_n) y_2 + \dots + (C_{n-1} + K_{n-1} C_n) y_{n-1},$$

expression de la forme

$$y = D_1 y_1 + D_2 y_2 + \dots + D_{n-1} y_{n-1},$$

qui contient seulement $(n - 1)$ constantes arbitraires. Une telle expression ne peut pas représenter l'intégrale générale.

On démontre que ces intégrales sont indépendantes : elles fourniront donc l'intégrale générale de l'équation (9) *si toutefois elles sont au nombre de n.*

Il y a lieu, dès lors, de distinguer trois cas :

1er Cas. — Le polynome de degré n, $\psi(r)$, a n racines réelles et distinctes, savoir $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Alors la fonction

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

dans laquelle $C_1, \ldots, C_n$ sont n constantes arbitraires, est l'intégrale générale de l'équation.

Exemple. — Soit proposée l'équation $y'' - y = 0$; le polynome $\psi(r)$ correspondant est $r^2 - 1$: il a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$; j'en conclus que l'intégrale générale de l'équation est $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

2e Cas. — Le polynome $\psi(r)$ a toutes ses racines réelles, mais il y en a qui sont multiples : en ce cas $\psi(r)$ est de la forme

$$\psi(r) = (r - r_1)^{p_1} (r - r_2)^{p_2} \ldots (r - r_k)^{p_k},$$

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ étant des nombres entiers positifs *dont la somme est égale à n*. Pour que les racines $r_1, \ldots, r_k$ nous fournissent n intégrales particulières de l'équation il faudrait que chacune en fournît autant que son ordre de multiplicité contient d'unités : il faudrait, en d'autres termes, que la racine r_1 pût fournir p_1 intégrales, que la racine r_2 en pût fournir p_2, et ainsi de suite. Or il en est bien ainsi car, si $p_1 > 1$, il correspond à r_1 d'autres solutions simples de l'équation que celle que nous avons indiquée. On démontre en effet que :

Si r_1 est une racine double de $\psi(r)$, les deux fonctions $e^{r_1 x}$ et $xe^{r_1 x}$ sont deux intégrales particulières de l'équation (9). — *Si r_1 est racine triple, les trois fonctions $e^{r_1 x}$, $xe^{r_1 x}$ et $x^2 e^{r_1 x}$ sont trois intégrales de* (9). — *Et ainsi de suite.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que l'on a ;

$$\Phi \left\{ xe^{r_1 x} \right\} = 0 \qquad si \qquad \psi(r_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi'(r_1) = 0,$$

c'est-à-dire si r_1 est racine à la fois de l'équation $\psi(r) = 0$ et de

l'équation dérivée $\psi'(r) = 0$ [*voir le théorème du* n° **421**]; — que l'on a pareillement

$$\Phi \left\{ x^2 e^{r_1 x} \right\} = 0 \quad si \quad \psi(r_1) = 0, \quad \psi'(r_1) = 0 \quad \text{et} \quad \psi''(r_1) = 0;$$

et ainsi de suite. Or un calcul facile permettra de constater qu'il en est bien ainsi.

Exemple. — On vérifiera sans peine que l'équation $y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$ pour laquelle $\psi(r) = (r + \alpha)^2$ admet les deux intégrales particulières $y = e^{-ax}$ et $y = xe^{-ax}$.

3° *Cas.* — *Le polynome* $\psi(r)$ *a des racines imaginaires.* Dans ce dernier cas la méthode de calcul qui conduira à l'intégrale générale ne pourra pas être aussi simplement définie. Mais il est inutile de nous arrêter à ce cas, car l'algèbre des quantités imaginaires que nous exposerons au chapitre v (§ *3*) nous permettra bientôt de traiter les racines imaginaires de $\psi(r)$ exactement comme les racines réelles : nous pourrons alors étendre à tous les cas les résultats énoncés ci-dessus.

Comme exemple d'équation pour lesquelles $\psi(r)$ a des racines imaginaires, citons l'équation

$$y'' + m^2 y = 0:$$

nous avons $\psi(r) = r^2 + m^2$, équation sans racines puisque les nombres carrés r^2 et m^2 sont tous deux positifs. On vérifiera facilement que l'équation a pour intégrale générale

$$y = C_1 \cos mx + C_2 \sin mx,$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires.

501. Equations à coefficients constants ayant pour second membre un polynome. — Considérons maintenant une équation linéaire à second membre écrite sous la forme symbolique

$$\Phi \left\{ y \right\} = X, \tag{10}$$

l'équation sans second membre correspondante étant l'équation (9). — L'intégrale générale de (9) étant supposée trouvée, il nous faut (n° **498**) pour avoir celle de (10) obtenir *une intégrale par-*

ticulière de (10). La chose sera facile si X est un polynome en x, soit un polynome de degré p,

$$(11) \qquad X = b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p.$$

En ce cas en effet, on pourra obtenir par la *méthode des coefficients indéterminés* une solution particulière de (1) qui est aussi un *polynome de degré p*. Posons *a priori*

$$(12) \qquad y = c_0 + c_1 x + \dots + c_p x^p,$$

d'où $\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2 x + \dots + pc_p x^{p-1}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + \dots$, etc.; remplaçons $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ par ces expressions dans $\Phi\{y\}$, ordonnons le résultat par rapport à x et exprimons que le polynome obtenu est identique à X (égal à X quel que soit x). et par conséquent (n° **311**) a pour coefficients les nombres connus $b_0, b_1, \dots b_p$ (comparer le n° **375**). Nous sommes ainsi conduits à une série d'égalités [1] qui déterminent les valeurs inconnues de $c_0, c_1, \dots c_p$ pour lesquelles l'identité a lieu, c'est-à-dire qui sont telles *que le polynome* soit *une solution de l'équation* (10).

502. *Exemple.* — Considérons l'équation

$$y'' - y = x^2 + 1.$$

Posant *a priori* $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, j'ai

$$y'' - y = c_2 x^2 - c_1 x - c_0 + 2c_2;$$

donc je dois choisir les coefficients c_0, c_1, c_2 de telle sorte que

$$-c_2 = 1, \qquad -c_1 = 0, \qquad 2c_2 - c_0 = 1;$$

c'est là un système d'équations polynomales dont la solution est

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = -1, \qquad c_0 = -3.$$

[1] Le nombre de ces égalités est égal au nombre des coefficients $b_0, \dots, b_p$, c'est-à-dire $p+1$, nombre égal au nombre des inconnues $c_0, \dots, c_p$. Le lecteur vérifiera aisément que les égalités obtenues, linéaires par rapport aux inconnues $c_0, \dots, c_p$, permettent effectivement de déterminer *un* système de valeurs de ces quantités.

Ainsi l'équation proposée a pour solution particulière le polynome $y = -x^2 - 3$. D'ailleurs (n° **500**) l'intégrale générale de l'équation linéaire sans second membre est $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$; donc l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$y = -x^2 - 3 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

503. Equations à coefficients constants dont le second membre est une exponentielle de la forme $Ae^{\alpha x}$. — Considérons l'équation à coefficients constants

$$\Phi \{ y \} = Ae^{\alpha x}, \tag{13}$$

où A et α sont deux nombres constants. Je dis que cette équation admet pour intégrale particulière la fonction $\frac{A}{\psi(\alpha)} e^{\alpha x}$; en effet, appelant, pour simplifier, b, le rapport de A à $\psi(\alpha)$, calculons

$$\Phi \{ be^{\alpha x} \};$$

nous avons (n° **497**), quel que soit le nombre b :

$$\Phi \{ be^{\alpha x} \} = b . \Phi \{ e^{\alpha x} \},$$

et, d'après le calcul du n° **500** (où nous remplaçons r par α) :

$$\Phi \{ e^{\alpha x} \} = e^{\alpha x} . \psi(\alpha).$$

Donc la fonction $y = be^{\alpha x}$ sera solution de l'équation (13) si

$$b . \psi(\alpha) = A.$$

L'intégrale particulière que nous mettons ainsi en évidence cesserait d'exister toutefois si α était une racine du polynome $\psi(r)$, car alors $\frac{A}{\psi(\alpha)}$ n'aurait pas de valeur finie. On *démontre qu'en ce cas*, la fonction $y = \frac{A}{\psi'(\alpha)} . xe^{\alpha x}$ est intégrale de l'équation (13), si toutefois $\psi'(\alpha) \neq 0$, c'est-à-dire si α n'est pas une racine *double* de $\psi(r)$; si l'on a à la fois $\psi(\alpha) = 0$, $\psi'(\alpha) = 0$, mais $\psi''(\alpha) \neq 0$, la fonction $y = \frac{A}{\psi''(\alpha)} x^2 e^{\alpha x}$ est solution ; et ainsi de suite.

504. Théorème général sur les équations pourvues de seconds membres. — Considérons une équation linéaire quelconque dont le second membre soit une somme de plusieurs termes, c'est-à-dire une équation de la forme

$$(14) \qquad \Phi \{ y \} = X = X_1 + X_2 + \dots + X_p$$

où $X_1, \dots X_p$ sont p fonctions de X. Supposons que nous sachions déterminer p fonctions (de x), $u_1, \dots u_p$ qui soient respectivement intégrales particulières des p équations linéaires

$$\Phi \{ y \} = X_1, \quad \Phi \{ y \} = X_2, \quad \dots \quad \Phi \{ y \} = X_p.$$

Je dis que la fonction $y = u_1 + u_2 + \dots + u_p$ *sera une intégrale particulière de l'équation* (14). En effet, par hypothèse

$$\Phi \{ u_1 \} = X_1, \quad \dots \quad \Phi \{ u_p \} = X_p.$$

Or, d'après le n° **497**,

$$\Phi \{ u_1 + \dots u_p \} = \Phi \{ u_1 \} + \dots + \Phi \{ u_p \}.$$

Il résulte de ce théorème que les méthodes des n^{os} **501-502** combinées nous permettront de calculer une intégrale particulière d'une équation linéaire à coefficients constants dont le second membre est la somme d'un polynome $P(x)$ et de plusieurs exponentielles $Ae^{\alpha x}Be^{\beta x}$, etc. ;

505. *Remarque.* — On vérifie sans peine que l'on pourra calculer facilement des intégrales particulières des équations à coefficients constants

$$(15) \qquad \Phi \{ y \} = A \cos x, \qquad \Phi \{ y \} = A \sin x$$

où A est un nombre constant : plus précisément *on peut* (*par la méthode des coefficients indéterminés*) *déterminer deux nombres* a *et* b *tels que la fonction* $y = a \cos x + b \sin x$ *soit solution de la première ou de la seconde équation* (15). Les formules d'Euler — auxquelles nous conduira la théorie des nombres imaginaires — nous permettront de considérer ce résultat comme une application du théorème général du numéro précédent.

9. — Equations aux dérivées partielles, fonctionnelles, intégrales

506. Equations aux dérivées partielles. — Aux équations différentielles, auxquelles satisfont certaines fonctions d'une variable (fonctions inconnues, tant que les équations ne sont pas résolues), font pendant les équations aux dérivées partielles, auxquelles satisfont certaines fonctions de plusieurs variables.

Soit, d'une manière générale, z une fonction inconnue de n variables indépendantes x_1, x_2, ... x_n. Si une certaine relation implicite

$$(1) \qquad F(x_1, x_2 \,.\, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots) = 0$$

— où entrent les variables, la fonction z et les dérivées partielles, de divers ordres de z —, est satisfaite pour toute valeur de x, on dit que cette relation est une *équation aux dérivées partielles* à laquelle satisfait la fonction z et qui définit cette fonction. *Intégrer* ou *résoudre* une équation aux dérivées partielles telles que (1), ce sera trouver l'ensemble de ses *intégrales* ou *solutions*, c'est-à-dire *toutes* les fonctions z des variables x_1, ... x_n qui y satisfont. On appellera *ordre* de l'équation le plus élevé des ordres des dérivées partielles figurant dans l'équation.

507. — Bornons-nous à considérer, pour fixer les idées, une fonction z de deux variables x et y, et posons pour simplifier (ces notations sont consacrées pour l'usage) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Toute relation implicite

$$(2) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

est (par rapport aux deux variables considérées) une équation aux dérivées partielles du premier ordre ; toute relation implicite

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

est une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Nous ferons ultérieurement une étude spéciale des équations du premier ordre, dites *linéaires*, qui sont de la forme

$$(3) \qquad p \cdot f(x, y, z) + q \cdot \varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) = 0,$$

équations dont le premier membre est un polynome linéaire en p et q (les coefficients de ce polynome étant des fonctions quelconques de x, y, z).

Bornons-nous pour l'instant à montrer, par un exemple, que l'intégration des équations aux dérivées partielles conduit à des résultats fort différents de ceux que nous avons rencontrés en étudiant les équations différentielles. *Au lieu que, dans le cas de ces dernières, la solution générale d'une équation dépendait d'une ou de plusieurs constantes arbitraires (nous avons vu aux n*os **472-76** *ce qu'il faut entendre par là), la solution générale d'une équation aux dérivées partielles dépendra d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires.*

508. — Considérons donc, par exemple, l'équation

$$(4) \qquad xp + yq = 0.$$

je dis qu'elle admet pour solution [1] : $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$, où f est une fonction quelconque, c'est-à-dire une *fonction arbitraire, du rapport* $\frac{y}{x}$. En effet posons :

$$z = f(u), \qquad u = \frac{y}{x};$$

nous aurons

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{dx} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y};$$

ou

$$p = f'(u) \frac{-y}{x^2}, \qquad q = f'(u) \frac{1}{x};$$

[1] On démontre d'ailleurs que l'équation considérée n'admet pas d'autres solutions.

multipliant respectivement par x et y, et additionnant, nous trouvons o, *quelle que soit la fonction* $f(u)$ *que nous ayons considérée.*

Autre exemple.— Considérons l'équation $s = x$, ou

$$x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \tag{5}$$

on conclut de l'égalité (5) que les deux membres sont les dérivées partielles par rapport à x de deux fonctions égales ou plus généralement de deux fonctions différant par une constante ou par une fonction *arbitraire* de y, $\varphi(y)$ [car une telle fonction a, par rapport à x, une dérivée partielle nulle]; donc

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi(y) \quad [\varphi \textit{ fonction arbitraire}] \tag{6}$$

Le même raisonnement prouve que les deux membres de (6) sont les dérivées partielles par rapport à y de deux fonctions différant par une *fonction arbitraire* de x, $\Psi(x)$; donc :

$$\frac{x^2 y}{2} = z + \int \varphi(y) dy + \Psi(x), \tag{7}$$

égalité qui nous donne l'expression de la fonction z qui est solution de l'équation proposée; cette expression, on le voit, contient *deux fonctions arbitraires*.

509. Equations fonctionnelles. — La recherche d'une fonction inconnue d'une ou plusieurs variables satisfaisant à des conditions données ne se présente pas toujours pour l'algébriste sous la forme d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles qu'il faut intégrer. La fonction inconnue peut être définie, dans certains cas, par des relations algébriques où ne figurent point de dérivées : d'une manière générale, on dira d'une relation, lorsqu'elle n'est pas une simple relation implicite au sens du n° **439**, qu'elle est une *équation fonctionnelle* ; les fonctions qui y satisfont sont les *solutions* de cette équation.

Une équation fonctionnelle (à une inconnue) se présente en général sous la forme d'une égalité entre deux expressions algébriques contenant : 1° une ou plusieurs variables $x, y, \ldots,$ 2° une fonction inconnue qui *figure plusieurs fois dans l'équation avec des*

arguments différents (ces *arguments*, — quantités sur lesquelles porte la fonction, voir n° **309** — étant des combinaisons des variables x, y, ...).

Considérons, par exemple, la relation

$$\varphi(y+x)+\varphi(y-x)=2\varphi(x)\,.\,\varphi(y). \tag{7}$$

Cette relation, étudiée par D'Alembert [1] et ultérieurement par Cauchy [2], est l'une des premières équations fonctionnelles qui aient été considérée. Nous dirons qu'une fonction d'une variable [3], $\varphi(u)$, est solution de l'équation (7), si les quantités $\varphi(y+x)$, $\varphi(y-x)$, $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, obtenues en remplaçant u dans $\varphi(u)$ par $y+x$, $y-x$, x et y respectivement — vérifient la relation (7) *quelles que soient les valeurs de x et de y considérées.*

On démontre que l'équation fonctionnelle (7) a pour solutions

$$\varphi(u)=\cos cu \qquad (c \textit{ constante arbitraire})$$

et $$\varphi(u)=\frac{1}{2}(a^u+a^{-u}) \qquad (a \textit{ constante arbitraire positive}).$$

Considérons, en effet, par exemple, la fonction $\varphi(u)=\cos cu$ Pour vérifier que cette fonction est solution de l'équation (7), il faut montrer que l'on a, quels que soient x et y :

$$\cos c(y+x)+\cos c(y-x)=2\cos cx\cos cy.$$

Or cette égalité ne fait qu'exprimer la propriété des sommes de cosinus que nous avons établie au n° **383**. On vérifiera pareillement que

$$\frac{1}{2}(a^{y+x}+a^{-y-x})+\frac{1}{2}(a^{y-x}+a^{-y+x})=2\,\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\,\frac{1}{2}(a^y+a^{-y}).$$

510. — Considérons encore l'équation fonctionnelle suivante :

$$[\varphi(x)]^2+\left[\left(\varphi\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]^2=1. \tag{8}$$

[1] *Mém. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris*, 1769, p. 278 et suiv.

[2] *Analyse algébrique*, p. 103, *Œuv.*, 2e série, t. III, Paris, 1897, p. 98.

[3] Peu importe, remarquons-le, la lettre par laquelle nous désignons l'*argument* ou *variable indépendante* dont φ est fonction (nous pouvons l'appeler u aussi bien que x ou y) : ce qu'il faut trouver c'est l'*expression algébrique* (ou *transcendante*) qui définit φ lorsque l'argument u prend une valeur quelconque.

où a est une constante. On démontre facilement que cette équation, qui a été considérée par Laplace, a pour solution [1]

$$\varphi(u) = \sqrt{\frac{1}{2} + f(u) - f\left(\frac{a}{2} - u\right)}$$

f étant une *fonction arbitraire*. En d'autres termes, quelle que soit la fonction $f(u)$, on a, pour toute valeur de x :

$$\frac{1}{2} + f(x) - f\left(\frac{a}{2} - x\right) + \frac{1}{2} + f\left(\frac{a}{2} - x\right) - f\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + x\right) = 1.$$

Cauchy a étudié un grand nombre d'équations fonctionnelles, par exemple, l'équation

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \tag{9}$$

qui admet la solution $\varphi(u) = au$ (*a constante arbitraire*); l'équation

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \,.\, \varphi(y) \tag{10}$$

qui admet la solution $\varphi(u) = e^{au}$ (*a constante arbitraire*); l'équation

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \,.\, \varphi(y) \tag{11}$$

qui admet la solution $\varphi(u) = u^{\alpha}$ (*α constante arbitraire*).

511. Équations intégrales. — Un grand nombre de problèmes de physique mathématique — et aussi d'Analyse pure — dépendent de la recherche de fonctions inconnues qui sont définies par des relations où entrent, non seulement la fonction inconnue (portant sur divers arguments différents, voir fin du n° **509**), mais aussi certaines intégrales dépendant de cette fonction. De telles relations sont appelées *équations intégrales*; les fonctions qui y satisfont en sont les *solutions*.

Considérons par exemple l'égalité [2]

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x - s)^{\alpha}} \, ds = F(x), \tag{12}$$

(1) *Mécanique céleste*, t. I, Paris, an VII, p. 5. *Œuvres*, t. I, 1878, p. 6.
(2) Voir, pour cette notation, le n° 466.

F(x) étant une fonction connue et α un nombre connu compris entre o et 1. Cette égalité considérée comme une relation définissant les fonctions inconnues $\varphi(u)$ qui y satisfont [1] est une *équation intégrale.* Elle a été rencontrée par Abel en 1820 dans un problème de mécanique [2].

On démontre que l'équation (12) admet la solution

$$\varphi(u) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{F(o)}{u^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{F'(s)\,ds}{(u-s)^{1-\alpha}}\right],$$

F(o) désignant la valeur de F(x) pour $x = o$, et F'(s) étant l'expression de la dérivée F'(x) dans laquelle on remplace l'argument x par s.

512. — La théorie des équations intégrales, qui est aujourd'hui l'une des branches les plus importantes de l'analyse, prit un rapide essor à partir de 1896 sous l'impulsion de M. Vito Volterra, professeur à l'Université de Rome, qui entreprit avec succès l'étude de l'équation

$$\int_0^x N(xs)\,.\,\varphi(s)ds = F(x), \tag{13}$$

où φ est une fonction inconnue tandis que les fonctions désignées par les lettres N et F sont supposées connues (la première a pour argument, dans l'égalité (13), le produit xs).

Les travaux de M. Volterra furent suivis de beaucoup d'autres. M. Fredholm en particulier étudia et résolut une équation

(1) C'est-à-dire les fonctions $\varphi(u)$ telles que lorsqu'on y remplace u par s et que l'on calcule l'intégrale définie $\int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha}\,ds$ (x étant traité, dans le calcul de l'intégrale comme un nombre constant), la valeur obtenue pour l'intégrale définie soit égale à F(x), et cela quelle que soit la valeur de x que l'on considère. — Quand je parle des fonctions φ, je puis désigner leur argument (voir p. 480, note 3) par telle lettre qu'il me plait, par exemple par u.

(2) *Auflösung einer mechanischen Aufgabe,* Journal de Crelle, 1826.

intégrale qui est devenue célèbre sous le nom d'*équation de Fredholm* [1], l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 N(xs)\varphi(s)ds = F(x), \tag{14}$$

où les fonctions F et N sont supposées connues.

[1] Voir, en particulier, FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903. On pourra consulter sur la théorie générale des équations intégrales l'*Introduction à la théorie des équations intégrales* de M. LALESCO, Paris, Hermann, 1912.

CHAPITRE III

L'ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE

I. — Représentation géométrique des quantités et des expressions algébriques. Le calcul géométrique des Grecs.

513. — Nous avons fait connaître, à la fin du dernier chapitre, quelques-unes des floraisons les plus récentes de l'algèbre. Il convient maintenant de retourner en arrière, de remonter aux origines de la synthèse algébrique et d'affermir par des considérations nouvelles les bases mêmes de l'édifice dons nous venons d'explorer rapidement les étages successives.

514. — Dans son *Epistolia Dedicatoria*, préface à l'édition latine de la *Géométrie* (1), Erasme Bartholin loue Descartes d'avoir vu le premier que l'on peut raisonner sur des quantités purement abstraites (*quantitates in universali et abstracto*) en les représentant par des lettres de l'alphabet et sans s'aider d'aucune figure. Mais tous les algébristes ne s'élèvent pas facilement à ce degré d'abstraction. Aussi les commentateurs de Descartes (2), et Descartes lui-même, nous recommandent-ils de nous représenter les quantités algébriques sous forme de grandeurs mesurables en choisissant de préférence les plus simples de toutes. « Il nous sera très utile, dit Descartes (*Regulæ* XVI, 113), de transporter ce qui se dit

(1) *Vide supra*, p. 275, note 1, et p. 284, note 1.

(2) Ainsi SCHOOTEN et FLORIMOND DE BEAUNE, dans l'édition latine de la *Géométrie*. Cf. notre travail sur l'*Imagination et les Mathématiques selon Descartes* (Alcan, 1900), *passim*.

des grandeurs en général à l'espèce de grandeur qui se représentera le plus facilement et le plus distinctement dans notre imagination. Or cette grandeur est l'étendue réelle d'un corps, abstraite de toute autre chose que ce qui a figure ».

Ainsi, étant obligée d'habiller la quantité pour avoir prise sur elle, notre imagination lui donnera le vêtement de la grandeur géométrique. Suivant la même fiction, elle se représentera les calculs algébriques comme des calculs effectués sur les grandeurs. Une *expression algébrique*, c'est le résultat d'une construction géométrique obtenue en partant de figures connues. Une *identité*, c'est la constatation de ce fait que deux constructions différentes conduisent au même résultat (à la même figure). Une *équation*, c'est la condition qui détermine une grandeur inconnue dans une figure connue. Et ainsi de suite.

En interprétant ainsi l'algèbre par le calcul des grandeurs, nous ne faisons, en somme, que revenir au point de vue des anciens. Nous avons vu que, pour les Grecs, tout raisonnement ou calcul mathématique qui n'a pas pour objet des nombres entiers, ou rationnels, porte sur des grandeurs géométriques. Nous avons vu (1)

(1) Nous avons déjà fait observer qu'au XVIIe siècle il n'était pas encore possible de donner du nombre irrationnel une définition arithmétique rigoureuse. Il semblait donc que, pour élever la logistique au rang de science théorique il fallût en rattacher les principes à ceux de la science modèle, la géométrie classique. Ainsi ce n'est point par hasard que les assises définitives de l'édifice algébrique furent posées par des savants qui avaient fait une étude approfondie des mathématiques grecques. (Cf. nos 532 et suiv.). Il ne faudrait pas toutefois exagérer la portée de cette remarque, comme on l'a fait quelquefois. L'appel à la figure pouvait fort bien être évité si l'on renonçait à « définir » le nombre (ou bien si l'on en donnait, comme Wolf, une définition purement verbale destinée simplement à signaler l'entrée en scène d'une notion nouvelle, cf. p. 113, note 1), et si l'on posait *a priori* les règles des opérations comme autant de *définitions*, sans chercher à les justifier. C'est ainsi que nous avons procédé nous-mêmes dans cet ouvrage, et, si nous avons dû observer certaines précautions (cf. no 279) auxquelles les premiers algébristes ne prenaient pas assez garde, nous n'avons fait cependant que perfectionner un mode d'exposition qui est aussi ancien que l'algèbre et qui fut couramment employé par les cartésiens (cf. le *Calcul de Monsieur Descartes*, précis d'algèbre rédigé par DESCARTES pour servir d'introduction à sa *Géométrie* (*vide supra*, no 270) et aussi les traités publiés par les commentateurs de Descartes dans l'édition latine de la *Géométrie*). Si donc l'algèbre reste géométrique chez la plupart des auteurs des XVIIe et

aussi que la conception moderne du nombre avait eu beaucoup de peine à s'imposer et que l'on s'était longtemps obstiné à étudier séparément les opérations effectuées sur les quantités irrationnelles et les opérations de l'arithmétique (cf. *Premier Livre* chap. II, § *5*). Aujourd'hui, certes, nous n'avons plus de raison de répéter deux fois la même chose, et d'appeler de noms différents deux opérations identiques ; mais nous conservons toujours le droit de remplacer, quand il nous plaira, les calculs relatifs aux nombres par des constructions géométriques ; et c'est de ce droit que nous voulons présentement user.

Revenons donc sur nos pas, et voyons quelles ressources peut offrir à l'algébriste le calcul des grandeurs géométriques.

515. — Le calcul des grandeurs géométriques ([1]) fut originairement fondé sur la théorie des aires et des volumes que nous avons exposée au chapitre II de notre *Premier Livre* (§§ *1-3*). Ainsi nous avons vu que le produit de deux longueurs pouvait être défini comme rectangle, le produit de trois longueurs comme parallélépipède. Conformément à cette conception de la multiplication le théorème de Pythagore (n° **199**) s'énonce ainsi :

Si ABC *est un triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse* BC *est égal à la somme des carrés construits sur les deux cathètes,* ce qui signifie (**199**) que l'on peut décomposer les deux derniers carrés en figures partielles qui, étant juxtaposées d'une manière convenable, seront exactement superposables au carré de côté BC.

XVIIIe siècles, c'est surtout, croyons-nous — lorsque ce n'est pas simplement par respect de la tradition classique — pour des raisons de commodité. Ces raisons sont invoquées par tous les commentateurs de la *Géométrie* de Descartes (voir note 3, p. 501).

([1]) Le calcul géométrique des grandeurs (résolution des problèmes métriques par la géométrie) a souvent été appelé — par M. ZEUTHEN en particulier — « algèbre géométrique des Grecs ». Nous éviterons de nous servir ici de cette expression, le mot *algèbre* étant pour nous connexe d'une conception de la science du calcul (voir chap. I, § 1), qui est opposée à celle des Grecs. Cependant les théories que nous allons exposer rendaient aux géomètres grecs des services analogues à ceux que nous tirons de l'algèbre ; elles fournissaient en effet, une fois pour toutes, des règles de calcul applicables à des grandeurs quelconques (non déterminées d'une manière particulière).

La décomposition des carrés peut être faite de plusieurs manières. On peut, par exemple, prolongeant la hauteur AH du triangle jusqu'à sa rencontre en K avec le côté DE du carré 1 construit sur BC (fig. 167), démontrer que le carré 2 est égal au rectangle BHKD et le carré 1, égal au rectangle HKEC.

C'est par une méthode analogue que furent effectués — par les Pythagoriciens peut-être, — les premiers calculs *théoriques* (voir n° **71**) relatifs aux grandeurs.

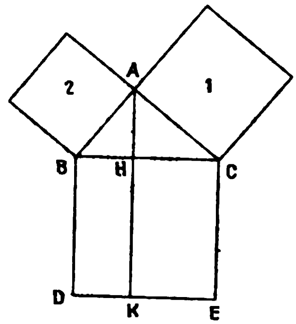


Fig. 167.

516. — Considérons par exemple un carré ABB′Δ, la diagonale, BΔ de ce carré et deux parallèles ΘK, ΓZ aux côtés du carré qui se coupent en H sur la diagonale.

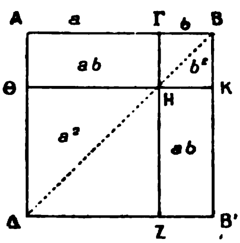


Fig. 168.

Si nous appelons a la mesure de la longueur AΓ, b celle de la longueur ΓB, nous savons que les mesures des aires du carré ABB′Δ, du carré ΘHΔZ, du carré ΓBKH et des rectangles ΔΓHΘ, HKB′Z sont respectivement $(a+b)^2$, a^2, b^2, ab, ab. La figure 168 nous fournit donc une vérification ou représentation de l'identité fondamentale :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

que nous avons établie algébriquement au n° **296**.

Voici comment Euclide énonce cette proposition en langage géométrique [1] (*Eléments*, liv. II, 4) :

[*Protase*] Si une droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

[*Ecthèse*] Car que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ:

[1] Trad. Peyrard ; en grec : Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ; etc.

je dis que le carré de AB est égal aux carrés des segments AΓ,ΓB, et à deux fois le rectangle contenu sous AΓ,ΓB... [*Suit l'apagoge*, etc., voir n° **225**].

517. — L'identité établie par la proposition suivante des *Eléments* (liv. II, 5) n'est pas moins importante :

« Si, — dit Euclide, — une ligne droite est coupée en parties « égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments « inégaux de la droite entière, avec le carré de la droite placée entre « les deux sections, est égal au « carré de la moitié de la droite « entière.

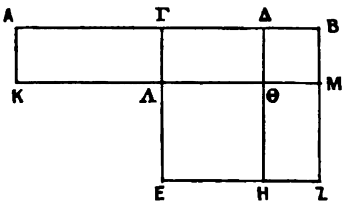


Fig. 169.

« Car, qu'une droite AB soit « coupée en deux parties égales « au point Γ, et en deux parties « inégales au point Δ, je dis « que le rectangle compris sous « AΔ, ΔB, avec le carré de ΓΔ « est égal au carré de ΓB. »

En d'autres termes, on a sur la fig. 169 : *rectangle* AΔΘK (de dimensions AΔ et ΔΘ *égale* à ΔB) + *carré* ΛΘHE (de dimension ΛΘ = ΓΔ) = *carré* ΓBZE.

Si donc nous appelons a la mesure de AΔ, b celle de ΔB nous avons (puisque Γ est le milieu de AB)

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ou

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

518. — En partant de ces constructions fondamentales, les premiers géomètres grecs pouvaient « résoudre » — dirions-nous en langage moderne — divers types d' « équations du premier et du second degré ».

Soit par exemple à *trouver un carré égal à la différence de deux carrés donnés* [résolution de l'équation $x^2 = a^2 - b^2$] : on résoudra le problème en construisant un triangle rectangle ayant l'hypoté-

nuse et une cathète égales respectivement aux côtés des carrés donnés [1].

Soit à trouver un *carré égal à un rectangle de dimensions données* [résolution de l'équation $x^2 = ab$]; d'après la proposition du n° **517**, la question revient à trouver un carré égal à la différence de deux carrés connus, lesquels ont respectivement pour dimensions la demi-somme et la demi-différence des dimensions données

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

nous nous trouvons ainsi ramenés au problème précédent.

519. — Soit maintenant à trouver un *rectangle dont l'une des dimensions est donnée et qui soit égal à un rectangle donné* [résolution de l'équation $cx = ab$, l'inconnue étant la seconde dimension du rectangle cherché].

On résout ce problème en s'appuyant sur la proposition suivante : soit ABCD un rectangle et FG,KL deux parallèles aux côtés de ce rectangle se coupant en H sur *la diagonale* BD. Ces droites partagent le rectangle donné en *quatre rectangles partiels, dont deux (savoir ceux que ne coupe pas la diagonale) sont égaux* [2] (fig. 171).

D'où la construction suivante pour traiter le problème proposé (fig. 172). Portons sur deux droites perpendiculaires en L les deux longueurs LC,LH respectivement égales aux dimensions du rec-

(1) Soient BD et AB les longueurs (connues) de ces côtés [la première étant la plus grande : autrement la construction que nous allons faire serait impossible]: sur le segment AB j'élève en A la perpendiculaire Ax à AB. De B comme centre avec BD comme rayon je décris un cercle, qui coupe Ax au point C : le triangle ABC est rectangle et BC = BD ; donc AC est le côté du carré cherché d'après le théorème de Pythagore.

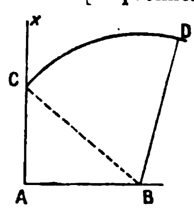


Fig. 170.

(2) Dans le cas où le rectangle ABCD serait un carré, la proposition est immédiate (voir le n° 516 et la figure 168). Dans le cas général, on la démontre en observant que *rectangle* AKHF = *triangle* ABD — *triangle* HKB — *triangle* HFD et *rectangle* GHLC = *triangle* BCD — *triangle* HGB — *triangle* HLD. Or les triangles ABD et CBD, HKB et HGB, HFD et HLD sont égaux deux à deux.

tangle donné. Reportons la longueur LH suivant CG sur la perpendiculaire en C à LC puis, sur le prolongement de CG, prenons GB égal à la dimension connue du rectangle inconnu, et prolongeons la droite BH jusqu'à sa rencontre en D avec le prolongement de CL; la longueur du *segment* LD *est la dimension cherchée* :

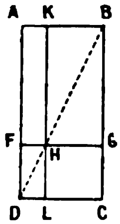


Fig. 171.

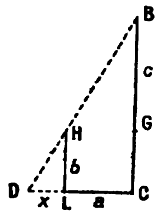


Fig. 172.

on voit, en effet, en reportant la fig. 172 sur la fig. 173, que DL égale FH et BG égal à HK sont les deux dimensions du rectangle AKFH, égal au rectangle HGLC.

520. — L'énoncé du problème que nous venons de résoudre peut être donné dans les termes suivants : *Appliquer* (παραβάλλειν) *à un segment donné* AB *un rectangle égal à un rectangle donné*; d'après cette terminologie, « appliquer (*sans plus*) un rectangle à un segment », c'est construire un rectangle dont ce segment soit un côté.

521. — La considération des *rectangles appliqués défaillants* ou

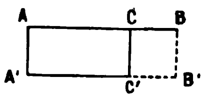


Fig. 173.

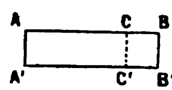


Fig. 174.

excédents conduit à la résolution de problèmes [ou équations] plus compliqués.

Soit AB un segment donné et ACA'C' un rectangle ayant un côté situé sur la droite AB (côté AC), mais non égal au segment AB. Nous dirons que ce rectangle est *appliqué* à la droite AB et *défaillant* (*deficiens*, ἐλλεῖπον) ou *excédent* (*excedens*, ὑπερβάλλον) suivant que son côté appliqué, AC, est inférieur ou supérieur à AB. De

façon plus précise — construisant le *rectangle* (AA'BB') *appliqué à* AB dont la seconde dimension (AA') est celle du rectangle défaillant ou excédent —, nous dirons que le rectangle ACA'C' est *défaillant du rectangle* CBC'B' dans le cas de la figure 173 et *excédent du rectangle* CBC'B' dans le cas de la figure 174.

522. — Proposons-nous alors la question suivante :

Construire un rectangle égal à un carré donné qui soit appliqué à un segment donné AB *et qui soit défaillant d'un rectangle semblable à un rectangle donné.*

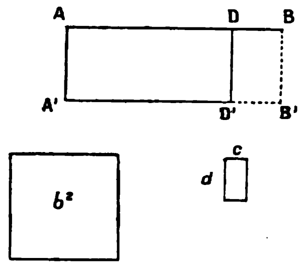


Fig. 175.

Traduisons cet énoncé en langage algébrique en appelant a la mesure de AB, b^2 celle de l'aire du carré donné, x la seconde dimension (AA', fig. 175) du rectangle appliqué (ADA'D'), c et d les mesures des dimensions du rectangle donné, auquel le petit rectangle DBD'B' doit être semblable. Nous devons avoir [1] $\frac{\overline{DB}}{c} = \frac{\overline{DD'}}{d} = \frac{x}{d}$; j'en conclus que la mesure de DB est $\frac{c}{d}x$ et que celle de AD est $a - \frac{c}{d}x$. Ainsi le rectangle inconnu a pour mesure $x\left(a - \frac{c}{d}x\right)$ et l'équation qui la détermine est

$$(1) \qquad x\left(a - \frac{c}{d}x\right) = b^2 \qquad \text{ou} \qquad ax - \frac{c}{d}x^2 = b^2,$$

où a, $\frac{c}{d}$ et b peuvent être des nombres positifs arbitraires.

La résolution géométrique de l'équation (1), je veux dire la détermination du côté inconnu (mesuré par x), peut facilement être déduite [2] du calcul géométrique des aires (n° **515**) lorsque c est est égal à d [en ce cas, DBB'D' doit être un carré et le rectangle inconnu est simplement assujetti à être égal à un carré donné et défaillant d'un carré]. Dans le cas général, Euclide résout le problème

(1) Par la notation $\overline{DB}$, j'entends « mesure de DB ». cf. n° 194.

(2) Cf. Zeuthen, *Hist. des Math. dans l'antiq.*, trad. Mascart, p. 37 et suiv.

— et la question correspondante relative au rectangle *excédent* (n° **523**) — en utilisant des constructions qui reposent sur les propriétés des figures semblables (*Eléments d'Euclide*, liv. VI, 28 et 29, *comparer* n° **199**) [1].

523. — La détermination du *rectangle excédent* (égal à un carré donné et excédent d'un rectangle semblable à un rectangle donné) équivaut à la résolution de l'équation

$$(2) \qquad x\left(a + \frac{c}{d}x\right) = b^2 \qquad \text{ou} \qquad ax + \frac{c}{d}x^2 = b^2.$$

Les équations (1) et (2) sont, remarquons-le, les deux premiers types d'équations du second degré distingués par Luca Paciuolo et les algébristes du XVIe siècle (n° **339**). [Voir p. 501, note 4, la résolution géométrique d'une autre équation du second degré].

524. — Si, comme nous l'avons dit (**515**), il paraît établi que les premières solutions rationnelles des problèmes de construction géométrique furent fondées sur les calculs d'aires et de volumes [2], il ne faudrait pas croire que les géomètres grecs aient toujours employé des méthodes aussi détournées pour résoudre [3] des problèmes qui

[1] Ces constructions sont d'ailleurs applicables lors même que la figure inconnue (figure à appliquer) n'est pas un rectangle, mais est simplement assujettie à être un parallélogramme dont les angles sont connus (ont des grandeurs données). EUCLIDE énonce donc en ces termes le problème résolu par la prop. 28 du liv. VI : παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ (*deficiens parallelogramma figura*) ὁμοίῳ τῷ δοθέντι, c'est-à-dire : A une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée et qui soit défaillant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

[2] La théorie de l'application est, dit le commentaire de PROCLUS, l'œuvre de la muse pythagoricienne.

[3] Nous parlons de la démonstration et non de la signification attachée à l'énoncé des problèmes. La géométrie classique ne cesse pas, en effet, de concevoir les produits de deux ou trois longueurs comme des rectangles ou des parallélépipèdes (n°s 73-79) ; cela est nécessaire, en effet, pour que de tels produits puissent être regardés comme ***existants*** (au sens des n°s 224, 233). — C'est ainsi que pour les anciens, le problème de Pappus, *ad* 3 *aut* 4 *lineas* (*vide* n° 242), ne pouvait être étendu à un nombre de lignes supérieur à 6 « quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus » (trad. lat. de PAPPUS, citée par DESCARTES au 1er livre de la *Géométrie*, *Œuv.*, t. VI, p. 378).

portaient en définitive sur des longueurs ou segments rectilignes. Nous avons déjà dit que la théorie des proportions nous autorise à raisonner sur les puissances des segments sans faire intervenir aucune considération d'aire : elle nous fournit un mode d'interprétation très simple des propriétés métriques des figures, en même temps qu'elle nous en fait connaître de nouvelles.

Ainsi, nous avons, tout à l'heure, appris à construire un carré égal à un rectangle de dimensions données [résolution de l'équation $x^2 = ab$] : la question revient à trouver la longueur du côté du carré, c'est-à-dire une *moyenne proportionnelle entre les dimensions données*. Or nous savons (nº **200**) que si AB est le diamètre d'un cercle et DH la perpendiculaire abaissée d'un point du cercle sur AB, le segment DH est moyen proportionnel entre les segments AH et HB. Ainsi donc, si l'on porte bout à bout deux segments AH et HB respectivement égaux aux dimensions données, que l'on trace un demi-cercle de diamètre AB, et que l'on mène la perpendiculaire en H à AB jusqu'à sa rencontre D avec le demi-cercle, on obtiendra un segment DH satisfaisant aux conditions requises.

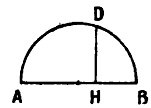


Fig. 176.

N'est-il pas possible de généraliser ce mode de construction, si simple, si clair, où n'intervient que l'intersection d'une droite et d'une courbe ?

525. — Le succès de la méthode que nous venons d'employer repose en somme sur le fait suivant : *le lieu géométrique des points* D *tels que la perpendiculaire* DH *à* AB *soit moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur cette droite, est une circonférence de diamètre* AB.

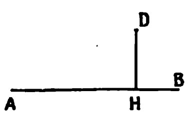


Fig. 177.

Imaginons qu'entre les segments DH, AH, HB (fig. 177) il y ait une relation métrique plus compliquée, par exemple que (AB étant donné) DH soit le côté d'un carré assujetti à être égal à un rectangle, lequel est supposé appliqué à un segment donné LM et défaillant d'un rectangle semblable au rectangle de dimensions LM et AB.

On démontre ([1]) que le lieu géométrique des points D qui satisfont à cette condition est une *ellipse* passant par le point A et ayant pour grand axe le segment AB.

En langage algébrique, la propriété qui définit les points D du lieu s'exprime comme il suit. Posons ([2])

$$\overline{AB} = 2a, \qquad \overline{LM} = 2p, \qquad \overline{AH} = x, \qquad \overline{HD} = y\,;$$

nous aurons, d'après le n° **522** :

$$y^2 = 2px - \frac{2p}{2a}x^2 \qquad \text{ou} \qquad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Ainsi à toute position du point H entre A et B (c'est-à-dire à toute valeur de x) correspond un point D du lieu sur la perpendiculaire menée en H à AB, et ce point est à une distance de H égale à $\sqrt{2px - \frac{p}{a}x^2}$. Apollonius plaçait le segment LM (égal à p) sur la figure principale, perpendiculairement à AB au point A : c'est pourquoi ce segment fut appelé *latus rectum* (côté droit) ; la demi-longueur, p, du *latus rectum* est appelée aujourd'hui *paramètre* de l'ellipse ([3]).

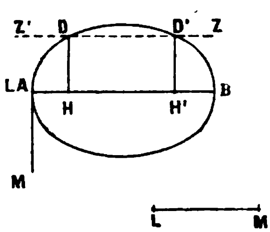


Fig. 178.

526. — Supposant l'ellipse construite ([4]), proposons-nous de nou-

([1]) APOLLONIUS, *Conica*, liv. I, prop. 13, éd. Heiberg, t. I, p. 48. Cf. HEATH, *Apollonius of Perga*, p. 8 et suiv. — Ces propriétés de l'ellipse étaient connues d'ARCHIMÈDE.

([2]) La raison pour laquelle on a coutume de désigner par des lettres a, p les *moitiés* des segments AB, LM, plutôt que les longueurs de ces segments eux-mêmes, apparaîtra plus loin.

([3]) Cette expression fut introduite dans l'usage courant par De La Hire, *vide supra*, p. 212, note 3.

([4]) On pourrait procéder inversement et se servir au contraire de la règle de construction du rectangle défaillant pour construire le point D de l'ellipse correspondant à une position arbitraire de H sur AB; on déterminerait ainsi autant de points de la courbe que l'on voudrait (c'est ce que l'on appelle aujourd'hui *construire une courbe par points*). Mais nous avons vu qu'au point de vue théorique une conique définie comme intersection d'un cône et d'un plan pouvait en toute rigueur être regardée comme construite.

veau le problème du n° **522** (détermination du rectangle défaillant) en adoptant les notations indiquées au début du n° **525**. Le carré donné a pour côté la longueur DH ; le rectangle inconnu doit être appliqué à LM et défaillant d'un rectangle de dimensions LM et AB ; alors, une fois construite la figure 178, comme il a été dit au n° **525**, l'inconnue x (dimension inconnue du rectangle à construire) ne sera autre que la longueur AH (d'après les propriétés qui définissent cette figure).

D'où la construction suivante (pour déterminer AH) : à une distance égale au côté du carré donné au-dessus de AB menons la parallèle Z'Z à AB. Si cette parallèle coupe l'ellipse, elle la coupe en général en deux points D et D' qui se projettent en H et H' sur AB. Chacun des deux segments AH et A'H' satisfait aux conditions du problème qui a, par conséquent, deux solutions.

Si Z'Z ne coupe pas l'ellipse, le problème n'admet aucune solution. Si ZZ' touche l'ellipse en un point (lui est tangente) il y a une et une seule solution.

Remarquons que si LM = AB ($p = a$) le lieu géométrique du point est un cercle d'après le n° **524** [on a alors $y^2 = x(2a - x)$ = AH . HB] ; l'ellipse *dégénère* donc en cercle dans ce cas particulier.

Le nom de l'*ellipse* (ἔλλειψις) rappelle que cette figure est relative à la construction d'un rectangle défaillant (ἐλλεῖπον).

527. — Considérons maintenant le cas du rectangle *excédent*.

Les segments AB, DH étant définis comme ci-dessus mais H étant cette fois hors de l'intervalle AB, du côté de A [voir la figure 179 que nous disposons ici de telle sorte que B soit à gauche de A], supposons que DH soit le côté d'un carré assujetti à être égal

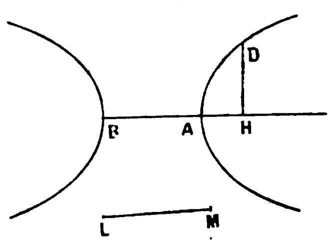


Fig. 179.

à un rectangle, lequel est lui-même supposé appliqué à un segment donné LM et excédant d'un rectangle semblable au rectangle de dimensions LM et AB. On démontre que le lieu géométrique du point D (pour H quelconque sur le prolongement de BA) est une

demi-hyperbole (¹) passant par le point A et ayant pour axe transverse le segment AB.

En langage algébrique, si nous posons comme plus haut

$$AB = 2a, \quad LM = 2p, \quad AH = x, \quad HD = y,$$

nous avons

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2.$$

L'hyperbole, une fois construite, fournira une solution simple du problème du n° **523** (la construction est la même que dans le cas de l'ellipse).

Le nom de l'hyperbole (ὑπερβολή) rappelle que cette figure est relative à la construction du rectangle excédent (ὑπερβάλλον).

528. — Que si maintenant nous considérons l'application pure et simple (παραβολή) d'un rectangle à un segment (sans défaillance ni excès n° **520**), nous verrons intervenir la troisième section conique, et nous expliquerons ainsi son nom de *parabole*.

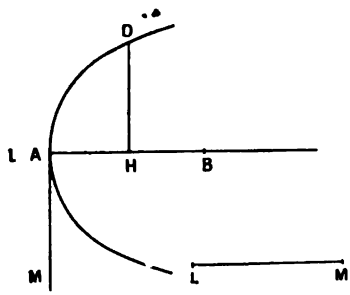


Fig. 180.

Conservant toujours les mêmes notations (voir fig. 177), supposons que DH soit le côté d'un carré assujetti à être égal à un rectangle que l'on imagine appliqué à un segment donné LM et de dimensions AB et AH. On démontre que le lieu géométrique du point D est une parabole dont AB est l'axe et A le sommet (fig. 180).

En langage algébrique nous aurons :

$$y^2 = 2px;$$

le nombre p est dit *paramètre* de la parabole.

(¹) Grâce à l'introduction des signes dans le calcul des abscisses la relation $y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$ représentera en « géométrie analytique » l'hyperbole tout entière : c'est l'équation de la courbe rapportée à deux axes rectangulaires, d'origine A, dont l'un (l'axe des x) coïncide avec AB (*vide infra*, chap. IV).

529. — Il est intéressant de noter que les propositions qui font l'objet des n^{os} **525-28** ont été généralisées par Apollonius. Ce géomètre établit en effet que ces propositions restent vraies lors même que la droite que nous avons appelée DH n'est plus perpendiculaire à AB mais est simplement assujettie à être parallèle à une direction fixe (la même pour toutes les positions prises par D) arbitrairement inclinée sur AB (comparer p. 246 note 1).

En d'autres termes soit T'T la direction donnée, H un point de AB. Sur la parallèle à T'T menée par H, portons une longueur HD telle que $HD^2 = LM \times AH - \frac{LM}{AB} AH^2$: le lien géométrique du point D (pour H variant entre A et B) est une ellipse de *diamètre* AB, et pour laquelle T'T est la direction des cordes conjuguées au diamètre AB [voir au n° **247** la définition des diamètres et cordes conjuguées].

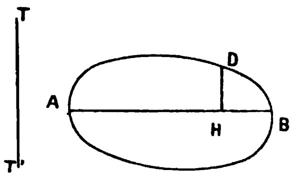


Fig 181.

530. — La construction des sections coniques, et les propositions des n^{os} **525-28** fournirent la solution d'un problème célèbre qui occupa beaucoup les premiers géomètres grecs : le problème de la *duplication du cube*.

Soit demandé de construire un cube égal (congruent) à un parallélipipède droit donné. Appelant x la mesure du côté du cube, a, b, c celles des dimensions du parallélépipède, on voit que la question revient à résoudre l'équation du troisième degré

$$(3) \qquad x^3 = abc$$

et, par conséquent, à extraire une racine cubique. En particulier, si le parallélépipède a pour dimensions a, a, $2a$, le cube inconnu doit être double du cube de dimension a : d'où le nom de duplication [1] donné au problème.

La construction du cube égal à un parallélépipède droit quelconque

[1] On appelle parfois ce problème *problème délien* à cause d'un oracle qui aurait prescrit de donner à un autel de forme cubique, dans l'île de Délos, une grandeur double, « sans en changer la forme », (cf. ZEUTHEN, *Hist. des Math.*, trad. J. Mascart, p. 68).

fut ramenée — peut-être par Hippocrate de Chios — à la résolution du problème suivant : *déterminer deux moyennes proportionnelles à deux segments donnés.*

Etant connues, en effet, les trois dimensions a, b, c, nous pouvons, en premier lieu, construire un segment d qui soit moyen proportionnel entre a et b (nº 96) donc tel que $\frac{a}{d} = \frac{d}{b}$ ou $a \cdot b = d^2$. Le segment inconnu x sera alors défini par la relation $x^3 = d^2 . c$. Je dis que, pour le calculer, il suffit de déterminer deux segments x et y tels que

$$\frac{d}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{c}, \tag{4}$$

En effet, écrivant que le carré du premier rapport (4) est égal au produit des deux autres rapports, nous avons $\frac{d^2}{x^2} = \frac{x \cdot y}{y \cdot c} = \frac{x}{c}$; d'où $d^2 \cdot c = x^3$.

On énonce la relation exprimée par l'égalité (4) en disant que x et y sont deux moyennes proportionnelles entre c et d (cf. p. 123 note 2).

531. — Voici maintenant comment la détermination des segments x et y peut être faite aux moyens des lieux solides ou sections coniques [cette détermination est attribuée à Menechme [1]] :

Des proportions $\frac{d}{x} = \frac{x}{y}$, $\frac{x}{y} = \frac{y}{c}$, on déduit [2]

$$x^2 = d \cdot y, \quad y^2 = c \cdot x. \tag{5}$$

Traçons (fig. 182) deux droites rectangulaires OX, OY et proposons-nous de trouver deux segments OM, ON, que nous portons respectivement sur OX et OY, dont les longueurs x, y satisfassent aux relations (5) [c et d étant des longueurs données]. Menons par

(1) *Vide supra* p. 241, note 3. Cf. HEATH, *Apollonius of Perga*, 1896, p. XIX.

(2) Une autre solution, également donnée par MENECHME, consiste à construire l'intersection de la parabole et de l'hyperbole dont les *équations* en coordonnées rectangulaires sont $x^2 = d . y$ et $\frac{d}{x} = \frac{y}{c}$ (ou $xy = cd$).

M la parallèle à OY, par N la parallèle à OX et appelons P le point de rencontre de ces droites : nous avons

$$MP = ON = y, \quad NP = OM = x.$$

Le point P est sûrement situé sur la parabole de sommet O, d'axe OX et de paramètre $\frac{c}{2}$: en effet, d'après le n° 528, on a, pour tout point P de cette parabole, la relation $MP^2 = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot OM$.

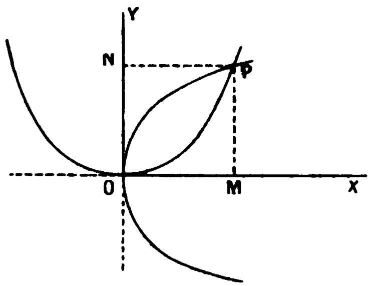


Fig. 182.

Le point P est également sur la parabole de sommet O, d'axe OY et de paramètre $\frac{d}{2}$; car pour tout point P de cette parabole, $NP^2 = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \overline{ON}$.

Or nous *savons construire* ces deux paraboles ; nous pouvons donc *théoriquement* déterminer leur intersection (il n'y en a qu'une dans l'angle XOY), et par conséquent le point M.

C'est sans doute parce que les sections coniques servent ainsi à résoudre des problèmes relatifs à la détermination de *solides* (se traduisant algébriquement par des équations du 3ᵉ degré) que ces courbes étaient appelées *lieux solides* par Aristée l'Ancien (cf. n° **243**).

2. — Figuration cartésienne des fonctions d'une variable [1]

532. — Les fondateurs de l'algèbre moderne, en Orient et en Occident, étaient familiers avec la méthode de calcul des géomètres grecs, et ils ne manquèrent point de faire usage, à leur tour, des constructions géométriques pour illustrer et interpréter leurs formules et leurs équations. Ainsi procède Khwarizmi [2], ainsi

[1] Sur la représentation des fonctions de 2 variables, voir *infra* p. 506, note 4.

[2] Ed. Rosen (*vide supra*, p. 271, note 1), p. 13-19 ; cf. LIBRI, *Hist. des Sc. math. en Ital.*, t. I, note 12, p. 253 et suiv.

Léonard de Pise (1), qui s'est instruit à la double école de l'Inde et de la Grèce et qui déclare le calcul algébrique inséparable de la géométrie. Luca Paciuolo, après avoir exposé au point de vue abstrait les règles du calcul algébrique, consacre un chapitre de sa *Summa* à la démonstration géométrique de ces règles (2). Viète enfin compose un important ouvrage sur la construction des racines des équations du second degré (3).

Parallèlement, d'autre part, l'habitude se généralisa de résoudre par l'algèbre les problèmes de géométrie pure [voir à ce sujet chap. IV, § *1*] : la solution nouvelle était confrontée avec l'ancienne et l'on s'apercevait ainsi qu'il n'y avait point de l'une à l'autre opposition de nature et que toutes les « transformations algébriques effectuées » avaient un sens géométrique bien déterminé (4).

Et pourtant, les constructions géométriques des anciens n'ont plus pour nous et ne pouvaient avoir dès le XVIIe siècle qu'un intérêt rétrospectif (cf. p. 485, note 1). Sans doute elles fournissent une représentation remarquable des formules de l'algèbre ; mais il ne paraît pas qu'elles en puissent faciliter le maniement ; elles l'alourdissent au contraire et elles ôtent à l'opérateur la liberté d'esprit

(1) Dans la préface de son traité d'algèbre [*liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano in anno* 1202], Léonard déclare : « Quare amplectens strictius ipsum modum Indorum et attentius studens in eo, ex proprio sensu quædam addens et quædam etiam ex subtilitatibus Euclidis geometriæ artis apponens, summam hujus libri... componere laboravi... Et quia arithmetica et geometriæ scientiæ sunt connexæ et suffragatoriæ sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina nisi intersecantur geometrica quædam vel ad geometriam spectantia quæ hic tamen juxta modum numeri operantur, qui modus est sumptus ex multis probationibus et demonstrationibus quæ figuris geometricis fiunt » (LIBRI, *loc. cit.*, t. II, p. 287 et suiv.). On pourra suivre l'exécution de ce programme au chapitre XV de l'*Abbacus* reproduit par LIBRI (*loc. cit.*, p. 307 et suiv.) : « Capitulum quintum decimum de regulis geometriæ pertinentibus et de quæstionibus algebræ et almuchabile » — et aussi dans la *Practica geometriæ* (1220).

(2) *Summa de arithmetica* (1494) : « Distinctio octava, tractatus secundus : demonstratio geometrica dictarum regularum ».

(3) *Francisi Vietæ Effectionum geometricarum canonica recensio* (1593) : « Effectiones geometricas quibus æquationes omnes quæ quadratorum metam non excedunt commode explicentur, ita canonice recenseo ».

(4) Ce parallélisme est nettement mis en lumière dans les ouvrages de MARINO GHETALDI (*vide infra*, chap. IV, § 1) auquel certains historiens attribuent un rôle important dans la création de la géométrie analytique.

dont il a besoin pour donner à l'appareil algébrique tout le jeu qu'il comporte. Pour que la figuration géométrique puisse devenir avantageuse, il faut que le principe en soit complètement modifié ; cette réforme nécessaire fut l'œuvre de Descartes [1].

533. — Nous avons déjà vu que Descartes avait définitivement exclu de l'algèbre cette représentation des produits par des aires ou par des volumes qui embarrassait le calcul et en limitait si fâcheusement le champ [2]. Toute expression algébrique, dit Descartes, doit être figurée par une ligne simple [3] (c'est-à-dire par un segment rectiligne ou longueur).

Ce n'est pas tout. Nous disions tout à l'heure que lorsque les quantités algébriques représentent les éléments d'une figure, les calculs effectués sur ces quantités ont toujours une signification géométrique : de là résulte cette conséquence remarquable que toute transformation, tout calcul algébrique peut être suivi pas à pas sur la figure et traduit immédiatement en langage géométrique [4]. Est-ce ainsi, cependant, qu'il convient de procéder en

[1] Sur le rôle historique de DESCARTES, voir chap. IV, § 3.
[2] Voir en particulier p. 412, note 3.
[3] *Compendiosæ figuræ, quæ modo sufficiant ad cavendum lapsum, quo breviores, eo commodiores existunt* (cf. p. 110, note 1).
[4] Montrons par un exemple comment se pourra faire cette traduction. Supposons que l'on veuille trouver deux nombres x et y connaissant leur somme s (nombre positif) et leur produit p^2 (nombre positif). Le problème [qui équivaut d'ailleurs, d'après le n° 368, à la résolution de l'équation du second degré $X^2 - sX + p^2 = 0$] peut être résolu comme il suit. Appelant d la différence des inconnues $x - y$ [nous avons toujours le droit de supposer que c'est la plus grande inconnue qui est appelée x] nous remarquerons que $\left[\frac{x+y}{2}\right]^2 - \left[\frac{x-y}{2}\right]^2 = xy$, donc $\frac{s^2}{4} - \frac{d^2}{4} = p^2$, ou $d^2 = s^2 - 4p^2$, d'où l'on tire la valeur de d (le problème n'est possible que si $s^2 - 4p^2 > 0$ ou $p < \frac{s}{2}$) ; on a ensuite évidemment (cf. p. 360, note 1).

$$x = \frac{s}{2} + \frac{d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 4p^2}}{2}.$$

Ce calcul peut être suivi pas à pas sur une figure géométrique. Figurons sur une même droite (dans le même sens) deux segments OB, OA que

effet ? Descartes ne le pensait pas. Si l'image est, selon lui, indispensable au mathématicien, elle ne doit cependant pas être l'objet, ni même l'instrument de la démonstration. La représentation des quantités par des segments n'est nécessaire qu'au début de l'algèbre ; ensuite des signes plus simples suffisent, tels que les lettres de l'alphabet affectées d'indices et d'exposants ; et si nous faisons de nouveau intervenir la figuration géométrique, ce ne doit être qu'après coup, une fois le calcul achevé, afin d'interpréter ce calcul par la *discussion* (*vide*, chap. IV, § 1) ou simplement de le vérifier et de le fixer dans la mémoire. A vouloir marcher de pair, la géométrie et l'algèbre ne réussiraient qu'à se gêner.

Le mode de figuration géométrique qu'adopta Descartes se prête admirablement à cet usage discret et intermittent qu'il en voulait faire. Sans prétendre être autre chose qu'une illustration de l'algèbre, il a cependant puissamment contribué aux progrès de celle-ci, et nombre de définitions et de règles de calcul, données dans notre Chapitre I, ont été en fait suggérées par lui.

534. — L'algèbre géométrique de Descartes repose sur la représentation des fonctions au moyen d'un système de *coordonnées*.

---

nous supposons égaux aux longueurs inconnues x et y. Appelant M le milieu de AB, nous avons évidemment

$$OM = \frac{OA + OB}{2} \quad \text{et} \quad AM = \frac{AB}{2} = \frac{OB - OA}{2}.$$

Le segment OM représente donc $\frac{s}{2}$ et le segment BM vaut $\frac{d}{2}$. Cela posé, construisons un triangle rectangle ayant pour hypoténuse OM (qui est connu) et une cathète OC de longueur p [pour construire ce triangle on procède comme nous l'avons dit p. 489, note 1]. Le carré de la seconde cathète, CM^2, est égal à

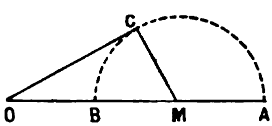


Fig. 183.

$$OM^2 - OC^2 = \left(\frac{OA + OB}{2}\right)^2 - OA \times OB,$$

donc égal à $\left(\frac{OB - OA}{2}\right)^2$ d'après l'identité relative au produit de deux segments (ici OA, OB) *qui a été établie géométriquement* au n° 517. Ainsi se trouve déterminé CM si toutefois la construction du triangle rectangle est possible, (voir p. 489, note 1). Ayant CM, je décris de M comme centre le cercle de rayon MC : ce cercle coupe la droite OM en deux points qui sont les points inconnus B et A.

Cette représentation nous est aujourd'hui familière, car elle est entrée dans la vie pratique (1). Nous en faisons usage lorsque nous traçons un graphique tel qu'une courbe de température ou une courbe de variation de poids.

Supposons, par exemple, que tous les jours d'un même mois, à la même heure, nous ayons relevé la température d'un malade. Pour rendre sensible à l'œil la variation progressive de la fièvre du malade au cours du mois écoulé, nous tracerons le graphique suivant. Prenant une feuille de papier quadrillé (fig. 184) nous marquerons sur une ligne horizontale, aux points de rencontre de cette ligne avec les lignes verticales consécutives, les dates 1, 2, 3, 4, 5, etc. Sur une ligne verticale (aux points de rencontre avec les lignes horizontales successives), nous indiquerons les températures (2) 37°, 37°1, 37°2, puis au-dessous 36°9, 36°8, etc. ; cela fait nous figurerons la température du malade un jour quelconque en prenant le point de rencontre de la verticale de ce jour avec l'horizontale correspondant au nombre de degrés lu sur le thermomètre.

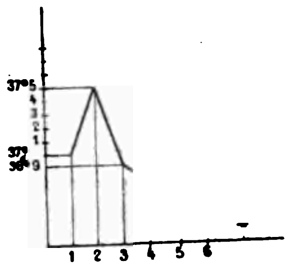


Fig. 184.

Si le thermomètre donne 37°1 le 1er du mois, 37°5 le 2, 36°9 le 3, les températures du 1er, du 2 et du 3 seront représentées sur la fig. 184 par les points T_1, T_2, T_3. Joignant ces divers points par une courbe continue, nous avons ce qu'on appelle une *courbe de température*.

Telle est, appliquée à un exemple moderne, la méthode de représentation des grandeurs variables, qu'exposait déjà, — ou à peu près, — l'évêque de Lisieux, Nicole Oresme, dans son *Tractatus de latitudinibus formarum* (1480) (3).

535. — C'est cette méthode que Descartes (4) systématise et

(1) Voir sur les courbes empiriques le chap. v des *Notions de Mathématiques* de Jules Tannery.

(2) Le signe o signifie « degré », *vide* n° 104.

(3) Bibl. N. Rés. V. 884.

(4) Sur les rapports de la méthode cartésienne des coordonnées et de la théorie des sections coniques d'Apollonius, voir le chap. iv.

transporte dans son algèbre. Les progrès de la théorie des nombres relatifs y apportèrent de nouveau perfectionnements et lui donnèrent la forme définitive sous laquelle nous allons la présenter.

536. Coordonnées. — Considérons (fig. 185) deux axes qui se coupent, soit les axes X'OX, Y'OY, et adoptons une fois pour toutes une unité de longueur fixe. Nous avons expliqué au nº **127** comment, si l'on prend pour *origine* le point O, tout nombre relatif x peut être considéré comme l'abscisse d'un point P de l'axe X'OX : point situé à la distance $|x|$ du point O, à droite ou à gauche de O suivant que x est positif ou négatif ; réciproquement tout point de X'OX tel que P a une abscisse positive ou négative. Semblablement, nous pouvons faire correspondre à tout point N de l'axe Y'OY un nombre (abscisse) y — positif ou négatif suivant que N est sur OY ou OY' — et réciproquement. — Les deux axes X'OX et Y'OY se trouvent ainsi *orientés*.

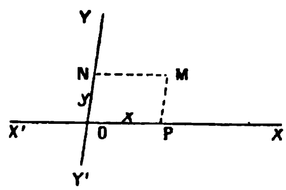


Fig. 185.

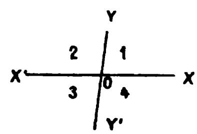


Fig. 186.

Soit alors donné un couple de nombres relatifs *arbitraires*, x et y. Faisons correspondre au premier, comme il vient d'être dit, un point P de X'OX et au second un point N de Y'OY ; puis, par P menons la droite parallèle à Y'OY, et par N la droite parallèle à X'OX ; ces deux droites se coupent en un certain point M que nous regarderons comme *représentatif du couple de nombres* x et y. — On voit immédiatement, en numérotant 1, 2, 3, 4 les angles XOY, XOY', X'OY', X'OY (fig. 186) que le point M est : dans l'angle 1, si $x > o$, $y > o$, dans l'angle 2, si $x < o$, $y > o$, dans l'angle 3, si $x < o$, $y < o$, dans l'angle 4, si $x > o$, $y < o$.

L'abscisse du point P sur l'axe orienté X'OX est appelée *abscisse* du point M ; l'abscisse du point N sur l'axe orienté

Y'OY est appelée *ordonnée* [1] du point M. Du point de vue de l'algèbre, l'abscisse et l'ordonnée sont des nombres. Géométriquement parlant, ce sont des *segments* auxquels nous convenons de toujours donner comme origine le même point O; l'abscisse et l'ordonnée sont donc définies par leurs *extrémités* P et N.

Il résulte de ce qui précède qu'à tout *système* (ou *couple*) *de valeurs* de l'abscisse et de l'ordonnée correspond un point et un seul, M, du plan. Réciproquement, soit M un point quelconque du plan. Les parallèles menées par M aux axes X'OX, Y'OY coupent ces axes en des points bien déterminés N et P; donc à tout point M du plan correspond un système de valeurs bien déterminées de l'abscisse et de l'ordonnée.

L'*abscisse* et l'*ordonnée* d'un point sont ses deux *coordonnées*. Les axes X'OX — axe des abscisses ou *axe* des x — et Y'OY — axe des ordonnées ou *axe* des y — sont dits constituer un *système d'axes de coordonnées*, auquel les points du plan sont « *rapportés* ». Le point O est appelé *origine* (du système d'axes *ou* des coordonnées).

537. Ces définitions posées, soit $y = f(x)$ l'une quelconque des fonctions que nous avons définies et étudiées au chapitre II.

A toute valeur de la variable indépendante x correspond une valeur de la variable dépendante y; au couple des valeurs correspondantes x et y correspond d'autre part (si l'on se donne un système d'axes de coordonnées) un point M du plan de ces axes. Lorsque x varie, le point M prend des positions variables; il *décrit* [2] *une ligne* (*ou courbe*) [3], que l'on peut figurer approximativement en déterminant les positions du point M pour un très grand nombre de valeurs de x, et joignant par un trait continu les points obtenus : c'est là ce qu'on appelle « construire la ligne par

[1] Le mot *ordonnée* (*ordinata*) était employé dans la théorie des sections coniques (voir § 1) par les traducteurs d'Apollonius. On le trouve, en français, et avec son sens moderne, dans le *Cours mathématique* d'HERIGONE, t. VI, 1637, p. 65. — Le mot *abscisse* vient du latin : *abscindere*, couper.

[2] Du moins si la fonction $y = f(x)$ est *continue* (n° 396).

[3] Exceptionnellement, la ligne décrite par M peut être une *droite* (n° 540); mais, pour simplifier le langage, on prend d'ordinaire, sans tenir compte de ce cas, le mot *courbe* dans le sens de *ligne*. On considère alors la droite comme un cas particulier de ligne courbe.

points ». « Prenant — dit Descartes, qui considère dans cet énoncé y comme la variable indépendante et x comme la variable dépendante [1] — successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée [2]. »

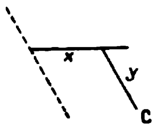


Fig. 187.

Que si, au lieu d'être donnée sous forme explicite, la fonction y de x est définie par une *relation implicite* $F(x, y) = 0$, elle est encore représentée par une courbe ; cette courbe se trouve caractérisée par ce fait que l'abscisse x et l'ordonnée y de l'un *quelconque* de ses points satisfont à l'égalité $F(x, y) = 0$ (cf. **390**).

538. — Ainsi à toute fonction correspond une ligne (que nous appellerons ligne ou *courbe représentative de la fonction*). Voilà, à cela près qu'il n'envisageait que des coordonnées positives et se bornait par conséquent à l'étude des courbes situées dans l'angle [3] I de la fig. 186, ce que montra clairement Descartes. Ce faisant [4], il clarifia définitivement ce concept mystérieux de la fonction qui était le support invisible et de toutes les combinaisons algébriques (l'exposé de notre chapitre I a mis ce fait en évidence). Grâce à la figuration cartésienne, tous les caractères, toutes les propriétés des fonctions allaient en quelque sorte sauter aux yeux. On n'avait qu'à regarder pour les découvrir.

(1) Si l'on retourne ainsi le rôle des variables, la fonction représentée se trouve être la fonction $x = \arg f(y)$, fonction inverse de $f(x)$ [*vide*, nº 393]. Il est bien évident qu'une fonction $f(x)$ et la fonction inverse sont toujours figurées par la même courbe.

(2) La *Géométrie*, Liv. I, *Œuv.*, t. VI, p. 386.

(3) Descartes retournait d'ailleurs la figure, en sorte que l'angle I était l'angle du bas à droite (fig. 187).

(4) Il s'agit uniquement — ici et au paragraphe suivant — de la figuration des fonctions d'*une* variable. On aurait une figuration analogue des fonctions de deux variables indépendantes, $z = f(x, y)$ en considérant $z = f(x, y)$ comme l'équation d'une surface rapportée à trois axes de coordonnées (*vide infra*, chap. IV). Mais cette figuration, qui ne peut être réalisée graphiquement sur le papier, ne rendrait guère de services à l'algébriste.

539. Représentation des fonctions simples par rapport à des axes rectangulaires. — Pour réaliser et étudier la représentation graphique des fonctions d'une variable x, adoptons une fois pour toutes un système d'axes de coordonnées dans un plan. Nous choisirons — pour nous placer dans les conditions les plus simples — des axes *rectangulaires* (perpendiculaires l'un sur l'autre). Nous donnerons de plus aux *demi-axes* OX *et* OY, *correspondant aux abscisses et ordonnées positives, une disposition relative telle qu'en faisant tourner* OX *d'un angle droit autour du point* O *dans le sens positif trigonométrique* (sens de la flèche sur la fig. 188) *on amène ce demi-axe à coïncider avec* OY.

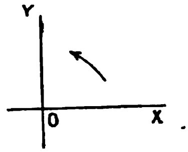


Fig. 188.

Les coordonnées d'un point rapporté à de tels axes sont souvent appelées *coordonnées cartésiennes* (1).

540. — Cela dit, considérons d'abord un polynome en x du premier degré, soit $ax + b$ (que je désigne par y), a et b étant

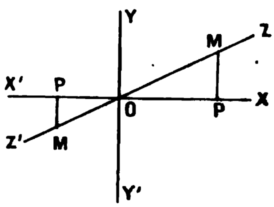


Fig. 189.

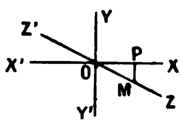


Fig. 190.

deux nombres fixes arbitraires. Il est aisé d'effectuer la représentation graphique de cette fonction (2) par rapport aux axes ci-dessus définis.

1° *Le polynome* $y = ax$ *est représenté par une droite qui passe par l'origine* O *et fait au-dessus de l'axe des abcisses avec le demi-axe* OX *un angle* φ *tel que* $tg\ \varphi = a$.

(1) On dit aussi : *coordonnées rectangulaires*. Si les axes ne sont pas rectangulaires, ils sont dits *obliques* : les coordonnées correspondantes sont dites coordonnées obliques.

(2) Nous verrons au § 2 du chapitre IV que FERMAT avait indiqué cette représentation d'une manière très nette quelques années avant DESCARTES.

En effet appelons Z'Z cette droite, qui sera [1] dans les angles XOY et X'OY' si $a = \text{tg}\,\varphi$ est positif, et dans les angles X'OY et Y'OX si $a = \text{tg}\,\varphi$ est négatif (fig. 189 ou 190).

Quel que soit le point M que l'on considère sur OZ ou OZ' on aura, en appelant P la projection de ce point sur l'axe des x (n° **215**) :

$$\frac{PM}{OP} = \text{tang MOP};$$

or, les quantités PM, OP, tang MOP, essentiellement positives, sont respectivement égales à $|y|$, $|x|$, $|\text{tang}\,\varphi|$; donc

$$\frac{|y|}{|x|} = \text{tang}\,\varphi \qquad \text{ou [2]} \qquad \frac{y}{x} = \pm\,\text{tang}\,\varphi\,;$$

observant, que pour toutes les positions possibles du point M sur Z'OZ, $\frac{y}{x}$ et $\text{tg}\,\varphi$ ont même signe [car les deux coordonnées x et y ont même signe ou des signes contraires suivant que $\text{tg}\,\varphi > 0$ ou $\text{tg}\,\varphi < 0$] je conclus que l'on a *dans tous les cas* [3] :

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\varphi = a.$$

La droite Z'OZ *représente* donc bien le polynome ax ; c'est pourquoi, j'appellerai cette droite « *droite* $y = ax$ » [4].

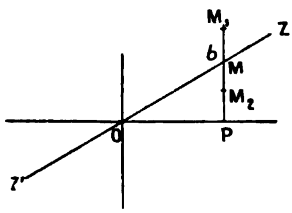


Fig. 191.

2° Appelant P un point quelconque de l'axe des x, et M le point de la droite $y = ax$ qui a pour abscisse $OP = x$, ajoutons à l'ordonnée PM la longueur b si $b > 0$, ou retranchons en la longueur b', égale à $-\,b$, si $b < 0$. Nous obtenons ainsi un point M_1 ou M_2 qui

[1] Quel que soit le nombre relatif a, il existe *un* angle φ compris entre 0 et π dont la tangente est égale à a. Cet angle est *aigu* $\left(\text{compris entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$ si $a > 0$, *obtus* (compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π) si $a < 0$.

[2] Le signe $\pm$ signifiant : *plus ou moins* ; je veux dire que l'égalité a lieu *aux signes près*.

[3] On arriverait plus rapidement à cette conclusion en se référant aux discussions relatives aux signes qui ont été déjà faites en trigonométrie (c'est ainsi que nous procéderons au chap. IV pour définir les coordonnées polaires).

[4] Nous dirons aussi (cf. chap. IV) : « droite d'équation $y = ax$ ».

a pour coordonnées x et $y = ax + b$ ou x et $y = ax - b' = ax + b$:

Ainsi — et la construction est la même quelle que soit la position de la droite $y = ax$ [droite Z'OZ] — le point M_1 ou M_2 est un point de la courbe ou droite représentative du polynome

$$y = ax + b.$$

Effectuant la construction pour diverses positions de P sur X'OX soit pour les positions P', P'', P''' (fig. 192) [*je fais la figure en supposant* tg $\varphi > 0$, $b > 0$] on obtient des points M'_1, M''_1, M'''_1, qui sont tous sur une *même droite parallèle* à la droite $y = ax$ [car les figures $M'M''M'_1M''_1$, $M'M'''M'_1M'''_1$ sont des parallèlogrammes]. Ainsi la *courbe représentative du polynome $ax + b$ ou $y = ax + b$ est une droite parallèle à la droite $y = ax$*. Nous dirons que cette droite est « *la droite $y = ax + b$* ».

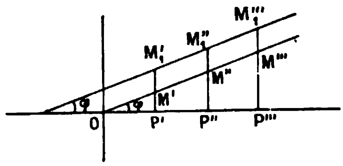


Fig. 192.

541. Coefficient angulaire. — Le nombre a est appelé *coefficient angulaire* de la droite d'équation $y = ax + b$. Ce nombre n'est autre que le nombre, *tang* φ, considéré plus haut, c'est-à-dire la tangente de l'angle aigu ou obtus que fait le demi-axe OX avec la parallèle menée par O à la droite considérée (au-dessus de l'axe des x), ou — si l'on veut — *la tangente de l'angle aigu ou obtus que fait le même demi-axe (prolongé) avec la droite considérée, au-dessus de l'axe des x* [ce nouvel angle est égal au précédent d'après le n° **169**].

542. Représentation du trinome du second degré. — Soit $y = ax^2 + bx + c$ le trinome considéré [1]. On démontre les faits suivants (voir la démontration au chap. IV) :

La courbe représentative du trinome est une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des y et pour sommet le point d'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$

[1] Voir, sur ce mot, *supra* n° 305.

et d'ordonnée $c - \frac{b^2}{4a}$: les branches (¹) de cette parabole sont dirigées vers le haut (sens de OY) ou vers le bas (sens de OY′) suivant que $a > o$ ou $a < o$. D'où les divers cas de figures possibles (sur les figures ci-contre nous ne figurons pas l'axe Y′OY qui se trouve à droite ou à gauche de l'axe de la parabole suivant que $-\frac{b}{a} < o$ ou $-\frac{b}{a} > o$).

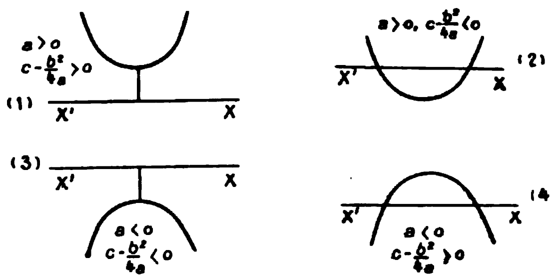


Fig. 193.

On voit que la courbe rencontre l'axe des x en deux points — et, par conséquent, que le trinome a deux *racines* (valeurs de x pour lesquelles $y = o$) — si $c - \frac{b^2}{4a}$ et a sont de signes contraires, donc si le produit de ces quantités est négatif, donc si

$$4ac - b^2 < o \qquad \text{ou} \qquad b^2 - 4ac > o.$$

Dans le cas particulier où l'on aurait $4ac - b^2 = o$, la courbe serait tangente à l'axe des x au point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$ et le trinome aurait une seule racine (double, voir n° **338**).

543. — Il est facile de se rendre compte de la forme approximative de la courbe avant même de savoir qu'elle appartient au genre parabole en raisonnant comme il suit :

(¹) On dit que la « concavité de la courbe » est dirigée vers les y *positifs* dans le premier cas, vers les y *négatifs* dans le second cas. (Cf. *infra* § 6).

D'après l'identité (XVI) du n° **305**, nous avons

$$(1) \qquad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où $a > 0$.

Lorsque x est négatif et très grand en valeur absolue, il en est de même de $x + \frac{b}{2a}$; donc le carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est positif et très grand ; ce carré ne cesse de décroître, à partir [1] de $+\infty$, lorsque x décroît en valeur absolue ; il en est donc de même de son produit par le nombre positif a, et de même aussi de son produit par a, *moins* un nombre constant. Donc y décroît, à partir de $+\infty$, jusqu'à ce que la valeur absolue de $x + \frac{b}{2a}$ devienne nulle, c'est-à-dire jusqu'à ce que $x = -\frac{b}{2a}$; cette valeur de x est un *minimum* pour la fonction y $\left(\text{qui prend, à ce moment, la valeur } \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

On constate de même que, lorsque x croît de $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$, y va en croissant jusqu'à $+\infty$.

D'ailleurs il résulte de l'égalité (1) que deux valeurs de x également distantes de $-\frac{b}{2a}$ [c'est-à-dire deux valeurs x' et x'' telles que $x'' - \left(\frac{-b}{2a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}\right) - x'$] fournissent la même valeur de y. Donc la courbe représentative du trinome est *symétrique* (n° **176**) par rapport à la parallèle à l'axe des y et menée par le point correspondant au minimum.

544. Résolution de l'inégalité du second degré. — Soit proposé le problème suivant : *Trouver les conditions auxquelles doit satisfaire le nombre x pour que l'on ait*

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c > 0,$$

a, b, c étant trois nombres donnés. La résolution de ce problème est facile si l'on se réfère à la représentation géométrique du trinome

$$y = ax^2 + bx + c.$$

[1] Sur la notation $+\infty$, voir n° 398.

Supposons pour fixer les idées que a soit *positif* et distinguons entre les trois cas suivants :

1° $b^2 - 4ac < 0$: le trinome, alors n'a pas de racines, et la parabole représentative est toute entière au-dessus de l'axe des x, (1re fig. 193) ; donc le trinome, égal à l'ordonnée y, est *positif pour toute valeur de x*, et l'*inégalité* (2) est toujours satisfaite ;

2° $b^2 - 4ac = 0$: en ce cas la courbe touche l'axe des x au point $x = -\frac{b}{2a}$ et est au-dessus partout ailleurs : donc *l'inégalité* (2) *est vérifiée pour toute valeur de x, exception faite pour la valeur $x = -\frac{b}{2a}$, pour laquelle $ax^2 + bx + c = 0$* ;

3° $b^2 - 4ac > 0$; en ce cas la parabole a la disposition représentée par la 2e figure 193 : l'ordonnée y est négative pour les valeurs de x comprises entre les racines x' et x'', positive pour toute autre valeur de x ; donc l'*inégalité* (2) *est vérifiée pour toutes les valeurs de x qui sont extérieures à l'intervalle x', x''.*

On discutera de la même manière le cas où le premier coefficient du trinome a, est négatif.

L'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$ se trouve résolue en même temps que l'inégalité (2), puisque les valeurs de x qui la vérifient sont celles pour lesquelles l'inégalité (2) n'est pas satisfaite.

545. Comparaison d'un nombre donné aux racines d'une équation du second degré. — C'est là une question qui se pose à l'occasion de nombreux problèmes. Etant donné un nombre λ et une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, dont les racines x' et x'' sont supposées exister, mais n'ont pas été calculées, comment reconnaître rapidement si le nombre λ est *compris entre les deux racines*, ou plus petit que la plus petite racine (soit x') ou plus grand que la plus grande (soit x'') ?

On peut répondre immédiatement à cette question en calculant la quantité $a\lambda^2 + b\lambda + c$, valeur du trinome pour la valeur λ de x.

En effet, supposons d'abord a positif. L'équation étant supposée avoir deux racines x', x'', nous sommes dans le cas de la 2e figure 194 : on voit qu'une valeur de x à laquelle correspond une ordonnée négative est nécessairement *intérieure* à l'intervalle x', x''.

En raisonnant de même sur le cas de la 4e figure 193 (*a négatif*) on parvient à la conclusion générale suivante :

Le nombre λ *est compris entre les racines du trinome ou extérieur à l'intervalle de ces racines suivant que la quantité* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *a le même signe que* a *ou le signe contraire.*

Dans le cas où le nombre λ est extérieur à l'intervalle x', x'', il sera évidemment plus petit que x' ou plus grand que x'' suivant qu'il sera inférieur ou supérieur à la demi-somme des racines [1] $\frac{x' + x''}{2}$. Or cette demi-somme a pour valeur $\frac{-b}{2a}$, et l'on pourra toujours lui comparer λ sans être obligé, pour cela, de faire le calcul des racines x' et x''.

569. Représentation de la fonction $y = \frac{1}{x}$. — On démontre que la courbe figurative de la fonction $y = \frac{1}{x}$ est une hyperbole qui a pour *centre* (n° **245**) l'*origine* o et pour *asymptotes* les deux axes de coordonnées. La figure montre que pour $x = 0$ l'*ordonnée* $\left(y = \frac{1}{x}\right)$ est infinie ; d'ailleurs pour x positif et voisin de o, l'ordonnée est positive et très grande ; pour x négatif et très petit, l'ordonnée est négative et très grande en valeur absolue : ainsi lorsque x, croissant d'une manière continue franchit la valeur o, l'ordonnée passe d'une valeur négative infiniment grande à une valeur positive infiniment grande : on dit que y *saute* de $+\infty$ à $-\infty$ (cf. **398**).

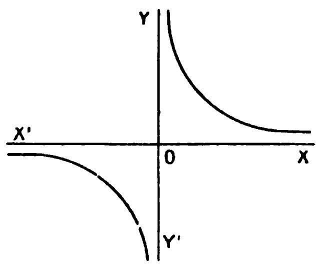


Fig. 194.

547. Représentation de la fonction implicite définie par la relation $x^2 + y^2 = 1$. — Appelant M un point quelconque de la courbe représentative, et P sa projection sur l'axe des x, nous dédui-

[1] Car, quels que soient les nombres relatifs x' et x'', on a nécessairement $x' < \frac{x' + x''}{2} < x''$ puisque $x' < x''$; donc si, par exemple, λ est inférieur à $\frac{x' + x''}{2}$, il ne peut être plus grand que x''.

sons du théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle POM que $OM^2 = 1$, donc $OM = 1$. Ainsi la courbe représentative de la fonction [qui, sous forme explicite, s'écrit $y = \sqrt{1 - x^2}$] est composée des points situés à la distance 1 de l'origine : c'est un *cercle*.

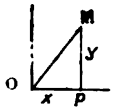


Fig. 195.

Nous trouverons au prochain paragraphe l'occasion de signaler quelques nouvelles courbes figuratives de fonctions.

548. Inégalités à deux variables. — Etant donnée une fonction continue, $f(x, y)$, des deux variables x, y, par exemple un polynome en x et y, posons-nous la question suivante : *Quels sont les systèmes de valeurs de x et y pour lesquels cette fonction est positive ? Quels sont les systèmes de valeurs pour lesquelles elle est négative ?* La figuration cartésienne fournira souvent un moyen simple de répondre à cette question : elle permettra, dira-t-on, de « *résoudre* » *l'inégalité* $f(x, y) > 0$ *ou* $f(x, y) < 0$.

Envisageons (fig. 196) la courbe représentative de la fonction implicite y de x définie par la relation $f(x, y) = 0$ où f est un polynome, et supposons, pour nous placer dans un cas simple, que cette courbe soit *fermée* et ait approximativement la forme d'une ellipse.

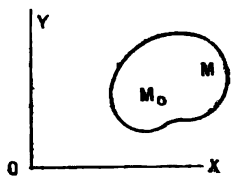


Fig. 196

Considérons un point quelconque M (de coordonnées x et y) que nous faisons varier à partir d'une position M_0 (de coordonnées x_0, y_0) située à l'intérieur de la courbe. Supposons de plus, pour fixer les idées, que le polynome f ait le signe + au point M_0, c'est-à-dire que $f(x_0, y_0) > 0$. Lorsque M varie d'une manière continue, il en est de même de la valeur de la fonction $f(x, y)$ [en vertu des propriétés des fonctions continues] : cette fonction, en conséquence, *ne peut sauter brusquement d'une valeur positive à une valeur négative*. Positive elle est, et positive elle restera, tant que le point M ne traversera pas une position pour laquelle la fonction soit nulle ; mais les points pour lesquels $f(x, y)$ est nul sont, par hypothèse, les points de la courbe et ces points seulement : donc la *fonction conservera le même signe, tant que le point* **M** *restera à l'intérieur de la courbe.*

On démontrera de même que le polynome $f(x, y)$ a un signe invariable pour toutes les positions du point M (de coordonnées x, y) *extérieures* à la courbe.

D'ailleurs, il est facile de démontrer [1] que si *le polynome $f(x, y)$ est positif à l'intérieur de la courbe* (c'est-à-dire pour les positions de M intérieures à la courbe), *il est négatif à l'extérieur* ; et inversement, *s'il est négatif à l'intérieur, il est positif à l'extérieur.* Ainsi les systèmes de valeurs de x et y pour lesquels on a $f(x, y) > 0$ sont les coordonnées de tous les points situés, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la courbe.

L'étude des inégalités correspondant à des courbes de formes plus compliquées sera souvent plus délicate, mais pourra être faite d'une manière semblable.

3. — L'étude graphique des fonctions d'une variable.

549. — Nous avons dit que la méthode cartésienne de figuration permettait de trouver et d'interpréter très simplement les principales propriétés des fonctions d'une variable. Et de fait, au fur et à mesure qu'apparaissaient et se précisaient ces propriétés (au XVIIe, au XVIIIe, et pendant la première moitié du XIXe siècle), elles s'exprimaient immédiatement en langage géométrique. Comment et sous quelle forme au juste, c'est ce que nous allons voir en suivant pas à pas les définitions et les propositions du chapitre II.

550. Fonction définie dans un intervalle (cf. **391**). **Branches de fonction** (cf. **395**). — Dire qu'une fonction est définie dans un intervalle a, b, c'est dire que la courbe représentative est définie pour les abscisses comprises entre deux valeurs a et b, et par conséquent *entre les parallèles à l'axe des y menées par les points* A *et* B *de l'axe* X'OX, *extrémités des abscisses a et b* (fig. 197).

[1] S'il n'en était pas ainsi, la fonction $f(x, y)$ se trouverait être positive ou nulle pour *toutes* les positions du point M dans le plan. Or on démontre que cette circonstance ne peut se présenter pour aucun polynome.

Une fonction — explicite ou implicite — y de x sera regardée comme ayant plusieurs *branches* s'il y a des droites parallèles à l'axe des y qui coupent la courbe représentative en plusieurs points [traduisons : s'il y a plusieurs points de la courbe qui ont même abscisse, ou, en d'autres termes, si à une même valeur de x (dans certains intervalles tout au moins) correspondent plusieurs valeurs de y (n° **395**)]. Appelons M_1 et M_2 deux points d'une même courbe représentative ayant *même* abscisse (segment OP) : lorsque l'extrémité, P, du segment-abscisse, se déplacera sur l'axe des x, chacun des points M_1 et M_2 décrira une *branche* de la courbe (fig. 198).

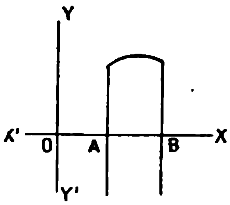


Fig. 197.

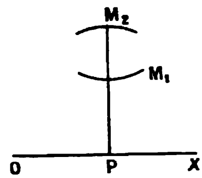


Fig. 198.

Exemple. — La fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$ [définie par la relation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, n° **547**] — ou: pour parler géométriquement, la courbe qui représente cette fonction — a deux branches, l'une *au-dessus* de l'axe des x, l'autre *au-dessous* : les deux branches se rejoignent sur l'axe des x aux points d'abscisses $+1$ et -1.

551. Intervalles où la fonction n'existe pas. — Si aux valeurs de x situées dans un certain intervalle a, b, ne correspond aucune valeur de y, la *fonction n'existe pas dans cet intervalle* : il n'y a alors aucune branche de courbe entre les parallèles à l'axe des y menées par les extrémités des abscisses a et b; et réciproquement.

Ainsi à la relation implicite $x^2 + y^2 = 0$ ne correspond géométriquement qu'*un point*, l'origine des coordonnées : en effet la fonction $y = \sqrt{-x^2}$ n'existe que si $x = 0$ (pour toute autre valeur de x, $-x^2$ n'a pas de racine carrée).

552. Continuité. — La continuité — telle que nous l'avons caractérisée au n° **396** — est un attribut essentiel de la notion de courbe

géométrique : une fonction de x sera, par définition, une fonction continue dans un intervalle, si la courbe ou branche de courbe correspondante *peut être tracée d'un trait continu* et si, d'autre part, elle ne coïncide, dans aucune de ses parties) avec une parallèle à l'axe des y (un segment parallèle à l'axe des y à la distance a de l'origine représenterait, en effet, une fonction qui, pour la valeur a de x, sauterait d'une valeur à une autre) [1].

553. Pôles et infinis (cf. **398**). — Si une branche de fonction devient infinie lorsque x, variant avec continuité, atteint une certaine valeur (finie) x_0, la branche de courbe correspondante s'éloigne indéfiniment en se rapprochant de plus en plus de la parallèle à l'axe des y menée par l'extrémité de l'abscisse x_0 : elle est dite *asymptote* à cette droite.

Si la fonction $y = f(x)$ *existe* pour des valeurs de x situées de part et d'autre de la valeur de x_0 (qui est un *pôle* ou *infini*, voir **398**), il y a deux branches de courbes asymptotes à la même droite, à gauche et à droite, comme il arrive dans l'exemple que nous avons considéré au n° **546**) [2].

Voici, d'ailleurs, d'autres exemples de fonctions qui présentent des pôles ou infinis.

Fonction [3] $y = \frac{3x^2 - 6x + 2}{x(x-1)(x-2)}$. Cette fonction devient infinie (présente un pôle) lorsque x prend l'une des valeurs 0, 1, 2 qui annulent le dénominateur. La courbe représentative a la forme représentée par la figure 199 : elle a des branches asymptotes à l'axe des y et aux parallèles à l'axe des y menées par les points d'abscisses $+1$ et $+2$.

[1] Nous verrons en géométrie analytique qu'une parallèle à l'axe des y a pour équation $x = a$: il ne lui correspond aucune fonction de x.

[2] Plus généralement la fonction $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, fonction homographique, dont les coefficients a, b, c, d sont des nombres quelconques, est représentée par une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

[3] On peut écrire (en effectuant l'opération indiquée au n° 374)
$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

Fonction $y = \frac{1}{x^2}$. Cette fonction a un pôle pour $x = 0$; mais, à l'inverse des précédentes, elle ne saute pas de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque x traverse la valeur 0 : elle est en effet positive pour toute valeur de x : la courbe a l'allure représentée par la figure 200 [1].

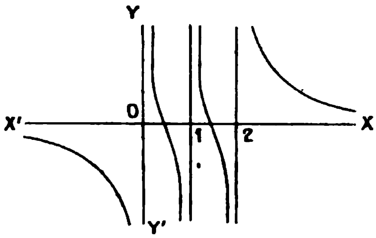


Fig. 199.

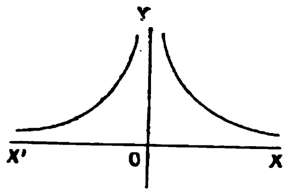


Fig. 200.

554. Dérivée : coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative. — Nous avons défini au, § *2* du Chap. II, « la *dérivée* d'une fonction de x » pour une valeur quelconque de la variable (pour laquelle la fonction est supposée définie, continue, univoque). En vue d'interpréter géométriquement cette dérivée, reportons-nous à sa définition.

[1] Les circonstances que nous venons d'indiquer se présenteront pour toutes les fonctions rationnelles de *n*. Considérons, en effet, une fonction rationnelle quelconque, décomposée sous la forme (3) du n° 374 ; les pôles de la fonction sont évidemment les valeurs de x qui annulent les dénominateurs des fractions simples figurant dans la décomposition, c'est-à-dire les valeurs $x_1, x_2, \dots x_n$ du n° 374. Envisageons l'une quelconque de ces valeurs, soit x_1, qui est supposée racine d'ordre α_1 de $A(x)$. L'identité du n° 374, nous donne d'après la note 1 de la page 548,

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{c_1 \alpha_1 [\dots]}{(x - x_1)^{\alpha_1}}$$

où tous les termes entre crochets sont nuls pour $x = x_1$ (cf I, 9, p. 6-7, note). On en conclut que pour les valeurs de x très voisines de x_1, la fraction $\frac{B(x)}{A(x)}$ [et par conséquent, aussi, la somme de cette fraction et d'un polynome $P(x)$, qui conserve une valeur finie pour $x = x_1$] a pour signe le signe de la fraction *très grande en valeur absolue* $\frac{c_1 \alpha_1}{(x - x_1)^{\alpha_1}}$. En conséquence, la fonction saute de $+\infty$ à $-\infty$ (comme dans le cas de la figure 199) ou conserve au contraire le même signe (comme dans le cas de la fig. 200) lorsque x traverse le pôle.

Soit M le point de la courbe représentative qui a pour abscisse x, et y l'ordonnée de ce point. [Conformément à la remarque faite au n° **407** je désigne par x, sans indice, une valeur quelconque de l'abscisse ; sur la figure je suppose, pour fixer les idées, $x > 0$, $y > 0$]. A l'abscisse $x + \Delta x$ voisine de l'abscisse x (voir pour les notations, le n° **407**) correspond une ordonnée $y + \Delta y$ et un point M_1 de la courbe. Appelons P le point de coordonnées $x + \Delta x$, y; puis menons la droite M_1M et prolongeons-la jusqu'à l'axe des x. Dans le triangle rectangle PMM_1, nous avons (n° **215**) :

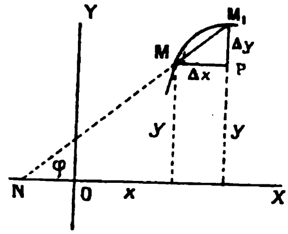


Fig. 201.

$$\text{tang } M_1MP = \frac{PM_1}{MP} = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

donc $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tang } \varphi$, en appelant φ l'angle M_1MP, égal à MNX, qui est (voir n° **541**) le *coefficient angulaire* de la droite MM_1.

Supposons maintenant que nous donnions à l'accroissement Δx des valeurs de plus en plus petites (cf. n° **407**). Que devient alors le triangle PMM_1 [appelé par Leibniz *triangle caractéristique*] et en particulier la droite MM_1 ? Cette droite coupe la courbe au point M et en un point M_1 qui est de plus en plus rapproché de M : à la limite, M_1 vient se confondre avec M et la droite ne rencontre plus la courbe (au voisinage du point M) qu'au seul point M : elle la touche sans la traverser ; elle est, dirons-nous — en reprenant une expression qui a été employée de tous temps dans la théorie des sections coniques — *tangente* à la courbe.

D'une manière générale nous appellerons *tangente* à une courbe *au point* M (point de contact) la *position-limite* MT que vient occuper une sécante MM_1 (coupant la courbe aux points M et M_1) lorsque le point d'intersection M_1 se rapproche indéfiniment du point M et vient coïncider avec lui.

Supposant prouvée l'existence de la tangente ainsi définie, nous pouvons dire que, lorsque Δx *tend vers* zéro, *le coefficient angulaire de la droite* MM_1 *admet une limite, qui est le coefficient angulaire de la tangente en* M *à la courbe.*

En d'autres termes, **la dérivée d'une fonction, pour une valeur**

quelconque de la variable, est le coefficient angulaire de la tangente géométrique [1] à la courbe représentative, menée au point qui correspond à la valeur considérée de l'abscisse.

555. — Dire qu'une fonction admet une dérivée pour une valeur x de la variable, ou dire que la courbe représentative admet une tangente au point M (correspondant à l'abscisse x), sont deux propositions équivalentes. [Par la seconde proposition il faut entendre expressément que la sécante MM_1 (supposée prolongée) prend la même position-limite TMT′ lorsque M_1 se rapproche indéfiniment du point M *sur l'un ou l'autre des arcs de la courbe qui aboutissent au point* M (à droite ou à gauche, figure 202)].

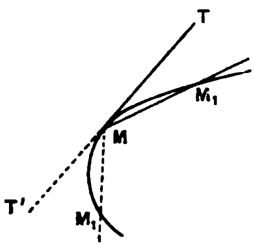


Fig. 202.

Cette condition se trouve satisfaite, pour toutes les fonctions — ou courbes — continues qu'étudie l'algèbre classique, et il est clair, d'ailleurs, que, si nous cherchons à nous *représenter* une courbe, nous ne pouvons guère l'imaginer que comme une ligne ayant tout de son long des tangentes (sauf peut-être en certains points exceptionnels).

Et, pourtant, nous verrons plus loin que le fait d'admettre une dérivée n'est point, malgré tout, un attribut nécessaire de la notion de fonction : on peut par certains procédés algébriques définir des classes de fonctions continues qui ne possèdent point de dérivées. Mais ce sont là des cas exceptionnels qui n'amoindrissent nullement l'importance considérable de la proposition du n° **554**. En rattachant la définition de la dérivée à une notion géométrique aussi simple et claire que celle de tangente en un point d'une courbe, nous donnons à la théorie de la dérivation la base solide dont elle avait besoin pour se constituer définitivement et jouer en algèbre le rôle de premier plan que le Chap. II a mis en évidence.

L'étude arithmético-algébrique des accroissements Δx, Δy et de

[1] Nous disons « géométrique » pour distinguer la tangente ci-dessus définie, qui est une droite, de la tangente trigonométrique qui est un nombre.

leur rapport devait nécessairement paraître un peu suspecte aux mathématiciens du XVIIe siècle qui n'étaient pas comme nous habitués à raisonner sur des quantités *infiniment petites*. Toutes les difficultés, disparaissaient, par contre, si l'on donnait à ce rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ un sens géométrique précis par le moyen du *triangle caractéristique* (**554**). Tel fut le point de départ de Leibniz, et c'est là ce qui lui valut d'être considéré, au XVIIIe siècle, comme le père de la théorie des dérivées [1]; le succès de sa méthode [2] tient

[1] *Vide*, p. 396 et 400, notes.

[2] Dans une lettre adressée à TSCHIRNHAUS (5 décembre 1679; ap *Briefwechsel mit Mathematikern*, éd. GERHARDT, p. 407 sqq.), LEIBNIZ explique comment il fut conduit à sa « méthode du triangle caractéristique ». Il a lu les traités géométriques de Pascal — dont il a particulièrement subi l'influence — et y a trouvé, à propos dun problème spécial, l'idée première, non développée il est vrai, du triangle caractéristique. Poursuivant ses études et ses réflexions il étudia la géométrie cartésienne : « cœpi quærere modum exprimendi loca [lieux géométriques, *vide*, n° 241] seu curvas per calculum, et tum primum intellexi ea quæ Cartesius scribit. Nam antea solebam calculare meo more, adhibitis non litteris sed nominibus linearum. Tum primum igitur Cartesium et Schotenium attente legi, hortante Hugenio qui mihi dicebat modum calculandi ab ipsis adhibitum esse commodiorem. Ego interea, aperto semel characteristici trianguli aditu, facillime innumera theoremata inveniebam quibus plurimas tunc chartas adimplevi; sed pleraque postea reperi etiam Heuratio, Gregorio et Barrovio innotuisse ». Effectivement, van HEURAET, puis GREGORY dans sa *Geometriæ pars universalis* (1668) et surtout BARROW, dans ses *Lectiones Geometricæ* (1669-70), avaient traité de nombreuses questions, que nous résolvons aujourd'hui à l'aide des dérivées, et qui se ramenaient alors à la détermination géométrique des tangentes à une courbe donnée. NEWTON (à l'instigation duquel BARROW dit avoir rédigé la partie de son livre qui traite spécialement du problème des tangentes) partit de là pour fonder sa méthode générale des *fluxions* ou dérivées.

Plus de trente ans auparavant, FERMAT avait proposé une méthode algébrique pour la résolution du problème des tangentes, méthode à laquelle Leibniz et Newton ne font que rarement allusion dans leurs premiers écrits, mais où l'on trouve cependant la conception très nette de la dérivée et du triangle caractéristique. Cette méthode est indiquée dans un petit écrit, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, qui fut communiqué à Descartes par Mersenne en janvier 1638 : il s'agit tout d'abord de déterminer d'une manière générale la ou les valeurs de la variable indépendante qui rendent une fonction maxima ou minima [voir le n° 556]; la recherche des tangentes (*De tangentibus curvarum linearum*) se présente comme une application de ce problème général. Descartes, trop absorbé dans l'application de ses propres méthodes, ne

principalement à ce fait qu'il se réfère directement à la figuration cartésienne des fonctions et que sa théorie apparaît ainsi comme un prolongement naturel de l'étude générale des fonctions d'une variable instituée par la *Géométrie* de 1637.

556. Signe de la dérivée. Maxima et minima (Cf. **419**. — Les axes étant disposés comme sur la figure ci-contre il est facile d'interpréter les propositions du n° **419**. Si, pour une certaine valeur de la variable, la dérivée est *positive*, la fonction est croissante : donc la courbe *monte* lorsque l'extrémité de l'abscisse se déplace vers la droite ; si la dérivée est négative, la fonction est décroissante, la courbe *descendante* (comparer n° **543**).

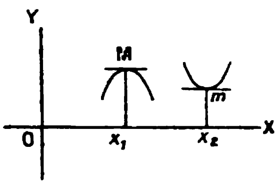


Fig. 203.

Si la fonction présente un *maximum* pour une valeur x_1 de l'abscisse (la dérivée étant nulle et la dérivée seconde, y', négative (voir n° **419**), la courbe, de montante qu'elle était, devient descendante ; la tangente géométrique au maximum (c'est-à-dire au point M d'abscisse x_1, fig. 203) est horizontale (*parallèle à l'axe des x*), puisque son coefficient angulaire (égal à la dérivée) est nul.

Si la fonction présente un *minimum* pour $x = x_2$ (la dérivée étant nulle et la dérivée seconde positive) la courbe a encore au point M d'abscisse x_2 une tangente parallèle à l'axe des x.

Si pour une valeur x_1 de x, les dérivées première et seconde, y' et y'' sont toutes deux nulles, la dérivée d'ordre trois, y''', étant non-nulle, nous avons vu (**419**) que la fonction ne présente pour $x = x_1$ ni maximum, ni minimum ; elle est croissante ou décroissante suivant que $y'''(x_1) < 0$ ou $y'''(x_1) > 0$; en ce cas la

comprit pas la pensée de Fermat et adressa à ce géomètre les critiques les plus injustes. Le traité de Fermat ne fut imprimé qu'en 1679 et n'exerça pour ainsi dire point d'influence. Cependant il n'est pas prouvé que Leibniz ne l'ait pas connu.

La méthode employée par Descartes, dans sa *Géométrie*, pour déterminer algébriquement la tangente à une courbe, n'est point immédiatement liée à la notion de dérivée, et nous ne nous en occuperons pas. Nous laisserons également de côté la méthode de Roberval qui est fondée sur des propositions de *cinématique*

courbe a toujours au point d'abscisse x_1, une *tangente parallèle* à l'axe des x (puisque $y'(x_1) = 0$), mais elle *traverse* cette tangente, continuant de croître ou de *décroître* (voir fig. 204). Un point où la courbe traverse ainsi sa tangente est dit « *point d'inflexion* ».

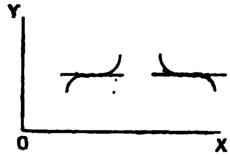


Fig. 204.

557. Application : sinusoïde. — Considérons la fonction $y = \sin x$. Elle s'annule pour les valeurs $0, \pi, 2\pi, \ldots$ et $-\pi, -2\pi, -3\pi$ de la variable : donc la courbe représentative *coupe* l'axe des x aux points d'abscisses ..., $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ (puisqu'en tous ces points l'ordonnée est nulle).

D'autre part, nous avons $y'(x) = \cos x$ et $y''(x) = -\sin x$ [dérivée de $\cos x$]. La dérivée s'annule pour les valeurs de x :

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2}, \ldots$$

[puisque pour ces valeurs le cosinus est nul]. D'ailleurs on a :

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = 1, \ldots \text{etc.};$$

d'où l'on conclut que la dérivée seconde, $-\sin x$, est :

négative pour les valeurs

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - 2\pi, \ldots$$

positive pour les valeurs

$$\frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi \ldots \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{2} - 2\pi, \ldots;$$

donc la courbe représentative présente des *maxima* aux points correspondant aux premières de ces valeurs et des *minima* aux points correspondant aux secondes. Aux *maxima* l'ordonnée est égale à 1 [puisque $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, etc.]; aux *minima* elle est égale à -1.

De là résulte que la courbe a l'allure représentée ci-contre. Elle est indéfiniment prolongeable dans les deux sens et ses boucles, qui

se succèdent sur la figure à des intervalles de longueur 2π, ont toutes exactement même forme et même dimension puisque, quel que soit le nombre x, on a $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

La courbe représentative de la fonction $\sin x$ est appelée *sinusoïde*.

Le cosinus est représenté par la même courbe géométrique, mais différemment placée par rapport aux axes de coordonnées [1].

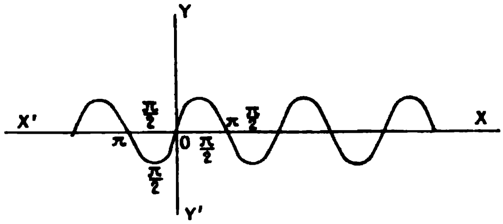


Fig. 205.

558. Courbe exponentielle. — A l'inverse de la sinusoïde, la courbe qui représente la fonction e^x (n° **429**) ne présente aucun maximum ni minimum, puisque la dérivée e^x ne s'annule pour aucune valeur de x. La courbe est toujours montante (l'ordonnée varie de o à $+\infty$) et a l'allure indiquée par la fig. 206.

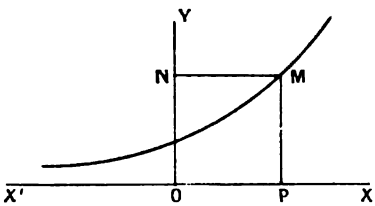


Fig 206.

Elle coupe l'axe OY au point A situé à la distance 1 (*unité de longueur*) de l'origine puisque pour $x = 0$, l'ordonnée e^0 a pour valeur 1. Elle est appelée *courbe exponentielle*.

Suivant une remarque que nous avons faite (p. 506, note 1), la même courbe représente la fonction de y, $x = \log y$ ou Ly, inverse de la fonction $y = e^x$. D'où une méthode graphique permettant — une fois la courbe construite — d'obtenir immédiatement le *logarithme népérien* d'un nombre quelconque. Désignant par N, sur l'axe OY

[1] On le constate en rappelant que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \text{ou} \qquad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

l'extrémité de l'ordonnée égale au nombre proposé, menons par N la parallèle à OX, qui coupe la courbe exponentielle en un point M : *le logarithme du nombre est l'abscisse* $l = \mathrm{OP}$ *du point* M.

En appliquant ce procédé graphique, on aperçoit immédiatement sur la figure les propriétés suivantes des logarithmes (*vide* n° **146**) : Seuls les nombres positifs (figurés par des point de OY au-dessus de l'axe des x) ont des logarithmes ; — le logarithme est positif ou négatif suivant que le nombre est supérieur ou inférieur à 1 ; — le logarithme de 0 est infiniment grand négatif.

559. Etude de la variation d'une fonction. — En résumé l'étude de la « variation » d'une fonction univoque porte principalement sur les points suivants : 1° détermination de l'intervalle ou des intervalles où la fonction *existe* [si la fonction existe pour toutes valeurs de x, on dira qu'elle existe dans l'intervalle $-\infty, +\infty$]; 2° détermination des valeurs de x (s'il s'en trouve) pour lesquelles y devient infini; étude de l'allure de la courbe au voisinage de ces valeurs (n° **553**); 3° détermination exacte (ou, à défaut, approximative) des maxima et des minima qui séparent les intervalles où elle est croissante ou décroissante [1]; détermination (exacte ou approchée) des valeurs prises par la fonction en ces maxima et minima; 4° tracé de la courbe représentative. C'est par cette série d'opérations que l'on parvient par exemple à la courbe représentée par la fig. 199 que nous avons considérée au n° **553**.

560. Dérivée infinie [2]. — Appelons y' la dérivée de la fonction $y = f(x)$, et voyons ce qu'il advient si cette dérivée prend une valeur infinie pour une valeur isolée, x_0, de la variable. Nous supposerons qu'au voisinage de cette valeur, la courbe représentative présente — comme il arrivait dans le cas étudié au n° **554** — une branche unique et continue.

[1] Si la fonction, ou plutôt la courbe représentative, présente des points d'inflexion pour lesquels y' et y'' sont nuls, on déterminera ces points par la même occasion. La courbe peut d'ailleurs présenter d'*autres points d'inflexion* où la tangente n'est pas parallèle à l'axe des x [points où $y'' = 0$, $y' \neq 0$] : nous parlerons ultérieurement de ces points (chap. IV).

[2] Voir au chap. IV, § 6 la discussion complète à laquelle donne lieu la définition de la dérivée d'une fonction algébrique.

Considérons alors un point M de la courbe que nous rapprocherons de plus en plus du point M_0 correspondant à l'abscisse x_0. Lorsque la valeur absolue de y' est *arbitrairement grande*, la direction de la tangente définie au n° **554**, ayant un coefficient angulaire arbitrairement grand — se rapproche *arbitrairement de la direction parallèle à l'axe des y*. Nous en concluons qu'*aux points de la courbe représentative où la dérivée a une valeur infinie, la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des y*.

4. — Les équations différentielles du premier ordre

561. — Considérons une équations différentielle du premier ordre (*vide* **472**) :

(1) $$F(x, y, y') = 0$$

ou, en résolvant ([1]) par rapport à y' :

(1 *bis*) $$y' = f(x, y).$$

Nous avons vu que, lorsqu'elle est intégrable (voir **478**) cette équation a une infinité de solutions (ou *intégrales particulières*) qui sont des fonctions de x : en particulier, si l'on se donne un système de valeurs (arbitraires) x_0 et y_0 des variables x et y, il existe en général une et une seule fonction $y = f(x)$ solution de l'équation (1), prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$ [intégrale déterminée par les *conditions initiales* x_0, y_0 (voir **477**)].

Pour interpréter géométriquement ces faits, envisageons la courbe représentative d'une quelconque des fonctions $y = f(x)$ qui sont solutions de l'équation (1) : on voit que cette courbe peut être caractérisée par la propriété suivante : *le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque de la courbe est déterminé par les valeurs des coordonnées du point, conformément à la relation* (1). Ainsi la courbe — que l'on appelle souvent, pour abréger, *courbe intégrale* de l'équation différentielle — se trouve

([1]) Cf. p. 446, note 1.

définie comme lieu géométrique de points jouissant d'une même propriété.

562. — La détermination géométrique de la courbe intégrale comme *lieu* est le problème que l'on appelait au XVIIe siècle *problème inverse des tangentes.* Il s'agit, non plus comme au n° **555** de déterminer la tangente en un point quelconque d'un point d'une courbe, donnée, mais, inversement de déterminer la courbe, étant connue la tangente en un point quelconque. Ce problème fut posé par Florimond de Beaune en l'année 1637 et chaque inventeur de « règles pour les tangentes » [1] d'en chercher aussitôt les « converses » [2]. Malheureusement l'équation particulière dont Beaune proposait spécialement l'étude présentait une difficulté assez déconcertante.

C'était l'équation que nous écririons aujourd'hui $u' = \frac{x - u}{a}$ (en appelant u la fonction inconnue). Opérant le changement de variable $y = u + a - x$, (*vide* n° **480**) Descartes [3] la transforma en l'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a}$, que nous pouvons écrire :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{a}.$$

En intégrant, nous avons : $\log y = -\frac{x}{a} + c$, d'où l'intégrale générale [4] $y = c_1 e^{-\frac{x}{a}}$. (c_1 constante arbitraire).

Les fonctions y ainsi définies sont, on le voit des fonctions transcendantes, et les courbes représentatives sont du type de la *courbe exponentielle.*

Or ces courbes ne sont pas de celles que Descartes étudiait

(1) Voir p. 521, note 1.

(2) Voir en particulier la lettre de DESCARTES à BEAUNE du 20 février 1639 (*Œuv. de Descartes,* t. II, p. 510) et la note de PAUL TANNERY, *ibid.*, p. 520 sqq.

(3) DESCARTES remplace en outre la variable x par la variable x_1, égale à $\sqrt{2}\,x$; nous pouvons nous dispenser de faire ce second changement de variable.

(4) *Vide,* n° 558 ; en particulier si $a = -1$, l'intégrale particulière pour laquelle $c_1 = 1$ est représentée par la courbe même que nous avons figurée (fig. 206).

dans sa *Géométrie* (*vide* n° **249**); il y avait au surplus, semblait-il, quelque chose de choquant à représenter par une courbe ou fonction transcendante la solution d'un problème dont l'énoncé n'implique que des opérations algébriques; ne convenait-il pas plutôt de déclarer le problème insoluble? C'est, on se le rappelle, une difficulté du même genre que nous avons déjà rencontrée dans la théorie des fonctions primitives (voir n° **453** et *infra* n° **570**).

563. — Quoi qu'il en soit, le problème de Florimond de Beaune ne tarda pas à être résolu dans des cas nombreux et une étude systématique en fut faite par Barrow le professeur de Newton dans ses *Lectiones geometricæ* (1669-70) [voir p. 521, note 1]. L'identité du problème inverse des tangentes et du problème des aires (ou recherche des fonctions primitives) fut alors reconnue, et la théorie des équations différentielles — dont nous avons par avance posé les bases au chapitre II en nous plaçant au point de vue de l'algèbre pure — se trouva fondée.

564. Construction graphique de l'intégrale. — L'interprétation géométrique que Barrow donnait des équations différentielles ne sert pas seulement à en illustrer la théorie. Elle fournit un procédé pratique permettant de *construire* effectivement les courbes intégrales des équations non encore intégrées, ou du moins des lignes se rapprochant beaucoup (*arbitrairement*) de ces courbes intégrales.

Partons de l'équation

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

supposée non-intégrée, et proposons-nous de déterminer d'emblée, par un procédé graphique, la figure approximative de la courbe intégrale de cette équation qui est déterminée par les conditions initiales x_0, y_0, c'est-à-dire passe par le point M_0 de coordonnées x_0, y_0.

Tout d'abord, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe cherchée au point M_0 est connu : il a pour valeur [d'après l'équation (2)] : $y_0' = f(x_0, y_0)$. La tangente géométrique à la courbe en M_0 est donc connue : appelons-la M_0T_0 (fig. 207). Admettons, maintenant, pour un moment, qu'au voisinage de M_0, la courbe cherchée

soit rectiligne, ce qui revient à assimiler un petit arc de courbe M_0M à un segment de la tangente M_0M_1 (assimilation d'autant moins éloignée de la vérité que l'arc est plus petit). En d'autres termes prenons sur la tangente M_0T_0 un point M_1 (de coordonnées x_1, y_1)

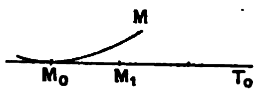


Fig. 207.

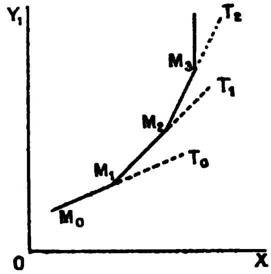


Fig. 208.

très rapproché de M_0 (fig. 208) et admettons que notre courbe intégrale passe par ce point. S'il en est ainsi, elle devra avoir, en ce point, une tangente dont le coefficient angulaire est $y_1' = f(x_1, y_1)$; soit M_1T_1 cette tangente ; prenons sur elle un point M_2 (de coordonnées x_2. y_2), très rapproché de M_1 et admettons que notre courbe intégrale passe par ce point ; la courbe devra avoir, en M_2, une tangente dont le coefficient angulaire est $y_2' = f(x_2, y_2)$; et ainsi de suite.

Nous obtenons ainsi une ligne brisée $M_0M_1M_2M_3$, ... dont la figure se rapproche d'autant plus d'une ligne courbe que les segments M_0M_1, M_1M_2, ... sont plus petits. D'ailleurs si nous regardons cette ligne comme une courbe ayant pour tangentes aux points successifs M_0, M_1, les droites M_0T_0, M_1T_1, ..., cette courbe satisfera bien en tous les points M_0, M_1, ... à la condition posée par l'équation différentielle (1). Nous pouvons donc la considérer comme représentant approximativement (avec une *approximation arbitrairement* grande) une courbe intégrale de notre équation [1].

Observons d'ailleurs que le choix du point M_0 d'où nous sommes partis est absolument arbitraire. Nous pourrons donc construire

[1] Ce mode de construction qui consiste à remplacer la courbe par un contour formé de petites lignes (*lineolæ*) fut indiqué par Jean Bernouilli en 1694 (*Modus generalis construendi omnes æquationes differentiales primi gradus*, ap. *Acta eruditorum*, novembre 1694 ; *Œuv.*, t. I, p. 123 et suiv.). Déjà Leibnig en avait eu l'idée dès 1675.

une infinité de courbes intégrales. [Plus précisément, par tout point du plan nous en pouvons faire passer une].

565. — La construction que nous venons d'indiquer constitue ce que l'on appelle une méthode graphique de résolution des équations différentielles. La simplicité de cette construction nous inspire immédiatement une idée : ne pourrait-on pas se fonder sur elle, non seulement pour représenter les intégrales des équations, mais pour en *démontrer l'existence*? Il est, on l'a vu, un grand nombre d'équations différentielles que nous sommes incapables d'intégrer (au sens du n° **478**) : cela étant, rien, dans l'état actuel de nos connaissances, ne nous autorise à affirmer à l'avance que ces équations ont effectivement des solutions ou intégrales; cependant nous pouvons toujours leur appliquer la méthode de résolution graphique décrite ci-dessus, et cette méthode nous conduira toujours à une ligne brisée M_0, M_1, ... qui se rapprochera arbitrairement d'une courbe (1) lorsque ses côtés seront arbitrairement petits. [C'est un fait intuitivement évident qu'il en est bien ainsi, du moins lorsque $f(x, y)$ est une fonction continue de x et y]. Ne pouvons-nous, dès lors, considérer la **position-limite prise par la ligne brisée M_0M_1**, ... (lorsque la longueur de ses côtés tend vers zéro) **comme une courbe intégrale**, et démontrer rigoureusement que la fonction représentée par cette courbe est une solution de notre équation?

Hâtons-nous de dire que ce mode de démonstration a été effectivement utilisé et qu'il est aujourd'hui passé dans la pratique courante. Mais l'exemple du problème de Beaune (**562**) nous montre que des difficultés, alors insurmontables, devaient arrêter au XVIIe siècle ceux qui auraient voulu l'employer. Le raisonnement que nous avons esquissé soulève en effet deux questions préalables auxquelles il n'était alors pas possible de répondre : Sous quelles conditions une ligne tracée sur le papier est-elle une courbe géométrique, et sous quelles conditions une courbe représente-t-elle une fonction?

(1) Je prends ici le mot « courbe » dans son sens le plus général ligne tracée d'un trait continu.

5. — Fonctions primitives représentées par des aires (intégrales définies).

566. — Déterminer la, ou, plus exactement, les *fonctions primitives*, d'une fonction $y = f(x)$, c'est résoudre ou intégrer l'équation différentielle $y' = f(x)$ [*vide*, **467**] ; le problème de la recherche des fonctions primitives (ou calcul des *intégrales indéfinies*, *voir* chap. II, § *5*) n'est donc qu'un cas particulier du problème étudié au § *4*. — Mais l'on peut donner de la fonction primitive une interprétation géométrique spéciale, fort avantageuse, qui n'a point d'équivalent dans la théorie générale des équations différentielles. Nous allons exposer cette interprétation, non point exactement telle qu'elle se présenta historiquement aux premiers algébristes qui en firent usage, — car elle fut tout d'abord rattachée à des considérations relatives aux « infiniment petits » dont nous ne parlerons que plus tard (*Troisième Livre*) et qui ne feraient, pour l'instant, que l'obscurcir à nos yeux —, mais telle que se la peut imaginer le lecteur qui est en possession de la notion moderne de dérivée.

567. — C'était, nous l'avons vu, l'un des plus anciens problèmes de la géométrie classique que celui qui a trait à la mesure des aires et des volumes, déterminés, dans le plan ou dans l'espace, par des lignes ou des corps diversement situés. Archimède était passé maître en ce genre de calcul, où il employait avec le plus grand succès la *méthode* dite d'*exhaustion* (cf. n^os^ **58**, **64**). De nombreux géomètres des temps anciens et modernes [1] étudièrent Archimède, le commentèrent et s'engagèrent sur ses traces.

L'une des questions le plus fréquemment posées était la suivante : mesurer ou calculer une aire plane (*segment plan*) déterminée par une courbe connue et par deux droites rectangulaires, ou bien par une courbe, deux droites parallèles et une troisième perpendiculaire [telles les aires OMB et AMNB, couvertes de hachures sur les figures ci-contre]. Ainsi, Archimède avait déterminé la valeur de

[1] Voir *Trois*. Liv., ch. II § I.

l'aire OMB dans le cas (1) où l'arc OM (sur la fig. 209) est un arc de la parabole qui a pour sommet O et pour axe OB [cette courbe est telle que les carrés des ordonnées de ses points sont proportionnels (2) aux abscisses : $y^2 = 2px$ (*vide* **528**) : elle est donc représentative de la fonction $y = \sqrt{2px}$]. Généralisant la question, Fermat avait étudié le cas où la courbe OM ou MN est une parabole d'un genre supérieur : « J'ai quarré (3) — écrit-il à Mersenne (4), en 1636 — infinies figures comprises de lignes

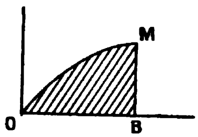


Fig. 209.

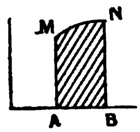


Fig. 210.

courbes ; comme, par exemple, si vous imaginez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées [*ordonnées*] soient en proportion des [*proportionnelles aux*] lignes qu'elles coupent du diamètre (5) [*abscisses*]. Cette figure approchera de la parabole et n'en diffère qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des carrés, je prends ici celles des cubes ; et c'est pour cela que M. de Beaugrand à qui j'en fis la proposition l'appelle parabole solide ». La parabole solide est représentative de la fonction $y = \sqrt[3]{2px}$; Fermat « quarre » semblablement les *segments plans* OMB déterminés par des paraboles *quarré-quarrées*, *quarré-solides*, etc., c'est-à-dire représentatives des fonctions $y = \sqrt[4]{2px}$, $y = \sqrt[5]{2px}$, etc. Or, en cherchant à quarrer les segments plans définis par de telles courbes ou d'autres semblables, on ne pouvait manquer d'apercevoir l'étroite connexité qu'il y a entre ces problèmes de *quadrature* et la notion de dérivée d'une fonction.

(1) Le segment plan est alors un « *segment parabolique* ».

(2) C'est-à-dire que le carré de l'ordonnée d'un *quelconque* des points de la courbe est égal à l'abscisse multipliée par un nombre constant.

(3) Evalué l'aire de.

(4) *Œuv. de Fermat*, t. II, p. 73.

(5) En parlant tout à l'heure de la parabole ordinaire, nous avons supposé que OB (sur la fig. 209) n'était pas un diamètre quelconque, mais l'axe de la courbe. Les hypothèses de Fermat s'appliquent en réalité à un cas plus général. *Comparer*, n° 529.

568. — Imaginons que, sur la figure 210, où nous avons tracé deux axes de coordonnées rectangulaires, le point A reste fixe tandis que le point B est variable sur l'axe des x à droite de A : appelons a l'abscisse constante de A, x l'abscisse variable du point B. Supposons, d'autre part, que MN soit un arc d'une courbe quelconque — représentative d'une fonction $y = f(x)$ — compris entre les parallèles à OY menées par A et B : l'aire du segment plan AMNB varie quand x varie (c'est-à-dire quand B se déplace) et sa valeur se trouve (pour chaque position de B) déterminée par la valeur de la variable x. Donc l'aire du segment AMNB est, au sens large du mot, *une fonction de* x.

Admettons que nous ayons en effet le droit d'assimiler cette aire aux « fonctions » proprement dites, dont nous avons fait plus haut l'étude, et désignons-la par $F(x)$.

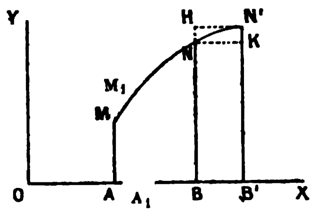


Fig. 211.

La fonction $F(x)$ est évidemment continue si la fonction $f(x)$ est elle-même continue, car l'aire AMNB varie arbitrairement peu lorsque B se déplace arbitrairement peu. Nous allons voir, d'autre part, que $F(x)$ admet une *dérivée, qui n'est autre que la fonction* $f(x)$ *d'où nous sommes partis.*

A partir de la valeur $OB = x$, donnons à la variable indépendante un accroissement Δx; le point N′ de la courbe qui a pour abscisse $OB' = x + \Delta x$, a pour ordonnée $B'N' = y + \Delta y$ [en appelant y (c'est-à-dire $f(x)$) l'ordonnée BN (égale à B′K, fig. 211), et Δy *l'accroissement* KN′ subi par cette ordonnée lorsque l'abscisse passe de la valeur x à la valeur $x + \Delta x$]. L'accroissement correspondant ΔF de la fonction $F(x)$, c'est-à-dire de l'aire AMNB, est manifestement l'aire BNN′B′ limitée supérieurement par l'arc NN′ ; la valeur de cette aire est comprise (fig. 211) entre celles des rectangles BNKB′ [de dimensions Δx, y] et BHN′B′ [de dimensions Δx et $y + \Delta y$], donc entre $y\Delta x$ et $(y + \Delta y)\Delta x$. Son rapport à Δx est par conséquent compris entre y et $y + \Delta y$; lorsque l'accroissement Δx et l'accroissement Δy tendent simultanément vers zéro, le rapport $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ — compris entre y et une quantité $y + \Delta y$

qui tend vers y — a *pour limite* y ou $f(x)$: nous avons donc, comme nous l'avions annoncé : $F'(x) = f(x)$.

Ainsi **l'aire AMNB limitée au-dessus de l'axe des x par la courbe représentative d'une fonction continue $f(x)$ entre les abscisses** OA $= a$ et OB $= x$ **figure géométriquement une fonction primitive de** $f(x)$. Cette fonction primitive n'est déterminée, comme il doit être, qu'à une constante arbitraire près, puisque l'abscisse a des points A et M est arbitraire. Ainsi, en déplaçant la droite AM sur la figure 211, on forme une aire A_1M_1NB qui est, tout comme AMNB, une fonction primitive de $f(x)$: les deux fonctions primitives diffèrent entre elles de la valeur du morceau A_1M_1MA, valeur qui est absolument indépendante de la position du point B et qui est, par conséquent, *une constante par rapport à* x [voir, pour plus de détails, le *Trois. Livr.*, chap. II, § *3*].

569. — Si la courbe était située *au-dessous* de l'axe des x, la dimension BN du petit rectangle BB'KN (fig. 212 où sont conservées les notations du n° **568**) ne serait pas égale à l'ordonnée y du

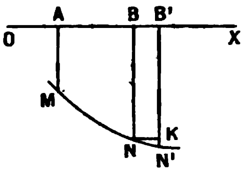


Fig. 212.

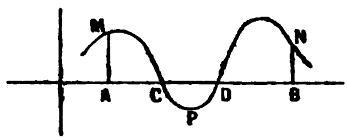


Fig. 213.

point N, mais bien à $-y$, puisque y serait négatif. Donc le rapport de l'accroissement de l'aire AMNB à l'accroissement Δx de la variable aurait pour limite $-y$, pour Δx tendant vers 0. Mais nous pouvons faire en sorte que ce rapport ait toujours pour limite $y = f(x)$ en adoptant la convention suivante : les aires des segments plans situés au-dessous de l'axe des x seront regardées comme ayant des valeurs négatives ; si alors l'arc de courbe MN coupe une ou plusieurs fois l'axe des x, ce que nous appellerons « aire AMNB » sera la différence entre les aires des surfaces déterminées par l'arc MN au-dessus et au-dessous de l'axe des x [sur la figure 213 la différence : (*aire* AMC + *aire* DNB) — *aire* CPD] ; l'aire AMNB sera positive ou négative suivant que les portions situées au-dessus des x l'emporteront ou non sur les portions situées au-dessous.

Moyennant cette convention, l'aire AMNB fonction de l'abscisse variable x du point B, aura toujours (lorsque x croîtra de Δx) un accroissement de même signe que $y = f(x)$, et sera par conséquent toujours une fonction primitive de $f(x)$.

570. Fonctions dont l'intégrale n'est pas calculable. — La construction géométrique que nous venons d'étudier soulève une question extrêmement importante et délicate (comparer n° 565). L'aire que nous avons appelée AMNB [je me place, pour simplifier, dans le cas de la fig. 211 où l'arc MN est tout entier au-dessus de l'axe des x] est, nous l'avons vu, une fonction primitive de $f(x)$. Or cette aire existe, évidemment, et se comporte de la même manière aux yeux du géomètre, quelle que soit la fonction $f(x)$ (supposée continue).

Cependant nous savons (n° 453) qu'il existe des fonctions continues qui n'ont pas de fonction primitive, du moins tant que nous nous enfermons dans le domaine des fonctions algébriques et transcendantes classiques.

N'y a-t-il point là une dissymétrie choquante? Et, plutôt que de nous en déclarer satisfaits, ne vaut-il pas mieux élargir notre notion de fonction en considérant la mesure de l'aire AMNB [qui varie d'une manière continue lorsque le point B se déplace avec continuité] comme définissant *en tous cas* une fonction $F(x)$ de la variable x? Nous nous bornons pour l'instant à poser la question, car ce sont les fondements mêmes de l'algèbre des fonctions qui se trouvent ici mis en cause. Nous ne devrons toucher à ces fondements qu'à bon escient et lorsque nous serons sûrs de pouvoir les remplacer par d'autres qui soient également solides (voir chap. V et *Trois. Liv.* chap. I, § 3).

6. Etude graphique des équations. Méthodes d'approximation

571. — Considérons la courbe représentative d'une fonction $y = f(x)$. Aux valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est nulle correspondent des points de la courbe d'ordonnée nulle, donc des points situés sur l'axe des x. Par conséquent la *recherche des racines de*

l'équation $f(x) = 0$ revient à la détermination des points de rencontre de l'axe des x avec la courbe représentative de $f(x)$.

Partant de cette remarque, nous allons nous servir de la figuration de $f(x)$ pour compléter les résultats auxquels nous a conduits l'étude algébrique des équations.

572. Théorème de Rolle. — Lorsqu'on ne peut pas calculer la valeur exacte d'une racine inconnue d'une équation, il convient d'en chercher une valeur approchée : on s'efforcera donc de déterminer un intervalle α, β qui comprenne sûrement la valeur ξ de la racine cherchée (c'est-à-dire soit tel que $\alpha < \xi < \beta$), et ne contienne d'ailleurs aucune autre racine de l'équation.

Les valeurs α et β (extrémités de l'intervalle) sont deux valeurs approchées [1] de ξ, l'une par défaut, l'autre par excès : nous dirons que α est une *limite inférieure*, et β une *limite supérieure* de la valeur ξ. Plus l'intervalle α, β sera petit, plus grande sera l'approximation avec laquelle il déterminera l'inconnue ξ.

La recherche d'intervalles α, β aussi petits que possible comprenant chacun une racine et une seule d'une équation donnée quelconque, algébrique ou transcendante, se trouve être ainsi le problème fondamental d'où dépend la résolution approximative des équations. Ce problème fut approfondi par les algébristes de la fin du XVII[e] siècle.

Dans le traité [2] qu'il publie en 1690, Michel Rolle insiste, le premier, sur la relation qu'il y a entre les racines d'une équation $f(x) = 0$ et les racines de l'équation $f'(x) = 0$ (*équation dérivée* dirons-nous, cf., **421**). Si $f(x)$ est un polynome, $f'(x)$ est un polynome de degré moindre ; il y a donc avantage à ramener, comme le fait Rolle, l'étude de l'équation proposée à celle de l'équation dérivée. D'ailleurs les remarques de Rolle permettent de ramener à son tour l'étude de l'équation $f'(x) = 0$ à celle de l'équation de degré moindre $f''(x) = 0$; et ainsi de suite. D'où le nom de *cascades* [3] donné par Rolle à la suite des équations

[1] C'est pourquoi Rolle les appelle des *hypothèses* (ouv. cité à la note suivante : liv. second, chap. III, p. 103).

[2] *Traité d'algèbre ou Principes généraux pour résoudre les questions de mathématique*, par M. Rolle, Paris, 1690.

[3] *Loc. cit.*, liv. second, chap. VI, p. 125.

$f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, que l'on est amené à considérer pour étudier l'équation $f(x) = 0$.

Le théorème fondamental énoncé par Rolle peut être formulé en ces termes :

Soit $f(x)$ une fonction que l'on considère à l'intérieur d'un intervalle a, b, où elle est continue ainsi que sa dérivée $f'(x)$. Entre deux racines consécutives (1) *α et β de la dérivée, appartenant à l'intervalle a, b, il existe au plus une racine de la fonction. — Entre deux racines consécutives de $f(x)$ [dans l'intervalle a, b] il y a au moins une racine de $f'(x)$.*

En effet, par hypothèse, lorsque x croît entre α à β, la dérivée $f'(x)$ ne s'annule pas, et conserve donc le même signe; la fonction ne cesse pas de croître ou de décroître : donc la courbe repré-

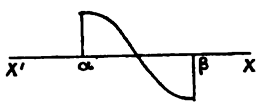


Fig. 214.

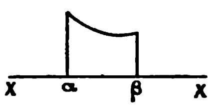


Fig. 215.

sentative ne peut franchir qu'une fois l'axe des x; pour savoir si elle le franchit ou non, il suffira de voir si ses extrémités sont de part et d'autre ou du même côté de l'axe des x, — c'est-à-dire *si $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont des signes contraires* (comme sur la fig. 214) *ou le même signe* (comme sur la fig. 215). Si $f(\alpha)$ ou $f(\beta)$ était nul, — c'est-à-dire si le nombre α ou β était racine de $f(x)$ — la courbe ne pourrait en tout cas pas rencontrer l'axe en un second point d'abscisse comprise entre α et β (2).

Considérons, d'autre part, deux racines consécutives de $f(x)$: il y a sûrement entre elles un maximum ou un minimum [donc une racine de $f'(x)$], puisque la courbe, suivie avec continuité d'une racine à l'autre, part de l'axe des x pour y revenir.

573. Remarque. — Il résulte du théorème de Rolle que si une équation de degré n a n racines réelles, $x_1, \ldots, x_n$, l'équation déri-

(1) Par « racine de $f(x)$ » nous entendons « racine de l'équation $f(x) = 0$ » (cf. 359). — Deux racines *consécutives* sont deux racines entre lesquelles ne s'en trouve située aucune autre.

(2) Le nombre α ou β, est d'ailleurs, en ce cas, racine multiple de $f(x)$. [Voir n° 421].

vée a aussi toutes ses racines réelles, celles-ci étant respectivement situées entre les racines de l'équation primitive. En effet, dans chacun des intervalles (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{n-1}, x_n), qui sont au nombre de $n - 1$, il y a une racine de l'équation dérivée : ce qui donne $n - 1$ racines réelles de cette équation ; elle n'a pas d'autres racines puisqu'elle est de degré [1] $n - 1$.

574. Séparation des racines d'une équation. — Supposons que nous sachions calculer *toutes* les racines réelles de $f'(x)$ situées dans un intervalle a, b où $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues. Appelons-les $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, et calculons les valeurs $f(a), f(\alpha), \ldots, f(b)$ — valeurs de la fonction pour $x = a$, $x = \alpha$, etc. — de manière à connaître leurs signes. Chacun des nombres $a, \alpha, \ldots \lambda$ « fournira » ainsi, — à moins qu'il ne soit racine de $f(x)$ — l'un des signes + ou —. Cela fait, il résulte du théorème de Rolle [2] que *chacun des intervalles* (a, α), (α, β), ... (λ, b) *contiendra* 1 *ou* 0 *racine de* $f(x)$ *suivant que ses extrémités fournissent ou non* [3] *des signes contraires.*

Sur la figure 216, par exemple, les signes correspondant aux nombres de la suite de Rolle sont :

a	α	β	γ	δ	b
—	+	—	—	—	+

L'équation présente 1 racine dans chacun des intervalles (a, α), (α, β), (δ, b) et 0 racine dans les intervalles (β, γ), (γ, δ) [4].

(1) La dérivée d'un polynome de degré n, soit $a_n x^n + \ldots + a x_1 + x_0$ est, on le sait, un polynome de degré $n - 1$, savoir $n . a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$.

(2) La déduction est immédiate pour les intervalles (α, β), (β, γ), etc. Pour ce qui est de l'intervalle (a, α) [ou (λ, b)] observons d'abord qu'il contient *au plus* une racine (car s'il en contenait deux, il y aurait entre elles une racine de la dérivée d'après la seconde partie du théorème de Rolle) ; donc il en contient *une* ou *zéro* suivant qu'entre a et α la courbe coupe ou non l'axe des x.

(3) Dans le cas particulier où l'une des extrémités d'un intervalle (α, β) est racine de $f(x)$, il n'y a, nous l'avons dit, aucune autre racine dans cet intervalle.

(4) Considérons encore, pour prendre un exemple numérique, l'équation du troisième degré

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0 ;$$

nous avons

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Les racines de la dérivée sont -1 et $+1$. Envisageons alors l'inter-

La suite des nombres a, α, β, ..., λ, b est souvent appelée *suite de Rolle* relative à l'équation $f(x) = 0$. Les nombres de cette suite « séparent » les racines simples [1] de $f(x)$.

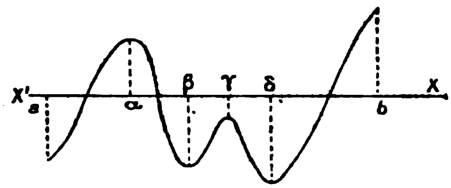


Fig. 216.

575. Extrémités de la suite de Rolle. — Les intervalles (a, α), (α, β), ... que nous avons considérés ci-dessus ont tous été supposés compris dans un intervalle (a, b) où $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues. Dans le cas où $f(x)$ est un *polynome*, cette fonction et sa dérivée sont continues pour toute valeur finie de la variable; nous pouvons donc prendre comme nombres a et b des nombres de *valeur absolue arbitrairement grande*, l'un négatif, l'autre positif : nous dirons alors — en nous référant aux signes introduits au n° 398 — que la suite de Rolle est composée des nombres

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \ldots \quad \lambda, \quad +\infty.$$

D'ailleurs, lorsque l'on donne à x une valeur positive ou négative très grande, le polynome $f(x)$ a nécessairement le même signe [2] que son terme de plus haut degré, soit $a_n x^n$. Si n est un

valle $-2+2$, qui comprend -1 et $+1$ et écrivons sous chacun des nombres -2, -1, 1, 2, les *signes* qu'ils fournissent [c'est-à-dire les signes de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$], nous obtenons :

$$\begin{array}{cccc} -2 & -1 & 1 & 2 \\ - & + & - & +, \end{array}$$

d'où résulte que l'équation proposée a une racine dans chacun des intervalles $(2, -2)$, $(-1, +1)$, $(1, 2)$; elle a ses *trois* racines réelles.

(1) Si $f(x)$ a des racines multiples, ces racines font partie des nombres α, β, ..., λ. Nous pourrions d'ailleurs nous dispenser de considérer le cas où $f(x)$ a des racines multiples, étant donné que la résolution d'une équation polynomale quelconque peut toujours être ramenée à la résolution d'équations dont toutes les racines sont simples (*voir* 423).

(2) Soit $f(x)$ polynome de degré n et ordonné sous la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Nous pouvons écrire

$$f(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x}\right).$$

Lorsque x devient arbitrairement grand en valeur absolue, tous les termes

nombre pair, x^n est un nombre positif, quel que soit le signe de x; nous exprimerons ce fait en disant que $f(-\infty)$ et $f(+\infty)$ ont tous deux le signe de a_n [les extrémités $-\infty$ et $+\infty$ de la suite de Rolle *fournissent* le même signe]. Si n est un nombre *impair*, x^n a le même signe que x : donc $f(+\infty)$ a le signe de a_n et $f(-\infty)$ a le signe contraire [1].

Ainsi, lorsque l'on aura affaire à un polynome, il sera commode de prendre comme extrémités de la suite de Rolle, les nombres $-\infty$ et $+\infty$. On devra cependant déterminer autrement ces extrémités si l'on veut avoir des valeurs approchées des racines, et non point seulement les séparer. *On prendra alors comme valeur de a un nombre inférieur à* α, *aussi rapproché que possible de* α, *et tel que* $f(a)$ *et* $f(-\infty)$ *aient même signe, et comme valeur de b un nombre supérieur à* λ, *ausssi rapproché que possible de* λ, *tel que* $f(b)$ *et* $f(+\infty)$ *aient même signe* [2].

576. — Lorsque l'on a « séparé » les racines d'une équation $f(x) = 0$, la question qui se pose est la suivante :

Etant donné un intervalle c, d qui contient une racine inconnue simple [3] ξ, *et une seule, d'une équation algébrique ou transcendante, et dont les extrémités sont, par conséquent, des valeurs approchées de* ξ (n° **572**), *comment obtenir des valeurs de* ξ *plus approchées que c et d ? Comment déterminer, en d'autres termes, un intervalle c', d' intérieur à l'intervalle* (*c, d*) [*plus petit*] *qui comprenne, lui aussi la valeur* ξ ?

La question ainsi posée peut être traitée indépendamment du

de la parenthèse, sauf le premier, tendent vers 0 ; donc la quantité entre parenthèses a pour signe le signe de a_n, et $f(x)$ a le signe de $x^n . a_n$.

(1) De là résulte qu'une équation de degré impair a toujours au moins une racine réelle (cf. n° 358).

(2) Le théorème suivant, par exemple, fournit une limite supérieure des racines positives : supposons pour fixer les idées le dernier coefficient a_n *positif, et désignons par s la somme des valeurs absolues des coefficients négatifs de l'équation, par p la différence entre le degré de l'équation et l'exposant du premier terme à coefficient négatif (j'entends par « premier » celui qui a le plus haut degré) : le plus grand des deux nombres* 1 *et* $\sqrt[p]{\frac{s}{a_n}}$ *est limite supérieure des racines de l'équation*. — On détermine semblablement une limite inférieure des racines négatives.

(3) Voir p. 539 note 1.

théorème de Rolle [1] et ne suppose point, par conséquent, que l'on ait déterminé les *valeurs exactes* des nombres de la suite de Rolle, c'est-à-dire des racines de $f'(x)$. Nous, nous nous placerons toutefois d'emblée dans l'hypothèse *où l'on est sûr* [2] *que l'intervalle* c, d *est compris à l'intérieur de l'un des intervalles de Rolle — tels que* (α, β) — *définis au* n° **574**.

En ce cas la dérivée $f'(x)$ conserve un signe constant dans l'intervalle c, d [puisqu'elle ne s'annule pas]; l'arc de courbe CD qui représente $f(x)$ dans cet intervalle ne cesse donc de monter ou de descendre, en traversant d'ailleurs l'axe des x, puisque, par hypothèse, $f(x)$ a une racine dans l'intervalle. — Nous ferons en outre cette hypothèse que $f''(x)$ *ne change pas de signe dans l'intervalle* c, d. De là résulte que $f'(x)$ est toujours croissant ou toujours décroissant. Or $f'(x)$ est (**554**) le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$; dire, dès lors, que ce coefficient varie sans cesse dans le même sens pour x croissant de c à d, c'est dire que la direction de la tangente (en un point qui parcourt l'arc de courbe de C à D) ne cesse de se rapprocher, soit de la direction parallèle à l'axe Oy, soit de la direction parallèle à Ox.

577. — Dans ces conditions, quatre cas de figure peuvent se présenter [3] :

1° Si $f(c) > 0$ et $f(d) < 0$, la courbe est descendante. Si le signe de $f''(x)$ est —, $f'(x)$ va en décroissant; la direction de la

(1) Les extrémités c, d de l'intervalle considéré peuvent être des nombres de la suite de Rolle ou peuvent être d'autres nombres [l'intervalle c, d étant par exemple, un intervalle compris dans l'un des intervalles (a, α), (α, β), ... considérés au n° 574].

(2) On pourra toujours obtenir un intervalle c, d satisfaisant aux conditions que nous allons énoncer en appliquant le théorème de Rolle aux fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. ... [méthode des *cascades*, voir n° 572] et en *essayant* diverses valeurs particulières de x, [c'est-à-dire calculant les valeurs de $f(x)$, ou $f'(x)$, ou $f''(x)$, pour diverses valeurs de x voisines de la racine inconnue, et comparant les signes des nombres obtenus]. Nous n'entrerons point ici dans le détail de cette opération dont l'intérêt est purement technique.

(3) Dans le 1er et 4e cas on dit que la courbe tourne sa concavité vers les y positifs (cf. p. 510, note 1).

tangente le long de l'arc CD va se rapprochant de la direction Ox, et la courbe a l'allure représentée par la fig. 217 ;

2° Si $f(c) > 0$ et $f(d) < 0$, le signe de $f''(x)$ étant —, la direction de la tangente le long de CD va se rapprochant de la direction Oy, et la courbe a l'allure représentée par la figure 218 ;

3° et 4° Si $f(c) < 0$ et $f(d) > 0$, la courbe est montante. Elle a l'allure représentée par la figure 219 ou l'allure représentée par la figure 220 suivant que le signe de $f''(x)$ est — ou +.

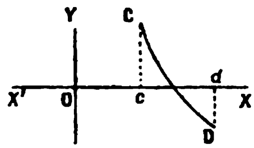


Fig. 217.

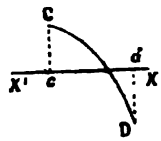


Fig. 218.

Tels sont les quatre cas en présence desquels nous pourrons nous trouver si nous partons d'un intervalle c, d satisfaisant aux conditions que nous avons énoncées et qui se réduisent à ceci : *$f(c)$ et $f(d)$ ont des signes contraires et les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$ ne s'annulent pour aucune valeur comprise entre c et d.*

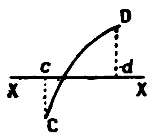


Fig. 219.

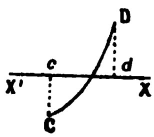


Fig. 220.

Cela posé, voyons comment nous obtiendrons des *valeurs approchées de ξ, par défaut et par excès*, qui soient plus voisines de la racine que les nombres c et d.

Nous allons nous placer, pour fixer les idées dans le *premier des quatre cas ci-dessus énumérés*. Le lecteur n'aura pas de peine à appliquer aux trois autres cas la méthode ou les méthodes que nous allons exposer.

578. Méthode des parties proportionnelles et méthode de Newton. — Traçant (sur la figure 221 où est reproduite la disposition de la figure 217) la droite CD qui coupe l'axe des x en N,

et menant au point C la tangente à la courbe qui coupe l'axe en L, nous voyons que le point de rencontre M (d'abscisse ξ) de la courbe et de l'axe est situé entre L et N. Si donc nous appelons l et n les abscisses respectives des points L et N, nous aurons $l < \xi < n$. D'ailleurs — étant donné la disposition de la courbe et le signe du coefficient angulaire de la tangente en C — les points L et N sont évidemment situés entre les pieds des perpendiculaires abaissées de C et D sur l'axe. Donc les valeurs l et n satisfont aux conditions requises au n°. **576**.

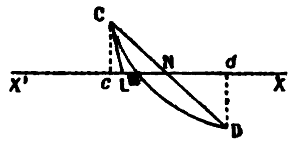


Fig. 221.

Calculons ces valeurs :

1° On voit facilement (¹) que la droite CD est la droite représentative de la fonction $y = f(d) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - d)$. En effet, cette fonction prend la valeur $f(c)$ pour $x = c$ et la valeur $f(d)$ pour $x = d$; donc la droite qui le représente est la droite qui passe par les points C et D dont les coordonnées respectives sont $c, f(c)$ et $d, f(d)$. L'abcisse du point N (point de la droite CD dont l'ordonnée est nulle) est la valeur de x pour laquelle

$$f(d) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - d) = 0;$$

c'est par conséquent $n = d - (d - c)\frac{f(d) - f(c)}{f(d)}$;

2° On voit facilement que la droite CL — dont le coefficient angulaire (**541**) est par hypothèse $f'(c)$ — est la droite représentative (²) de la fonction $y = f(c) + (x - c)f'(c)$. L'abscisse du point L est la valeur de x pour laquelle cette fonction s'annule, c'est-à-dire pour laquelle

$$f(c) + (x - c)f'(c) = 0;$$

c'est donc (³) : $$l = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

( ) Cf. chap. IV, § 4.

(²) *Vide* chap. IV, § 4. On voit que pour $x = c$, cette fonction est égale à $f(c)$. Donc la droite représentative est la droite de coefficient angulaire $f'(c)$ qui passe par le point C.

(³) Dans le cas de figure que nous considérons, on a $f(c) > 0$, $f'(c) < 0$, donc $\frac{f(c)}{f'(c)} < 0$, d'où $l > c$.

Telles sont les expressions des valeurs approchées [1] de ξ que nous substituerons aux valeurs approchées primitives c et d. Les méthodes qui fournissent les nouvelles valeurs consistent, on le voit, à *remplacer la courbe* CD (dont il s'agit de trouver le point de rencontre avec Oy), soit par la *corde* CD, soit par la *tangente* en C à la courbe. La première méthode est [2] souvent appelée *méthode des parties proportionnelles* ; la seconde a reçu le nom de « *méthode de Newton* » [3].

En appliquant à nouveau ces méthodes à l'intervalle l, n, on déterminera un troisième intervalle, *plus petit*, qui contient la racine inconnue ξ ; et ainsi de suite, chaque nouvel intervalle étant plus *resserré* que le précédent et faisant, par suite, connaître la valeur de ξ avec une approximation plus grande.

(1) On peut facilement calculer une *limite supérieure* de l'erreur que l'on commet lorsqu'on prend l'un des nombres l ou n comme valeur de la racine ξ (entendons : on peut calculer un nombre α tel que l'on ait sûrement $\xi - l < \alpha$ et $n - \xi < \alpha$). On trouvera l'expression de cette limite dans les traités d'algèbre.

(2) Cette méthode est ainsi nommée parce que la ligne droite (ici : la corde CD) est une ligne telle que l'accroissement de l'ordonnée, lorsque l'on passe de l'un à l'autre de ses points, est proportionnel à l'accroissement de l'abscisse [la relation qui définit les points de la droite CD peut s'écrire $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$, les valeurs x_0 et y_0 étant les coordonnées d'un point fixe, x et y les coordonnées d'un point variable sur la droite, m un nombre constant].

(3) Newton applique en particulier cette méthode à l'équation $y^3 - 2y - 5 = 0$ qui a une racine comprise entre 2 et $2 + \frac{2}{10}$ (*Numeralis æquationum affectarum resolutio*, apud *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*, Londres, 1711 ; cf. *Newtoni Opuscula mathem.*, t. I, 1744, p. 10-12).

ERRATA

Page 113, ligne 5. Au lieu de « nombres *algébriques* », lire « nombres *absolus* ».

Page 205, note 3, *ajouter* ; D'une manière générale, si l'on joint un *centre* O aux divers points A, B, C,. . d'une figure quelconque de l'espace, les points de rencontre des droites OA, OB, OC,,.. avec un plan P forment une figure qui est dite *projection conique* ou *centrale* (sur le plan P) de la figure de l'espace.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE PREMIER

Constatation des faits.

CHAPITRE PREMIER

LES NOMBRES

CHAPITRE II

LES GRANDEURS

CHAPITRE III

LES FIGURES

CHAPITRE IV

DEUXIÈME LIVRE

Construction

CHAPITRE PREMIER

LE CALCUL ALGÉBRIQUE

CHAPITRE II

CALCUL DES FONCTIONS

CHAPITRE III

L'ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.